# Complementi di Analisi Matematica

9 gennaio 2012

**Esercizio 1** (7 punti)

Verificare che il seguente campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left( x^2 y + z e^{5x}, \frac{x^3}{3} - \cos(z), y \sin(z) + \frac{e^{5x}}{5} \right)$$

è irrotazionale e calcolarne un potenziale.

**Soluzione**:

Dobbiamo verificare che le tre componenti del rotore di $\mathbf{F}$ sono tutte nulle ovvero che:

$$\frac{\partial}{\partial y} F_z - \frac{\partial}{\partial z} F_y = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} F_x - \frac{\partial}{\partial x} F_z = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x = 0$$

e infatti:

$$\sin(z) - \sin(z) = 0, \qquad e^{5x} - e^{5x}, \quad x^2 - x^2 = 0 = 0$$

Dato che il campo $\mathbf{F}$ ha rotore nullo ed è definito su tutto $\mathbb{R}^3$ (che è un dominio semplicemente connesso) allora è conservativo e possiamo calcolarne un potenziale $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Imponendo che $\frac{\partial}{\partial x} U(x, y, z) = x^2 y + z e^{5x}$ otteniamo che

$$U(x, y, z) = y \frac{x^3}{3} + z \frac{e^{5x}}{5} + F(y, z),$$

dove $F$ è una funzione che dipende solo dalle variabili $y$ e $z$.

Imponendo che $\frac{\partial}{\partial y} U(x, y, z) = \frac{x^3}{3} - \cos(z)$, abbiamo

$$\frac{x^3}{3} + \frac{\partial}{\partial y} F(y, z) = \frac{x^3}{3} - \cos(z),$$

da cui $\frac{\partial}{\partial y} F(y, z) = -\cos(z)$ e quindi $F(y, z) = -\cos(z) y + G(z)$, dove $G$ è una funzione che dipende solo dalla variabile $z$. Quindi il potenziale $U$ deve essere della forma

$$U(x, y, z) = y \frac{x^3}{3} + z \frac{e^{5x}}{5} - \cos(z) y + G(z).$$

Imponendo infine che $\frac{\partial}{\partial z} U(x, y, z) = y \sin(z) + \frac{e^{5x}}{5}$, abbiamo

$$\frac{e^{5x}}{5} + \sin(z) y + \frac{d}{dz} G(z) = y \sin(z) + \frac{e^{5x}}{5},$$

quindi $\frac{d}{dz}G(z) = 0$ e $G$ è una funzione costante. Concludendo il potenziale cercato è :

$$U(x, y, z) = y\frac{x^3}{3} + z\frac{e^{5x}}{5} - \cos(z)y + cost.$$

**Esercizio 2** (8 punti)

Determinare le coordinate $(x_G, y_G)$ del baricentro di una lamina piana omogenea delimitata dalle seguenti curve:

$$x - 2y + 8 = 0, \quad x + 3y + 5 = 0, \quad x = -2, \quad x = 4$$

**Soluzione**: Denotiamo con $D \subset \mathbb{R}^2$ il sottoinsieme del piano delimitato dalle curve

$$x - 2y + 8 = 0, \quad x + 3y + 5 = 0, \quad x = -2, \quad x = 4$$

$D$ è un insieme $y$-semplice, infatti:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, -2 \leq x \leq 4, -\frac{x}{3} - \frac{5}{3} \leq y \leq \frac{x}{2} + 4\}$$

Dato che la lamina è omogenea, la densità $\rho$ è costante.
La massa della lamina è data da:

$$M = \int\int_D \rho \, dxdy = \rho \int_{-2}^{4} dx \int_{-\frac{x}{3}-\frac{5}{3}}^{\frac{x}{2}+4} dy = \rho \int_{-2}^{4} \frac{x}{2} + 4 + \frac{x}{3} + \frac{5}{3} dx = 39\rho$$

La coordinata $x_G$ del baricentro è data da:

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M}\int\int_D \rho x \, dxdy = \frac{1}{39}\int_{-2}^{4} dx \int_{-\frac{x}{3}-\frac{5}{3}}^{\frac{x}{2}+4} x dy \\ &= \frac{1}{39}\int_{-2}^{4} x\left(\frac{x}{2} + 4 + \frac{x}{3} + \frac{5}{3}\right) dx = \frac{18}{13} \end{aligned}$$

La coordinata $y_G$ del baricentro è data da:

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{M}\int\int_D \rho y \, dxdy = \frac{1}{39}\int_{-2}^{4} dx \int_{-\frac{x}{3}-\frac{5}{3}}^{\frac{x}{2}+4} y dy \\ &= \frac{1}{39}\int_{-2}^{4} \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + 4\right)^2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{3} - \frac{5}{3}\right)^2 dx = \frac{50}{39} \end{aligned}$$

**Esercizio 3** (8 punti)

Sia $\Sigma$ la superficie del cubo unitario $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, e sia $\hat{n}$ il versore normale uscente. Sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(x^2, y^2, 0\right)$$

Si calcoli l'integrale di superficie $\int \int_\Sigma \mathbf{F} \cdot \hat{n}\, dS$.

**Soluzione**: Applicando il teorema della divergenza

$$\int \int_\Sigma \mathbf{F} \cdot \hat{n}\, dS = \int \int \int_C div\mathbf{F} dxdydz$$

dove $C$ è il cubo unitario di cui $\Sigma$ è il bordo. Abbiamo che

$$div\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} F_x + \frac{\partial}{\partial y} F_y + \frac{\partial}{\partial z} F_z = 2x + 2y + 0,$$

quindi

$$\int \int \int_C div\mathbf{F} dxdydz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2x + 2y) dxdydz = 2$$

**Esercizio 4** (7 punti)

Un'urna contiene 100 palline, numerate dall'1 al 100. Supponiamo di fare 10 estrazioni, e dopo ogni estrazione la pallina estratta viene reinserita nell'urna. Qual è la probabilità che fra i 10 numeri estratti almeno 2 siano uguali?

**Soluzione**: Indichiamo con $A$ l'evento "ra gli 11 numeri estratti ce ne sono almeno 2 ugual" e $A^c$ l'evento complementare, ovvero "i 10 numeri estratti sono tutti diversi tra loro".

Dato che $P(A) = 1 - P(A^c)$, la conoscenza di $P(A^c)$ permette il calcolo immediato di $P(A)$.

Nell'ipotesi di distribuzione di probabilità uniforme, la probabilità di $A^c$ è data dal rapporto fra il numero di casi favorevoli ed il numero di casi possibili.

Il numero di casi possibili è dato dal numero di tutte le possibili sequenze di 10 numeri scelti fra 100 possibili, ovvero $(100)^{10}$.

Il numero di casi possibili è dato dal numero di tutte le possibili sequenze di 10 numeri scelti fra 100 possibili in cui non ci sono ripetizioni, ovvero dal numero delle possibili disposizioni di 100 oggetti 10 alla volta, ovvero $100!/(100 - 10)!$.

La probabilità di $A^c$ è quindi $P(A^c) = \frac{100!}{(100)^{10} 90!}$, mentre la probabilità di $A$ è data da

$$P(A) = 1 - P(A^c) = P(A) = 1 - \frac{100!}{(100)^{10} 90!}$$