Analisi Matematica 2 - 1a prova in itinere

5 novembre 2015

Esercizio 1 Si consideri la curva $\gamma \subset \mathbf{R}^3$ intersezione del cono $C = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}, z \geq 0\}$ e del piano di equazione $z = y$.

1. Fornire una parametrizzazione di γ e mostrare che è regolare
2. Calcolare il versore tangente nel punto di coordinate $(0, 1/2, 1/2)$
3. Calcolare la lunghezza di γ.

Soluzione:

1. Mettendo a sistema le equazioni che caratterizzano la supeficie conica C ed il piano:

$$\begin{cases} z = 1 - \sqrt{x^2+y^2} \\ z \geq 0 \\ z = y \end{cases}$$

otteniamo che le coordinate x, y dei punti di γ soddisfano le diseguagliane $x^2+y^2 \leq 1$, $y \geq 0$ e l'equazione $y = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$, da cui $y = \frac{1-x^2}{2}$, con $x \in [-1,1]$. Una parametrizzazione per la curva richiesta è la funzione $\alpha : [-1,1] \to \mathbf{R}^3$:

$$\alpha(x) = \left(x, \frac{1-x^2}{2}, \frac{1-x^2}{2}\right)$$

Tale parametrizzazione è regolare in quanto le tre componenti di α sono funzioni di classe C^1, inoltre il vettore derivata $\alpha'(x) = (1, -x, -x)$ non si annulla per nessun valore del parametro x.

2. Il vettore tangente in (0,1/2,1/2), cioé nel punto corrispondente al valore del parametro $x = 0$ è il vettore $\alpha'(0)/\|\alpha'(0)\| = (1,0,0)$.

3. la lunghezza della curva è data da

$$L(\gamma) = \int_{-1}^{1} \|\alpha'(x)\| dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+2x^2} dx = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \log(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

Esercizio 2

Si consideri l'insieme $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

1. rappresentare graficamente le curve γ_1, γ_2 e γ_3 intersezione di Ω con i piani xy, yz e xz rispettivamente. Costruire inoltre le parametrizzazioni di tali curve.
2. Calcolare il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y,z) = 2x + 2z - 4$ sull'insieme Ω

Soluzione:

1. La curva γ_1 è descritta dal sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ z = 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

è un arco di circonferenza di parametrizzazione $\alpha_1(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$, con $\theta \in [0, \pi/2]$.
La curva γ_2 è descritta dal sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x = 0 \\ z \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

è un arco di circonferenza di parametrizzazione $\alpha_2(\theta) = (0, \cos\theta, \sin\theta)$, con $\theta \in [0, \pi/2]$.
La curva γ_3 è descritta dal sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y = 0 \\ x \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

è un arco di circonferenza di parametrizzazione $\alpha_3(\theta) = (\cos\theta, 0, \sin\theta)$, con $\theta \in [0, \pi/2]$.

L'insieme Ω è la parte della superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ contenuta nel primo ottante. Per individuare eventuali punti di massimo o minimo della funzione f sulla superficie sferica applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange con la funzione Lagrangiana $\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = 2x + 2z - 4 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$. Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 2 = 2\lambda x \\ 0 = 2\lambda y \\ 2 = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Ottenendo due soluzioni: il punto $(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$ in cui $f(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2) = 2\sqrt{2} - 4$ ed il punto $(-\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2)$ che non consideriamo ai fini della soluzione dell'esercizio in quanto non appartiene all'insieme Ω.
Consideriamo ora le tre curve γ_1, γ_2 e γ_3 che delimitano L'insieme Ω e cerchiamo eventuali punti di massimo o minimo assoluto per f su tali curve.
Per quanto riguarda la curva γ_1, studiamo la funzione $f(\alpha_1(\theta)) = f(\cos\theta, \sin\theta, 0) = 2\cos\theta - 4$ sull'intervallo $\theta \in [0, \pi/2]$. Su tale intervallo tale funzione è decrescente, quindi il massimo viene raggiunto in $\theta = 0$, nel punto (1,0,0) in cui $f = -2$, mentre il minimo nel punto (0,1,0) corrispondente al valore $\theta = \pi/2$, in cui $f = -4$.
Per quanto riguarda la curva γ_2, studiamo la funzione $f(\alpha_2(\theta)) = f(0, \cos\theta, \sin\theta) = 2\sin\theta - 4$ sull'intervallo $\theta \in [0, \pi/2]$. Su tale intervallo tale funzione è crescente, quindi il massimo viene raggiunto in $\theta = \pi/2$, nel punto (0,0,1) in cui $f = -2$, mentre il minimo nel punto (0,1,0) corrispondente al valore $\theta = 0$, in cui $f = -4$.
Per quanto riguarda la curva γ_3, studiamo la funzione $f(\alpha_3(\theta)) = f(\cos\theta, 0, \sin\theta) = 2\cos\theta + 2\sin\theta - 4$ sull'intervallo $\theta \in [0, \pi/2]$. La derivata prima di tale funzione si annulla in $\theta = \pi/4$, corrispondente al punto di coordinate $(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$ in cui $f(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2) = 2\sqrt{2} - 4$. Agli estremi, nei valori corrispondenti a $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$, abbiamo rispettivamente $f(1, 0, 0) = -2$ e $f(0, 0, 1) = -2$
Complessivamente, il punto di massimo assoluto di f su Ω è $(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$ in cui $f(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2) = 2\sqrt{2} - 4$, mentre il punto di minimo assoluto di f su Ω è (0,1,0) in cui $f(0, 1, 0) = -4$.

Esercizio 3

Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ il quadrilatero di vertici (0,0), (2,1), (3,3) e (1,2) e sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = x^2 + y$

1. Si calcoli l'integrale doppio $\int\int_\Omega f(x, y)dxdy$ utilizzando le coordinate cartesiane (x, y).

2. Si costruisca una trasformazione T di coordinate che trasformi Ω in un rettangolo Ω'. Si dimostri che tale trasformazione è un diffeomorfismo globale e si rappresentino graficamente gli insiemi Ω e Ω'.

3. Si calcoli l'integrale $\int\int_\Omega f(x,y)dxdy$ utilizzando la formula di cambiamento di variabili e la trasformazione T introdotta al punto 2.

Soluzione:

1. Rappresentando Ω come insieme $y-$semplice:

$$\begin{aligned}\int\int_\Omega f(x,y)dxdy &= \int_0^1 \int_{x/2}^{2x} (x^2+y)dydx + \int_1^2 \int_{x/2}^{x/2+3/2} (x^2+y)dydx + \int_2^3 \int_{2x-3}^{x/2+3/2} (x^2+y)dydx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^3 + \frac{15}{8}x^2\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{11}{8}x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)^2\right) dx \\ &\quad + \int_2^3 \left(x^2\left(-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(2x-3)^2\right) dx \\ &= 1 + 23/4 + 23/4 = 25/2\end{aligned}$$

2. Introduciamo la trasformazione lineare $T : \Omega' \to \Omega$, un cui l'inversa $T^{-1} : \Omega \to \Omega'$ è definita da

$$u = t - x/2, \quad v = y - 2x, \qquad (u,v) \in \Omega' = [0,3/2] \times [-3,0]$$

mentre $T : \Omega \to \Omega'$ è definita da:

$$x = \frac{2}{3}(u-v), \quad y = \frac{4}{3}u - \frac{v}{3}$$

Dato che la trasformazione T è lineare e la matrice associata ha determinante diverso da 0; possiamo concludere che è invertibile su tutto $\mathbf{R}^2$. Inoltre è un diffeomorfismo globale in quanto sia T che T^{-1} hanno per componenti delle funzioni lineari, che sono quindi di classe $C^1(\mathbf{R}^2)$.

3. Il determinante della matrice jacobiana JT è pari a $2/3$. Abbiamo dunque:

$$\begin{aligned}\int\int_\Omega f(x,y)dxdy &= \int\int_{\Omega'} f\left(\frac{2}{3}(u-v), \frac{4}{3}u - \frac{v}{3}\right)\frac{2}{3}dudv \\ &= \int_{-3}^0 \int_0^{3/2} \left(\frac{4}{9}(u-v)^2 + \frac{4}{3}u - \frac{v}{3}\right)\frac{2}{3}dudv = \frac{25}{2}\end{aligned}$$