Complementi di Analisi Matematica

28 agosto 2012

Esercizio 1 (7 punti)
Calcolare il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$

$$\mathbf{F}(x, y) = (y, 2x)$$

lungo l'arco di circonferenza γ

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 4, y \geq 0\}$$

percorso in senso antiorario.
Soluzione:

Parametrizziamo l'arco di circonferenza γ nel seguente modo

$$x(\theta) = 1 + 2\cos\theta, \qquad y(\theta) = 2\sin\theta, \qquad \theta \in [0, \pi].$$

Il vettore tangente è :

$$\mathbf{v} = (-2\sin\theta, 2\cos\theta)$$

L'integrale di linea $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ è quindi dato da

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^\pi (2\sin\theta, 2 + 4\cos\theta) \cdot (-2\sin\theta, 2\cos\theta)d\theta == \int_0^\pi (-4\sin^2\theta + 4\cos\theta + 8\cos^2\theta)d\theta = 2\pi$$

Esercizio 2 (8 punti)
Si determinino i punti di massimo e minimo assoluto della funzione $f(x, y) = x^2 - 4xy + 2y^2 + x + y$ nel triangolo di vertici $(2, 0)$, $(-1, 0)$, $(-1, 3)$.
Soluzione:
Analizziamo i punti stazionari interni al triangolo. Imponiamo la condizione di annullamento del gradiente $\nabla f(x, y) = (0, 0)$:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 1 = 0 \\ -4x + 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione $x = 1, y = 3/4$. Il punto è all'interno del triangolo e $f(1, 3/4) = 15/8$.

Analizziamo ora i punti del bordo, partendo, ad esempio, dal lato $y = 0$, $-1 \leq x \leq 2$. La funzione f ristetta a questo lato assume la forma $f(x, 0) = x^2 + x$, con $-1 \leq x \leq 2$. Tale funzione della variabile x ha un minimo in $x = -1/2$ in cui vale $-1/4$, e assume il valore massimo sul bordo del suo intervallo di definizione in $x = 2$, in cui assume il valore 6.
Consideriamo ora il lato $x = -1$ $0 \leq y \leq 3$. La funzione assume la forma $f(-1, y) = 2y^2 + 5y$, che nell'intervallo $0 \leq y \leq 3$ è crescente, quindi il valore minimo è assunto nel primo estremo $y = 0$ e vale 0, mentre il valore massimo viene assunto nel secondo estremo $y = 3$ e vale 33.
SUll'ultimo lato , con $y = 2 - x$, con $-1 \leq x \leq 2$, la funzione assume la forma $f(x, 2 - x) = 7x^2 - 16x + 10$, $-1 \leq x \leq 2$. Il minimo viene assunto in $x = 8/7$ e vale $6/7$, mentre il massiomo viene assunto in $x = -1$ e vale 33.

Concludendo il minimo assoluto viene assunto in $(-1/2, 0)$, dove $f(-1/2, 0) = -1/4$, mentre il massimo assoluto viene assunto in $(-1, 3)$, dove $f(-1, 3) = 33$.
Esercizio 3 (8 punti)

Si calcoli l'integrale triplo $\int_\Omega f(x,y,z)dxdydz$, dove $f(x,y,x) = \sin(z)$ e Ω è la piramide di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

Soluzione:

Calcoliamo l'integrale $\int\int\int_\Omega \sin(z)dzdydz$ integrando per strati:

$$\int\int\int_\Omega \sin(z)dzdydz = \int_0^1 \sin(z)\left(\int_{D(z)} dxdy\right)dz = \int_0^1 \sin(z)A\left(D(z)\right)dz$$

dove $D(z)$ è la l'intersezione della piramide Ω con il piano orizzontale a quota z e $A\left(D(z)\right)$ è la sua area. Con semplici considerazioni geometriche si verifica che $D(z)$ è un triangolo rettangolo isoscele di lato $(1-z)$, quindi $A\left(D(z)\right) = (1-z)^2/2$. Concludendo:

$$\int\int\int_\Omega \sin(z)dzdydz = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(z)(1-z)^2dz = -\frac{1}{2} + \cos(1)$$

Esercizio 4 (7 punti)

Un'urna contiene 13 palline, numerate da 1 a 13. Estraendo a caso 5 palline, qual è la probabilità che

1. i numeri estratti siano tutti pari
2. le palline estratte siano la 1, la 3, la 4, la 7 e la 8 (estratte in un ordine qualsiasi).

Soluzione:

1. $$P = \frac{6}{13}\frac{5}{12}\frac{4}{11}\frac{3}{10}\frac{2}{9}$$
2. $$P = \frac{1}{\frac{13!}{(13-5)!5!}} = \frac{5!8!}{13!}$$