

Esercizi su curve e integrali di linea

1. Si forniscano almeno due parametrizzazioni per la semicirconferenza

$$\gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4, y \leq 0\}$$

Soluzione: 2 possibili parametrizzazioni per la curva γ sono:

$$\alpha_1(t) = (2 \cos t, 2 \sin t), \quad t \in [\pi, 2\pi]$$

$$\alpha_2(t) = (t, -\sqrt{4 - t^2}), \quad t \in [-2, 2]$$

2. Si forniscano almeno due parametrizzazioni per la semicirconferenza

$$\gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 1, x \geq 1\}$$

Soluzione: 2 possibili parametrizzazioni per la curva γ sono:

$$\alpha_1(t) = (1 + \cos t, 3 + \sin t), \quad t \in [-\pi/2, \pi/2]$$

$$\alpha_2(t) = (1 + \sqrt{1 - (t - 3)^2}, t), \quad t \in [2, 4]$$

3. Si fornisca una parametrizzazione per le seguenti curve:

(a) l'ellisse $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\}$

Soluzione: $\alpha(t) = (3 \cos t, 2 \sin t), t \in [0, 2\pi]$.

(b) $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, x \geq 0\}$

Soluzione: $\alpha(t) = (3 \cos t, 2 \sin t), t \in [-\pi/2, \pi/2]$.

(c) $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq x\}$

Soluzione: $\alpha(t) = (\cos t, \sin t), t \in [\pi/4, 5\pi/4]$.

(d) la retta in \mathbb{R}^3 intersezione dei piani $z = 2x + y$ e $z = -x + 3y$

Soluzione: $\alpha(t) = (t, 3t/2, 7t/2), t \in \mathbb{R}$.

(e) la curva in \mathbb{R}^3 intersezione del piano $x + y + z = 0$ con la superficie $x^2 + y = 0$

Soluzione: $\alpha(t) = (t, -t^2, +t^2 - t), t \in \mathbb{R}$.

(f) la curva in \mathbb{R}^3 intersezione del piano $z = 1$ con la superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

Soluzione: $\alpha(t) = (\sqrt{3} \cos t, \sqrt{3} \sin t, 1), t \in [0, 2\pi]$.

(g) la curva in \mathbb{R}^3 intersezione del piano $x + z = 0$ con la superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Soluzione: $\alpha(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \sin t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t), t \in [0, 2\pi]$.

4. Si calcoli la lunghezza della curva piana, grafico della funzione $y = \cosh(x)$, con $x \in [0, 5]$.
 $l = \sinh 5$.

5. Si calcoli la lunghezza della curva γ , parametrizzata da:

$$\alpha(t) = (t, t^2/3, 2t^3/27) \quad t \in [0, 3]$$

Soluzione: applicando la formula $L(\gamma) = \int_0^3 \|\alpha'(t)\| dt$ otteniamo:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^3 \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^3 \|(1, 2t/3, 2t^2/9)\| dt \\ &= \int_0^3 \sqrt{1 + 4t^2/9 + 4t^4/81} dt = \int_0^3 (1 + 2t^2/9) dt = 5 \end{aligned}$$

6. Si calcoli la lunghezza della curva γ , parametrizzata da:

$$\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Soluzione: applicando la formula $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt$ otteniamo:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \|(-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} 3|\sin t \cos t| dt = 6 \end{aligned}$$

Tale curva è detta *astroide* (si veda la figura).

7. Si calcoli la lunghezza della curva espressa in coordinate polari da

$$\alpha(\theta) = (e^\theta \cos \theta, e^\theta \sin \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Soluzione: applicando la formula $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta$, con $\rho(\theta) = e^\theta$ otteniamo:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2e^{2\theta}} d\theta \\ &= \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1) \end{aligned}$$

8. Si calcoli la lunghezza della curva espressa in coordinate polari da

$$\alpha(\theta) = ((1 + \cos \theta) \cos \theta, (1 + \cos \theta) \sin \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Soluzione: applicando la formula $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta$, con $\rho(\theta) = (1 + \cos \theta)$ otteniamo:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + (-\sin \theta)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2 \cos \theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \left| \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right| d\theta = 8 \end{aligned}$$

Tale curva è detta *cardioide* (si veda la figura)

9. Si calcoli l'integrale di linea $\int_{\gamma} f ds$, dove γ è la curva parametrizzata da

$$\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, t) \quad t \in [0, \sqrt{2}/2]$$

e $f(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Soluzione:

$$\int_{\gamma} f ds = \int_0^{\sqrt{2}/2} e^{2t} \sqrt{2e^{2t} + 1} dt = \frac{1}{6} \left((1 + 2e^{\sqrt{2}})^{3/2} - 3^{3/2} \right)$$

10. Si calcoli l'integrale di linea $\int_{\gamma} f ds$, dove γ è la curva parametrizzata da

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{t^2}{2}, t, \frac{1}{2} + \frac{t^2}{2} \right) \quad t \in [0, \sqrt{2}/2]$$

e $f(x, y, z) = (2y^2 + 1)^{-3/2}$

Soluzione:

$$\int_{\gamma} f ds = \int_0^{\sqrt{2}/2} (2t^2 + 1)^{-3/2} (2t^2 + 1)^{1/2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(t\sqrt{2}) \Big|_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$$

11. Si calcolino le coordinate del baricentro della curva (cardioide) descritta da:

$$\alpha(\theta) = ((1 + \cos \theta) \cos \theta, (1 + \cos \theta) \sin \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

nell'ipotesi che la densità lineare di massa sia costante.

Soluzione: Se indichiamo con ρ la densità lineare di massa abbiamo

$$M = \rho \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2 \cos \theta} d\theta = \rho \int_0^{2\pi} 2 \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} d\theta = 2\rho \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta = 8\rho$$

$$\begin{aligned}
y_G &= \frac{1}{8\rho} \int_0^{2\pi} \rho(1 + \cos \theta) \sin \theta \sqrt{2 + 2 \cos \theta} d\theta \\
&= \frac{1}{8} \int_0^\pi (1 + \cos \theta) \sin \theta \sqrt{2 + 2 \cos \theta} d\theta + \frac{1}{8} \int_\pi^{2\pi} (1 + \cos \theta) \sin \theta \sqrt{2 + 2 \cos \theta} d\theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{8\rho} \int_0^{2\pi} \rho(1 + \cos \theta) \cos \theta \sqrt{2 + 2 \cos \theta} d\theta \\
&= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta + \cos \theta) \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos^2 2\beta + \cos 2\beta) |\cos \beta| d\beta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\cos^2 2\beta + \cos 2\beta) \cos \beta d\beta - \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^\pi (\cos^2 2\beta + \cos 2\beta) \cos \beta d\beta \\
&= \frac{14}{25} - \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{5} \right) = \frac{4}{5}, \tag{1}
\end{aligned}$$

12. Si calcoli l'integrale di linea (di seconda specie) $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, dove \mathbf{F} è il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z, -y, 2x)$$

e γ è la curva parametrizzata da

$$\alpha(t) = (t, t^2, t^3) \quad t \in [0, 1]$$

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 5/4.$$

13. Si calcoli l'integrale di linea (di seconda specie) $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, dove \mathbf{F} è il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$$

e γ è l'arco di spirale parametrizzato da

$$\alpha(\theta) = (\theta \cos \theta, \theta \sin \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 8\pi^3/3,$$

14. Si calcoli l'integrale di linea (di seconda specie) $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, dove \mathbf{F} è il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2y^2, x^3y)$$

e γ è il perimetro del quadrato di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 1/6.$$

15. Si calcoli, punto per punto, la curvatura dell'ellisse di semiassi 2 e 5, parametrizzata da

$$\alpha(\theta) = (2 \cos \theta, 5 \sin \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$k(\theta) = \frac{10}{(\sqrt{4 \sin^2 \theta + 25 \cos^2 \theta})^3}$$

16. Si calcolino versore tangente, versore normale e curvatura in ogni punto della curva γ parametrizzata da

$$\alpha(t) = (t + \cos t, t - \cos t, \sqrt{2} \sin t)$$

Soluzione:

$$T(t) = \frac{1}{2}(1 - \sin t, 1 + \sin t, \sqrt{2} \cos t),$$

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t, \cos t, -\sqrt{2} \sin t),$$

$$k(t) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

17. Si calcolino versore tangente, versore normale e curvatura della curva γ parametrizzata da

$$\alpha(t) = ((2 + \cos t) \sin t, (2 + \cos t) \cos t, \sin t)$$

nel punto corrispondente al valore di $t = \pi/2$. Si determinino inoltre centro e raggio del cerchio osculatore in quel punto.

Soluzione: Conviene utilizzare le formule

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|},$$

$$N(t) = B(t) \wedge T(t), \quad B(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|},$$

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

Otteniamo quindi $\mathbf{T}(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, -2, 0)$, $\mathbf{N}(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{205}}(-12, 6, -5)$, $\mathbf{B}(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{41}}(2, -1, -6)$, $k(\pi/2) = \frac{\sqrt{41}}{5\sqrt{5}}$. Il raggio del cerchio osculatore è $\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{41}}$, mentre le coordinate del centro sono

$$(x_C, y_C, z_C) = (2, 0, 1) + \frac{5}{41}(-12, 6, -5)$$

18. Si calcolino versore tangente, versore normale e curvatura in ogni punto dell'arco di spirale di Archimede, parametrizzato da:

$$\alpha(\theta) = (\theta \cos \theta, \theta \sin \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Soluzione:

$$T(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}(\cos \theta - \theta \sin \theta, \sin \theta + \theta \cos \theta),$$

$$N(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}(-\sin \theta - \theta \cos \theta, \cos \theta - \theta \sin \theta)$$

$$k(\theta) = \frac{2 + \theta^2}{(1 + \theta^2)^{3/2}}$$

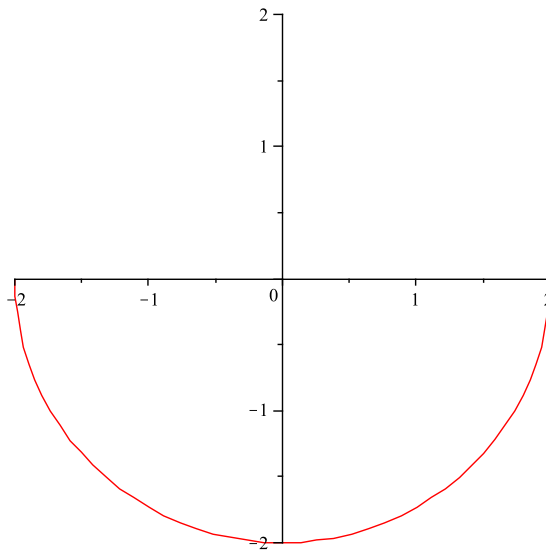
19. Si calcolino versore tangente, versore normale e curvatura in ogni punto della curva grafico della funzione $y = \cosh x$.

Soluzione: Parametrizzando la curva con $\alpha(t) = (t, \cosh t)$, abbiamo:

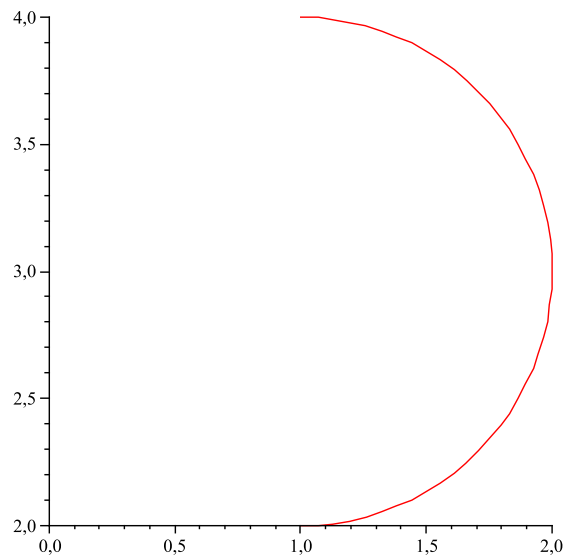
$$T(t) = \left(\frac{1}{\cosh t}, \frac{\sinh t}{\cosh t} \right)$$

$$N(t) = \left(-\frac{\sinh t}{\cosh t}, \frac{1}{\cosh t} \right)$$

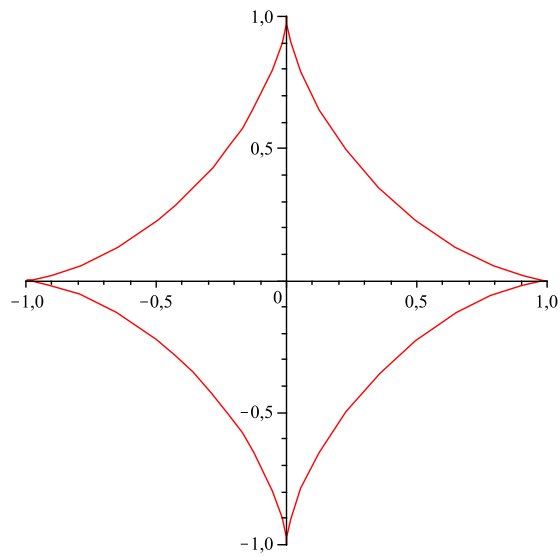
$$k(t) = \frac{1}{(\cosh t)^2}$$



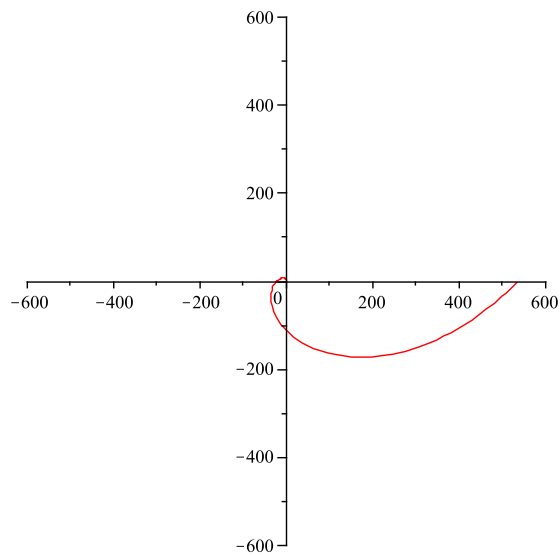
es 1: la semicirconferenza $\gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4, y \leq 0\}$



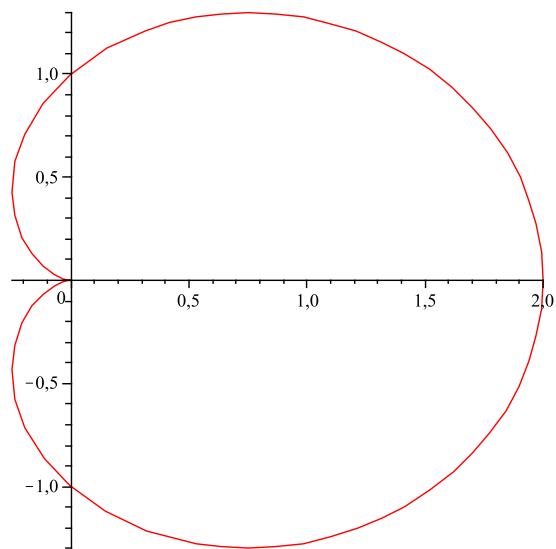
es 2: la semicirconferenza $\gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 1, x \geq 1\}$



es 4: l'astroide $\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ $t \in [0, 2\pi]$



es 5: la curva parametrizzata da $\alpha(\theta) = (e^\theta \cos \theta, e^\theta \sin \theta)$ $\theta \in [0, 2\pi]$



es 6: la cardioide $\alpha(\theta) = ((1 + \cos \theta) \cos \theta, (1 + \cos \theta) \sin \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$