Esercizi su curve e integrali di linea

1. Si forniscano almeno due parametrizzazioni per la semicirconferenza

$$\gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|, x^2 + y^2 = 4, y \leq 0\}$$

Soluzione: 2 possibili parametrizzazioni per la curva γ sono:

$$\alpha_1(t) = (2\cos t, 2\sin t), \qquad t \in [\pi, 2\pi]$$

$$\alpha_2(t) = (t, -\sqrt{4 - t^2}), \qquad t \in [-2, 2]$$

2. Si forniscano almeno due parametrizzazioni per la semicirconferenza

$$\gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|, (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 1, x \geq 1\}$$

Soluzione: 2 possibili parametrizzazioni per la curva γ sono:

$$\alpha_1(t) = (1 + \cos t, 3 + \sin t), \qquad t \in [-\pi/2, \pi/2]$$

$$\alpha_2(t) = (1 + \sqrt{1 - (t - 3)^2}, t), \qquad t \in [2, 4]$$

3. Si fornisca una parametrizzazione per le seguenti curve:

   (a) l'ellisse $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\}$
   Soluzione: $\alpha(t) = (3\cos t, 2\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

   (b) $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, x \geq 0\}$
   Soluzione: $\alpha(t) = (3\cos t, 2\sin t)$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$.

   (c) $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1, y \geq x\}$
   Soluzione: $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [\pi/4, 5\pi/4]$.

   (d) la retta in $\mathbb{R}^3$ intersezione dei piani $z = 2x + y$ e $z = -x + 3y$
   Soluzione: $\alpha(t) = (t, 3t/2, 7t/2)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (e) la curva in $\mathbb{R}^3$ intersezione del piano $x + y + z = 0$ con la superficie $x^2 + y = 0$
   Soluzione: $\alpha(t) = (t, -t^2, +t^2 - t)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (f) la curva in $\mathbb{R}^3$ intersezione del piano $z = 1$ con la superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
   Soluzione: $\alpha(t) = (\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\sin t, 1)$, $t \in [0, 2\pi]$.

   (g) la curva in $\mathbb{R}^3$ intersezione del piano $x + z = 0$ con la superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
   Soluzione: $\alpha(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \sin t, -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

4. Si calcoli la lunghezza della curva piana, grafico della funzione $y = \cosh(x)$, con $x \in [0, 5]$.
$l = \sinh 5$.

5. Si calcoli la lunghezza della curva γ, parametrizzata da:

$$\alpha(t) = (t, t^2/3, 2t^3/27) \qquad t \in [0, 3]$$

Soluzione: applicando la formula $L(\gamma) = \int_0^3 \|\alpha'(t)\| dt$ otteniamo:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^3 \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^3 \|(1, 2t/3, 2t^2/9)\| dt \\ &= \int_0^3 \sqrt{1 + 4t^2/9 + 4t^4/81} dt = \int_0^3 (1 + 2t^2/9) dt = 5 \end{aligned}$$

6. Si calcoli la lunghezza della curva γ, parametrizzata da:

$$\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Soluzione: applicando la formula $L(\gamma) = \int_0^3 \|\alpha'(t)\| dt$ otteniamo:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \|(-3\cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} 3|\sin t \cos t| dt = 6 \end{aligned}$$

Tale curva è detta *astroide* (si veda la figura).

7. Si calcoli la lunghezza della curva espressa in coordinate polari da

$$\alpha(\theta) = (e^\theta \cos\theta, e^\theta \sin\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Soluzione: applicando la formula $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta$, con $\rho(\theta) = e^\theta$ otteniamo:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2e^{2\theta}} d\theta \\ &= \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1) \end{aligned}$$

8. Si calcoli la lunghezza della curva espressa in coordinate polari da

$$\alpha(\theta) = ((1+\cos\theta)\cos\theta, (1+\cos\theta)\sin\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Soluzione: applicando la formula $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta$, con $\rho(\theta) = (1+\cos\theta)$ otteniamo:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\cos\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| d\theta = 8 \end{aligned}$$

Tale curva è detta *cardioide* (si veda la figura)

9. Si calcoli l'integrale di linea $\int_\gamma f ds$, dove γ è la curva parametrizzata da

$$\alpha(t) = \left(e^t \cos t, e^t \sin t, t\right) \qquad t \in [0, \sqrt{2}/2]$$

e $f(x,y,z) = x^2 + y^2$.
Soluzione:

$$\int_\gamma f ds = \int_0^{\sqrt{2}/2} e^{2t}\sqrt{2e^{2t}+1} dt = \frac{1}{6}\left((1+2e^{\sqrt{2}})^{3/2} - 3^{3/2}\right)$$

10. Si calcoli l'integrale di linea $\int_\gamma f ds$, dove γ è la curva parametrizzata da

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{t^2}{2}, t, \frac{1}{2} + \frac{t^2}{2}\right) \qquad t \in [0, \sqrt{2}/2]$$

e $f(x,y,z) = (2y^2+1)^{-3/2}$
Soluzione:

$$\int_\gamma f ds = \int_0^{\sqrt{2}/2} (2t^2+1)^{-3/2}(2t^2+1)^{1/2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(t\sqrt{2})\Big|_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$$

11. Si calcolino le coordinate del baricentro della curva (cardioide) descritta da:

$$\alpha(\theta) = ((1+\cos\theta)\cos\theta, (1+\cos\theta)\sin\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

nell'ipotesi che la densità lineare di massa sia costante.
Soluzione: Se indichiamo con ρ la densità lineare di massa abbiamo

$$M = \rho\int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\cos\theta} d\theta = \rho\int_0^{2\pi} 2\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} d\theta = 2\rho\int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta = 8\rho$$

$$
\begin{aligned}
y_G &= \frac{1}{8\rho}\int_0^{2\pi} \rho(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{2+2\cos\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{2+2\cos\theta}d\theta + \frac{1}{8}\int_{\pi}^{2\pi}(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{2+2\cos\theta}d\theta \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{8\rho}\int_0^{2\pi} \rho(1+\cos\theta)\cos\theta\sqrt{2+2\cos\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta+\cos\theta)\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos^2 2\beta+\cos 2\beta)\left|\cos\beta\right|d\beta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(\cos^2 2\beta+\cos 2\beta)\cos\beta d\beta - \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}(\cos^2 2\beta+\cos 2\beta)\cos\beta d\beta \\
&= \frac{1}{2}\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{5}, \qquad (1)
\end{aligned}
$$

12. Si calcoli, punto per punto, la curvatura dell'ellisse di semiassi 2 e 5, parametrizzata da
$$\alpha(\theta) = (2\cos\theta, 5\sin\theta) \qquad \theta\in[0,2\pi]$$
.
$k(\theta) = \frac{10}{\left(\sqrt{4\sin^2\theta+25\cos^2\theta}\right)^3}$

13. Si calcolino versore tangente, versore normale e curvatura in ogni punto della curva γ parametrizzata da
$$\alpha(t) = (t+\cos t, t-\cos t, \sqrt{2}\sin t)$$
Soluzione:
$$T(t) = \frac{1}{2}(1-\sin t, 1+\sin t, \sqrt{2}\cos t),$$
$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t, \cos t, -\sqrt{2}\sin t),$$
$$k(t) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

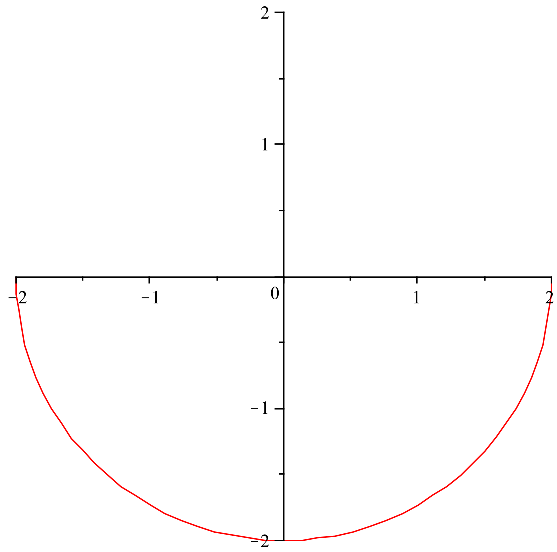
14. Si calcolino versore tangente, versore normale e curvatura della curva γ parametrizzata da
$$\alpha(t) = ((2+\cos t)\sin t, (2+\cos t)\cos t, \sin t)$$
nel punto corrispondente al valore di $t = \pi/2$. Si determinino inoltre centro e raggio del cerchio osculatore in quel punto.
Soluzione: Conviene utilizzare le formule
$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|},$$
$$N(t) = B(t) \wedge T(t), \qquad B(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|},$$
$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$
Otteniamo quindi $\mathbf{T}(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,-2,0)$, $\mathbf{N}(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{205}}(-12,6,-5)$, $\mathbf{B}(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{41}}(2,-1,-6)$, $k(\pi/2) = \frac{\sqrt{41}}{5\sqrt{5}}$. Il raggio del cerchio osculatore è $\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{41}}$, mentre le coordinate del centro sono
$$(x_C, y_C, z_C) = (2,0,1) + \frac{5}{41}(-12,6,-5)$$

15. Si calcolino versore tangente, versore normale e curvatura in ogni punto dell'arco di spirale di Archimede, parametrizzato da:
$$\alpha(\theta) = (\theta\cos\theta, \theta\sin\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$
Soluzione:
$$T(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}(\cos\theta - \theta\sin\theta, \sin\theta + \theta\cos\theta),$$
$$N(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}(-\sin\theta - \theta\cos\theta, \cos\theta - \theta\sin\theta)$$
$$k(\theta) = \frac{2+\theta^2}{(1+\theta^2)^{3/2}}$$

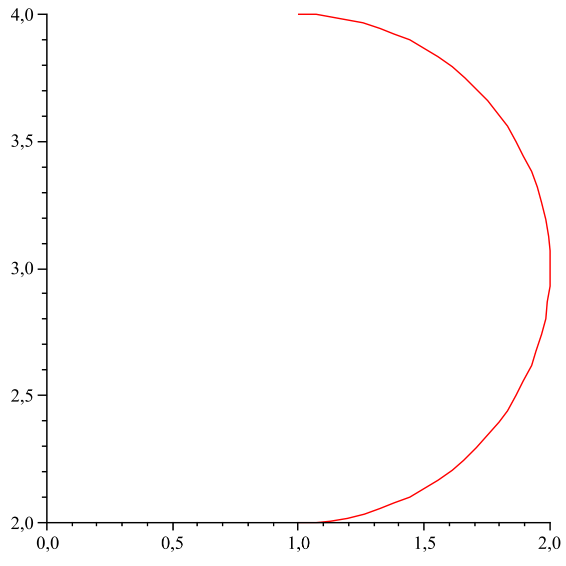
16. Si calcolino versore tangente, versore normale e curvatura in ogni punto della curva grafico della funzione $y = \cosh x$.
Soluzione: Parametrizzando la curva con $\alpha(t) = (t, \cosh t)$, abbiamo:
$$T(t) = \left(\frac{1}{\cosh t}, \frac{\sinh t}{\cosh t}\right)$$

$$N(t) = \left(-\frac{\sinh t}{\cosh t}, \frac{1}{\cosh t}\right)$$

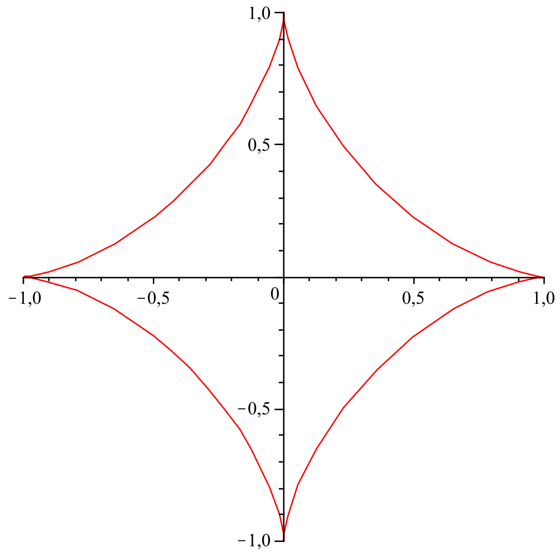
$$k(t) = \frac{1}{(\cosh t)^2}$$



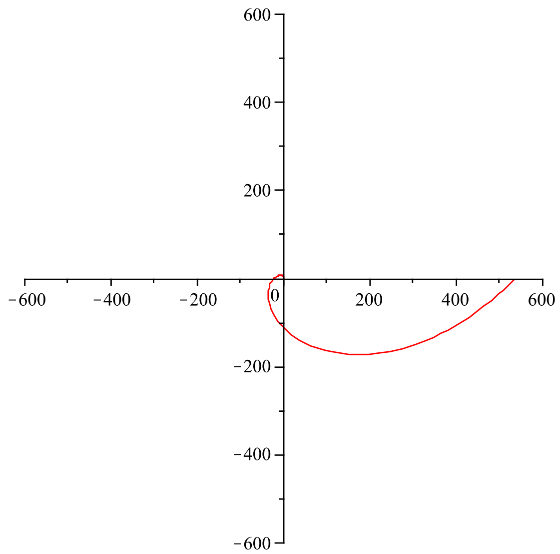
es 1: la semicirconferenza $\gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|, x^2 + y^2 = 4, y \leq 0\}$



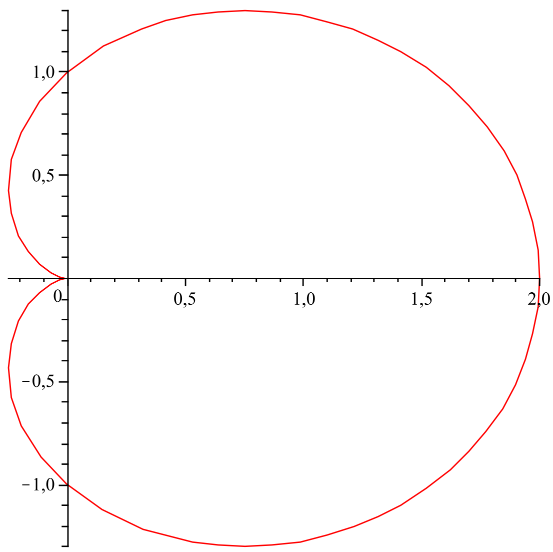
es 2: la semicirconferenza $\gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|, (x-1)^2 + (y-3)^2 = 1, x \geq 1\}$



es 4: l'astroide $\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t) \qquad t \in [0, 2\pi]$



es 5: la curva parametrizzata da $\alpha(\theta) = (e^\theta \cos\theta, e^\theta \sin\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$



es 6: la cardioide $\alpha(\theta) = ((1 + \cos\theta)\cos\theta, (1 + \cos\theta)\sin\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$