Soluzioni provetta dicembre 2014

Esercizio 1 (7 punti) Si calcoli il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (y^2, z^2, x^2)$ attraverso la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \leq 1/2\}$, orientata in modo tale che il versore normale soddisfi la diseguaglianza $\hat{n}(x, y, z) \cdot (x, y, z) > 0$.
Soluzione:

ndichiamo con $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ l'insieme

$$\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 1/2\}$$

Utilizzando il teorema della divergenza abbiamo che

$$\int\int\int_\Omega \mathrm{div} F \, dxdydz = \int\int_{\partial\Omega} F \cdot \hat{n}_e dS$$

dove la frontiera $\partial\Omega$ di Ω è composta dall'unione della superficie Σ e dal cechio $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x = 1/2, y^2 + z^2 \leq 3/4\}$. Abbiamo dunque

$$\begin{aligned}
\int\int\int_\Omega \mathrm{div} F \, dxdydz &= \int\int_{\partial\Omega} F \cdot \hat{n}_e dS \\
\int\int\int_\Omega \mathrm{div} F \, dxdydz &= \int\int_\Sigma F \cdot \hat{n}_e dS + \int\int_C F \cdot \hat{n}_e dS \\
0 &= \int\int_\Sigma F \cdot \hat{n}_e dS + \int\int_C (y^2, z^2, x^2) \cdot (1, 0, 0) dS
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int\int_\Sigma F \cdot \hat{n}_e dS &= -\int\int_C (y^2, z^2, x^2) \cdot \hat{(}1, 0, 0) dS \\
&= -\int\int_C y^2 dS = -\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}2} \rho^2 \sin^2\theta \rho d\rho d\theta = -\frac{9}{64}\pi
\end{aligned}$$

Esercizio 2 (8 punti)
Si consideri la curva γ intersezione fra la superficie cilindrica di equazione $x^2 + y^2 = 2$ ed il piano di equazione $x + y + z = 0$.

1. Si fornisca una parametrizzazione di γ.
2. Si calcoli la circuitazione del campo vettoriale $F(x, y, z) = (y, z, x)$ lungo γ utilizzando la parametrizzazione ricavata al punto 1
3. Riguardando γ come bordo della superficie Σ intersezione del cilindro $x^2 + y^2 \leq 2$ e del piano di equazione $x + y + z = 0$, si calcoli il flusso del campo rot (F) su Σ e si verifichi la validità del teorema del rotore.

Soluzione:

1. la curva γ può essere parametrizzata tramite la mappa $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3$ definita da

$$\alpha(\theta) = (\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta, -\sqrt{2}\cos\theta - \sqrt{2}\sin\theta)$$

2. La circuitazione del campo vettoriale $F(x,y,z) = (y,z,x)$ lungo γ è data da

$$\begin{aligned}
\oint F \cdot dr &= \int_0^{2\pi} F(\alpha(\theta)) \cdot \alpha'(\theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\sqrt{2}\sin\theta, -\sqrt{2}\cos\theta - \sqrt{2}\sin\theta, \sqrt{2}\cos\theta) \cdot (-\sqrt{2}\sin\theta, \sqrt{2}\cos\theta, -\sqrt{2}\cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (-2 - 2\cos^2\theta) d\theta = -6\pi
\end{aligned}$$

3. Il campo $\operatorname{rot}(F)$ è dato da $\operatorname{rot} F = (-1,-1,-1)$. La superficie Σ intersezione del cilindro $x^2+y^2 \le 2$ e del piano di equazione $x+y+z=0$ può essere parametrizzata tramite $r : D \to \mathbf{R}^3$; con $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 \le 2\}$ e

$$r(x,y) = (x, y, -x-y), \qquad (x,y) \in D.$$

Abbiamo

$$N(x,y) = \frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial r}{\partial y} = (1,1,1)$$

Utilizzando il teorema del rotore abbiamo

$$\begin{aligned}
\oint F \cdot dr &= \int\int_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot n dS \\
&= \int\int_D (-1,-1,-1) \cdot (1,1,1) dxdy = -6\pi
\end{aligned}$$

Esercizio 3 (7 punti)

Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ il campo vettoriale $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$

$$F(x,y,z) = (\cos(zy), -zx\sin(zy) - 2z, 2ze^{z^2} - \alpha y - xy\sin(zy))$$

è conservativo. Per tale valore di α, calcolare un potenziale U e il lavoro di F lungo la curva γ di parametrizzazione

$$\alpha(t) = (t\cos t, t\sin t, t^2), \qquad t \in [0,\pi].$$

Soluzione:

Il campo F è di classe C^1 su $\mathbf{R}^3$, che è un insieme semplicemente connesso, quindi affinchè F sia conservativo, è necessario e sufficiente che $\operatorname{rot} F = (0,0,0)$. Imponendo che

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} F_y &= \frac{\partial}{\partial y} F_x \\
\frac{\partial}{\partial x} F_z &= \frac{\partial}{\partial z} F_x \\
\frac{\partial}{\partial z} F_y &= \frac{\partial}{\partial y} F_z
\end{aligned}$$

otteniamo $\alpha = 2$. Il campo F diviene

$$F(x,y,z) = (\cos(zy), -zx\sin(zy) - 2z, 2ze^{z^2} - 2y - xy\sin(zy))$$

Il potenziale associato è

$$U(x,y,z) = x\cos(zy) - 2zy + e^{z^2}$$

Per calcolare il lavoro di F lungo la curva γ utilizziamo la formula

$$\int_\gamma F \cdot dr = U(\alpha(\pi) - U(\alpha(0)) = U(-\pi, 0, \pi^2) - U(0,0,0) = e^{\pi^4} - \pi - 1$$

Esercizio 4 (8 punti)
Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ di periodo $T = 2\pi$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \in [-\pi, 0) \\ e^{-x} & \text{per } x \in [0, \pi) \end{cases}$$

Calcolare inoltre la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-e^{-\pi}(-1)^n}{n^2+1}$.
Soluzione:

$$a_0 = \frac{1-e^{-\pi}}{\pi}, \quad a_n = \frac{1-e^{-\pi}(-1)^n}{\pi(n^2+1)}, \quad b_n = n^2 a_n$$

Abbiamo che

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

in $x = 0$ si ottiene

$$\frac{1}{2} = \frac{1-e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-e^{-\pi}(-1)^n}{\pi(n^2+1)}$$

e quindi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-e^{-\pi}(-1)^n}{n^2+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{1-e^{-\pi}}{2}$.