**Esercizi sulle funzioni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$**

**Soluzioni**

1. Disegnare il grafico della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, nei casi:

   (a) $f(x, y) = x$.
   La funzione dipende solo dalla coordinata $x$. In questo caso il grafico rappresenta un piano (vedi figura).

   (b) $f(x, y) = y^2$.
   La funzione dipende solo dalla coordinata $y$. Le sezioni del grafico con piani verticali paralleli al piano $yz$ sono parabole, mentre le sezioni del grafico con piani verticali paralleli al piano $xz$ sono rette orizzontali (vedi figura)

   (c) $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$
   In questo caso il grafico rappresenta un paraboloide passante per $(0, 0, 4)$ con concavità rivolta verso il basso (vedi figura).

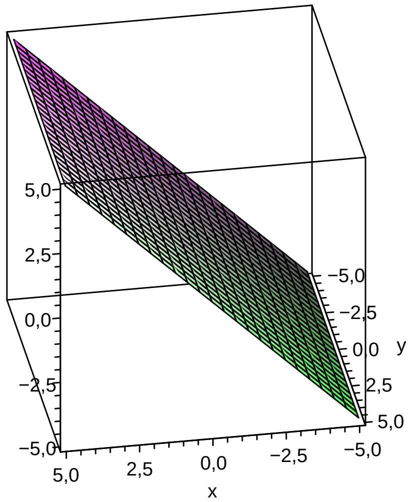
2. Descrivere le curve di livello della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, nei casi:

   (a) $f(x, y) = x - y$.
   L'equazione $x - y = c$, ovvero $y = x - c$ definisce delle rette parallele alla bisetrice del primo e terzo quadrante (vedi figura)

   (b) $f(x, y) = xy$.
   Per $c = 0$, l'equazione $xy = 0$ definisce le due rette $x = 0$ e $y = 0$, ovvero i due assi coordinati. Se $c > 0$ l'equazione $xy = c$, ovvero $y = c/x$, definisce due rami di iperbole nel primo e nel terzo quadrante, mentre se $c < 0$ l'equazione $xy = c$, ovvero $y = c/x$, definisce due rami di iperbole nel secondo e nel quarto quadrante (vedi figura)

   (c) $f(x, y) = \sin(x)$.
   Per $-1 \leq c \leq 1$ l'equazione $\sin(x) = c$ ha come soluzioni $x = \arcsin(c) + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, che rappresenta un insieme di rette parallele all'asse delle $y$ (vedi figura).

   (d) $f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$.
   Per $c = 1$, l'equazione $\sin(x)\sin(y) = 1$ ha come soluzione l'insieme dei punti del piano della forma $(\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2h\pi)$, e della forma $-\pi/2 + 2k\pi, -\pi/2 + 2h\pi)$ con $k, h \in \mathbb{Z}$.
   Per $c = 0$, l'equazione $\sin(x)\sin(y) = 0$ ha come soluzione $\sin(x) = 0$ oppure $\sin(y) = 0$, che rappresentano rispettivamente nel piano $xy$ le rette




es 1(a): il grafico della funzione $f(x, y) = x$

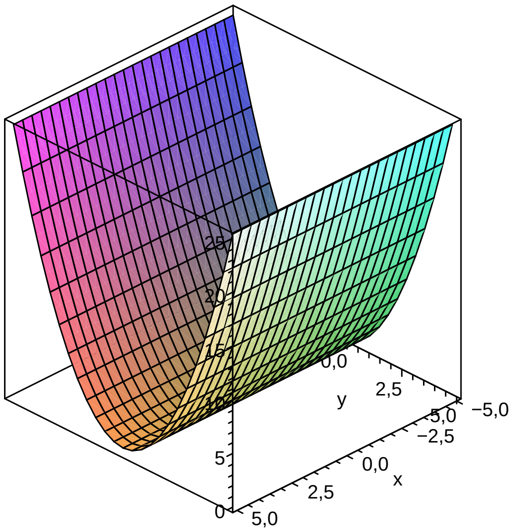
$x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ (parallele all'asse delle $y$) e le rette $y = h\pi$, con $h \in \mathbb{Z}$, (parallele all'asse delle $x$).
Per $0 < c < 1$ oppure $-1 < c < 0$ l'equazione $\sin(x)\sin(y) = c$ rappresenta una famiglia di curve chiuse che si ripetono con periodicità di $(2\pi, 2\pi)$ nel piano $xy$ (vedi figura).

(e) $f(x, y) = \frac{x-y}{2x+y}$, dove $f$ è definita in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2x + y \neq 0\}$.
Per $c \neq -1$ l'equazione $\frac{x-y}{2x+y} = c$ definisce nel piano $xy$ la curva $y = \frac{1-2c}{1+c}x$, ovvero una retta passante per l'origine e di coefficiente angolare $\frac{1-2c}{1+c}$. Per $c = -1$ l'equazione $\frac{x-y}{2x+y} = c$ definisce nel piano $xy$ la retta $x = 0$ (l'asse delle $y$). Le linee di livello sono quindi rette passanti per l'origine e di inclinazione dipendente dal valore di $c$ (vedi figura).

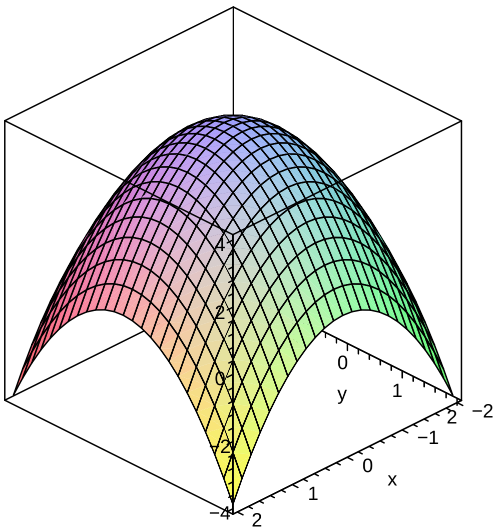
(f) $f(x, y) = \frac{y}{x}e^x$, dove $f$ è definita in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \neq 0\}$.
L'equazione $\frac{y}{x}e^x = c$ definisce, al variare di $c \in \mathbb{R}$, la famiglia di curve della forma $y = cxe^x$ (vedi figura).

3. Per le funzioni che seguono, determinare il gradiente della funzione data nel punto indicato e l'equazione del piano tangente al grafico della funzione nel punto indicato.

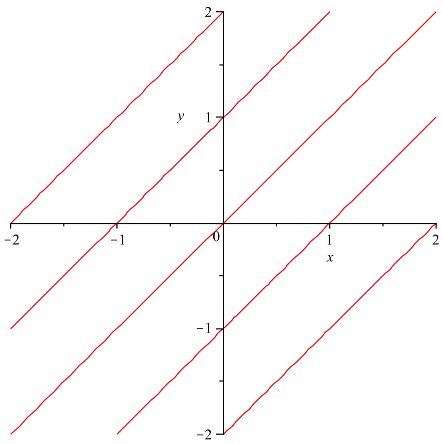
   (a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ in $(2, 2)$.



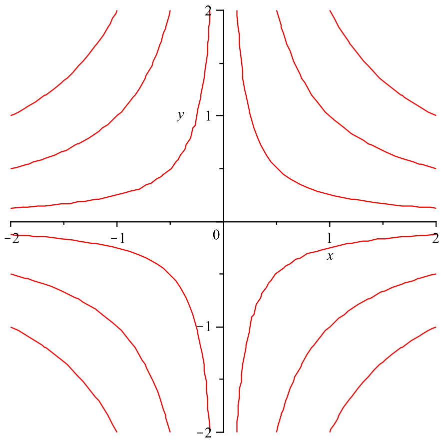

es 1(b): il grafico della funzione $f(x, y) = y^2$



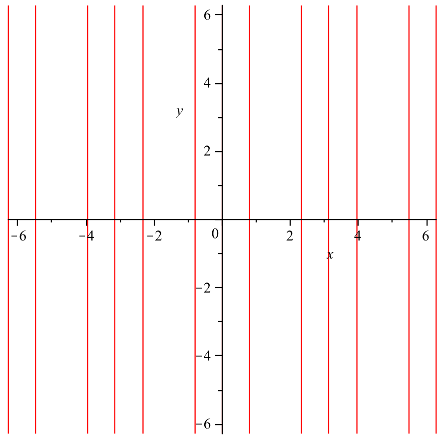

es 1(c): il grafico della funzione $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$



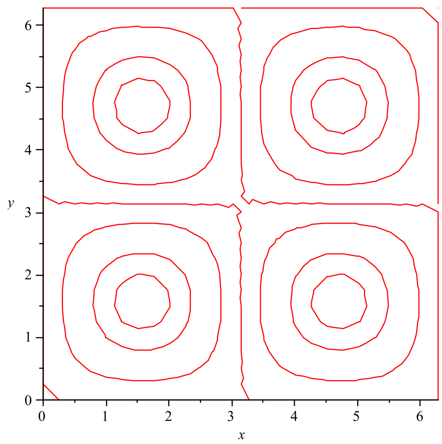

es 2(a): alcune curve di livello della funzione $f(x, y) = x - y$



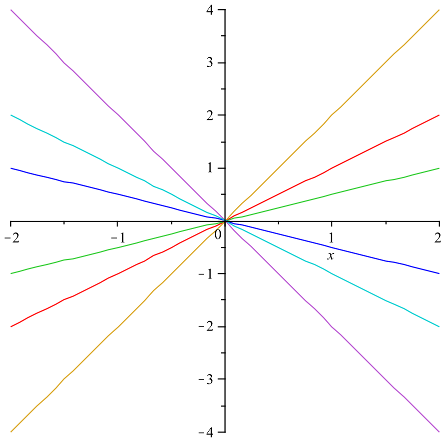

es 2(b): alcune curve di livello della funzione $f(x, y) = xy$



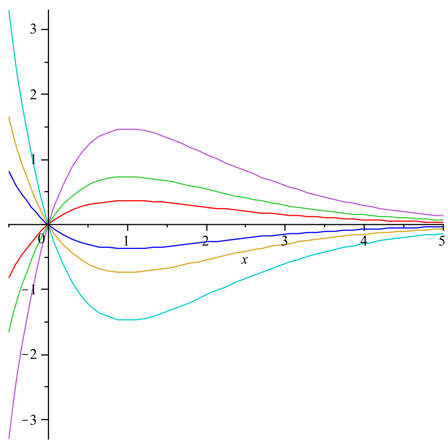

es 2(c): alcune curve di livello della funzione $f(x, y) = \sin(x)$




es 2(d): alcune curve di livello della funzione $f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$




es 2(e): alcune curve di livello della funzione $f(x, y) = \frac{x-y}{2x+y}$




es 2(f): alcune curve di livello della funzione $f(x, y) = \frac{y}{x}e^x$

Il vettore gradiente nel generico punto di coordinate $(x, y)$ è dato da

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$$

Il gradiente nel punto di coordinate $(2, 2)$ è dunque $\nabla f(2, 2) = (6, 6)$. L'equazione del piano tangente al grafico di $f$ in $(2, 2)$ è dunque:

$$z = 4 + 6(x - 2) + 6(y - 2)$$

(b) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ in $(1, 1)$.
Il vettore gradiente nel generico punto di coordinate $(x, y)$ è dato da

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{1}{x+y} - \frac{x-y}{(x+y)^2}, -\frac{1}{x+y} - \frac{x-y}{(x+y)^2} \right)$$

Il gradiente nel punto di coordinate $(1, 1)$ è dunque $\nabla f(1, 1) = (1/2, -1/2)$. L'equazione del piano tangente al grafico di $f$ in $(1, 1)$ è dunque:

$$z = \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{2}(y - 1)$$

(c) $f(x, y) = x^y$ in $(1, 5)$.
Il vettore gradiente nel generico punto di coordinate $(x, y)$ è dato da

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{ye^{y \log(x)}}{x}, \log(x)e^{y \log(x)} \right)$$

Il gradiente nel punto di coordinate $(1, 5)$ è dunque $\nabla f(1, 5) = (5, 0)$. L'equazione del piano tangente al grafico di $f$ in $(1, 1)$ è dunque:

$$z = 1 + 5(x - 1)$$

4. Si consideri il grafico della funzione $f(x, y) = x^2 - 4xy - y^2 + 6x - 4y$.

   (a) Calcolare il punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ in cui il piano tangente è orizzontale.
   Se il piano tangente è orizzontale, ha equazione $z = f(x_0, y_0)$. Dobbiamo cercare quindi il punto $(x_0, y_0)$ in cui

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = 0.$$

   Cerchiamo quindi il punto le cui coordinate $(x_0, y_0)$ sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 2x_0 - 4y_0 + 6 = 0 \\ -4x_0 - 2y_0 - 4 = 0 \end{cases}$$

   e otteniamo $x_0 = -7/5$, $y_0 = 4/5$, e $f(x_0, y_0) = -29/5$.

(b) Calcolare il punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ in cui il piano tangente è ortogonale al vettore $N = (2, -4, -1)$. In vettori normali al piano tangente al grafico della funzione $f$ nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ sono i multipli del vettore $\left(-\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0), -\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0), 1\right)$. Imponiamo quindi che esista una costante $\lambda \in \mathbb{R}$, tale che

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0), -\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0), 1\right) = \lambda(2, -4, -1)$$

Cerchiamo quindi il punto le cui coordinate $(x_0, y_0)$ sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} -2x_0 + 4y_0 - 6 = 2\lambda \\ 4x_0 + 2y_0 + 4 = -4\lambda \\ 1 = -\lambda \end{cases}$$

ottenendo $\lambda = -1$, $x_0 = -2/5$, $y_0 = 4/5$, $f(x_0, y_0) = -117/25$.

5. Determinare la direzione di massima crescita della funzione data nel punto indicato:

(a) $f(x, y) = \log(x^2 + 3y^2)$ in $(2, 1)$
Il vettore gradiente nel generico punto di coordinate $(x, y)$ è dato da:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + 3y^2}, \frac{6y}{x^2 + 3y^2}\right)$$

Il gradiente nel punto di coordinate $(2, 1)$ è dato da

$$\nabla f(2, 1) = \left(\frac{4}{7}, \frac{6}{7}\right),$$

che indica la direzione di massima crescita della funzione a partire dal punto $(2, 1)$.

(b) $f(x, y) = e^{-y^2} \cos(x)$ in $(\pi, 1)$
Il vettore gradiente nel generico punto di coordinate $(x, y)$ è dato da

$$\nabla f(x, y) = (-e^{-y^2} \sin(x), -2ye^{-y^2} \cos(x))$$

Il gradiente nel punto di coordinate $(\pi, 1)$ è dato da

$$\nabla f(\pi, 1) = (0, 2e^{-1})$$

che indica la direzione di massima crescita della funzione a partire dal punto $(\pi, 1)$ .

(c) $f(x, y) = xy$ in $(1, 1)$
Il vettore gradiente nel generico punto di coordinate $(x, y)$ è dato da:

$$\nabla f(x, y) = (y, x)$$

Il gradiente nel punto di coordinate $(1, 1)$ e dato da

$$\nabla f(1, 1) = (1, 1)$$

che indica la direzione di massima crescita della funzione a partire dal punto $(1, 1)$ .

(d) $f(x, y) = \sin(x)\cos(xy)$ in $(\pi/2, 0)$
Il vettore gradiente nel generico punto di coordinate $(x, y)$ è dato da:

$$\nabla f(x, y) = (\cos(x)\cos(xy) - y\sin(x)\sin(xy), -x\sin(x)\sin(xy))$$

Il gradiente nel punto di coordinate $(\pi/2, 0)$ e dato da

$$\nabla f(\pi/2, 0) = (0, 0).$$

Il punto $(\pi/2, 0)$ è un punto in cui il gradiente è il vettore nullo. Dato che $f$ è differenziabile (in quanto di classe $C^1$ si ha anche che per ogni vettore $\mathbf{v}$, la derivata direzionale di $D_{\mathbf{v}}f(0, 0) = 0$.

6. Determinare la derivata direzionale della funzione data nel punto indicato e nella direzione specificata

(a) $f(x, y) = e^{xy}$ in $(1, 1)$ nella direzione del vettore $\mathbf{v} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$ Utilizziamo la formula $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot \mathbf{v}$, dato che $f$ è differenziabile in $(1, 1)$ (è immediato verificare che le derivate parziali sono funzioni continue). Il vettore gradiente nel generico punto di coordinate $(x, y)$ è dato da

$$\nabla f(x, y) = (ye^{xy}, xe^{xy}),$$

quindi il vettore gradiente nel punto di coordinate $(1, 1)$ è $\nabla f(1, 1) = (e, e)$, e la derivata direzionale cercata è

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 1) = (e, e)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}e + \frac{1}{2}e$$

(b) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ in $(1,2)$ nella direzione del vettore $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$
Utilizziamo la formula $\frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot \mathbf{v}$. Il vettore gradiente nel generico punto di coordinate $(x,y)$ è dato da

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}\right),$$

quindi il vettore gradiente nel punto di coordinate $(1,2)$ è $\nabla f(1,2) = (2/5, 4/5)$, e la derivata direzionale cercata è

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = (2/5,4/5)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

(c) $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$ in $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ nella direzione del vettore $\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$
Il vettore gradiente nel generico punto di coordinate $(x,y)$ è dato da

$$\nabla f(x,y) = (2x\cos(x^2+y^2), 2y\cos(x^2+y^2)),$$

quindi il vettore gradiente nel punto di coordinate $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ è

$$\nabla f(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) = (2\sqrt{\pi}, 2\sqrt{\pi}),$$

e la derivata direzionale cercata è

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) = (2\sqrt{\pi}, 2\sqrt{\pi})\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (1-\sqrt{2})\sqrt{\pi}$$

(d) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+2y^2}$ in $(1,1)$ nella direzione del vettore $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$.
Le due derivate parziali nel generico punto di coordinate $(x,y)$ sono:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y}{x^2+2y^2} - \frac{2x^2y}{(x^2+2y^2)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x}{x^2+2y^2} - \frac{4xy^2}{(x^2+2y^2)^2}
\end{aligned}$$

quindi il vettore gradiente nel punto di coordinate $(1,1)$ è $\nabla f(1,1) = (1/9, -1/9)$, e la derivata direzionale cercata è

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = (1/9,-1/9)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{9}$$

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcolare il vettore gradiente di $f$ in $(0,0)$ e la derivata direzionale $D_{\mathbf{v}} f(0,0)$ di $f$ in $(0,0)$ nella direzione del vettore $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$. Come mai la formula $D_{\mathbf{v}} f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \mathbf{v}$ non vale? la funzione $f$ è identicamente nulla sugli assi coordinati, quindi $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, quindi il gradiente di $f$ nel punto $(0,0)$ è il vettore nullo:

$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$

La derivata direzionale di $f$ in $(0,0)$ nella direzione del vettore $v$ è data da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}h, \frac{\sqrt{2}}{2}h\right)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}h}{h} = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Si noti che in questo caso non vale la formula del gradiente, infatti $\nabla f(0,0) \cdot \mathbf{v} = 0$, mentre $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Questo è dovuto al fatto che $f$ non è differenziabile in $(0,0)$, infatti non esiste il limite

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0) \cdot (x-0, y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

8. Si consideri la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x,y) = \sin(xy)$ e la funzione $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = (t^2, \cos(t))$. Si calcoli la derivata della funzione composta $f \circ \alpha$.

La funzione composta $f \circ \alpha$ è data da

$$f \circ \alpha(t) = \sin(t^2 \cos(t))$$

quindi

$$\frac{d}{dt} f \circ \alpha(t) = \cos(t^2 \cos(t)) \left(2t \cos(t) - t^2 \sin(t)\right)$$

Si poteva ottenere lo stesso risultato utilizzando le regola di derivazione delle funzioni composte:

$$\frac{d}{dt} f \circ \alpha(t) = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$$

dove $\nabla f(x,y) = (y\cos(xy), x\cos(xy))$ e quindi $\nabla f(\alpha(t)) = \cos(t^2\cos(t))(\cos(t), t^2)$ e $\alpha'(t) = (2t, -\sin(t)$, quindi:

$$\nabla f(\alpha(t))\cdot\alpha'(t) = \cos(t^2\cos(t))(\cos(t), t^2)\cdot(2t, -\sin(t) = \cos(t^2\cos(t))(2t\cos t - t^2\sin t)$$

9. Utilizzando la formula di derivazione di funzione composta otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}T(x(t), y(t)) &= \frac{d}{dt}T\circ\alpha(t) = \nabla T(x(t), y(t))\cdot(x'(t), y'(t))\\ &= (2x(t), 4y(t))\cdot(x'(t), y'(t))\\ &= (2(2-t^3), 4t)\cdot(-3t^2, 1)\\ &= 6t^5 - 12t^2 + 4t\end{aligned}$$

Potevamo arrivare allo stesso risultato esplicitando la funzione composta e derivandola rispetto alla variabile $t$, infatti:

$$T(x(t), y(t)) = (2-t^3)^2 + 2t^2 = t^6 + 4 - 4t^3 + 2t^2$$

la cui derivata è la funzione

$$\frac{d}{dt}T(x(t), y(t)) = 6t^5 - 12t^2 + 4t$$