Calcolo della lunghezza di curve regolari a tratti

Soluzioni degli esercizi proposti per casa

1. Si forniscano almeno due parametrizzazioni per la semicirconferenza

$$\gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|, x^2 + y^2 = 4, y \leq 0\}$$

Soluzione: 2 possibili parametrizzazioni per la curva γ sono:

$$\alpha_1(t) = (2\cos t, 2\sin t), \qquad t \in [\pi, 2\pi]$$
$$\alpha_2(t) = (t, -\sqrt{4-t^2}), \qquad t \in [-2, 2]$$

2. Si forniscano almeno due parametrizzazioni per la semicirconferenza

$$\gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|, (x-1)^2 + (y-3)^2 = 1, x \geq 1\}$$

Soluzione: 2 possibili parametrizzazioni per la curva γ sono:

$$\alpha_1(t) = (1 + \cos t, 3 + \sin t), \qquad t \in [-\pi/2, \pi/2]$$
$$\alpha_2(t) = (1 + \sqrt{1-(t-3)^2}, t), \qquad t \in [2, 4]$$

3. Si calcoli la lunghezza della curva γ, parametrizzata da:

$$\alpha(t) = (t, t^2/3, 2t^3/27) \qquad t \in [0, 3]$$

Soluzione: applicando la formula $L(\gamma) = \int_0^3 \|\alpha'(t)\| dt$ otteniamo:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^3 \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^3 \|(1, 2t/3, 2t^2/9)\| dt \\ &= \int_0^3 \sqrt{1 + 4t^2/9 + 4t^4/81} dt = \int_0^3 (1 + 2t^2/9) dt = 5 \end{aligned}$$

4. Si calcoli la lunghezza della curva γ, parametrizzata da:

$$\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Soluzione: applicando la formula $L(\gamma) = \int_0^3 \|\alpha'(t)\| dt$ otteniamo:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \|(-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} 3|\sin t \cos t| dt = 6 \end{aligned}$$

Tale curva è detta *astroide* (si veda la figura).

5. Si calcoli la lunghezza della curva espressa in coordinate polari da

$$\alpha(\theta) = (e^{\theta}\cos\theta, e^{\theta}\sin\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Soluzione: applicando la formula $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta$, con $\rho(\theta) = e^{\theta}$ otteniamo:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2e^{2\theta}} d\theta \\ &= \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1) \end{aligned}$$

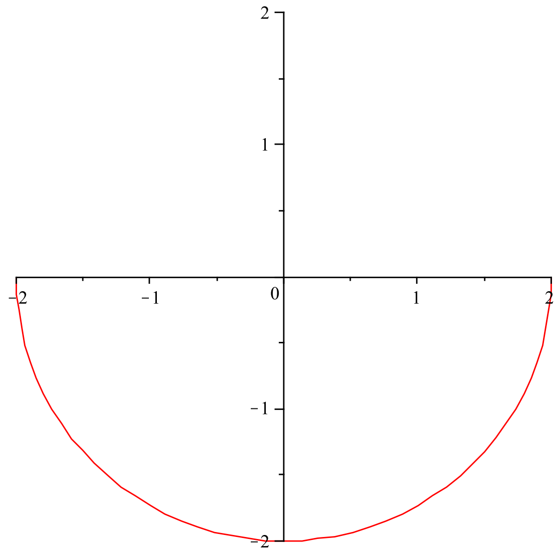
6. Si calcoli la lunghezza della curva espressa in coordinate polari da

$$\alpha(\theta) = ((1+\cos\theta)\cos\theta, (1+\cos\theta)\sin\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

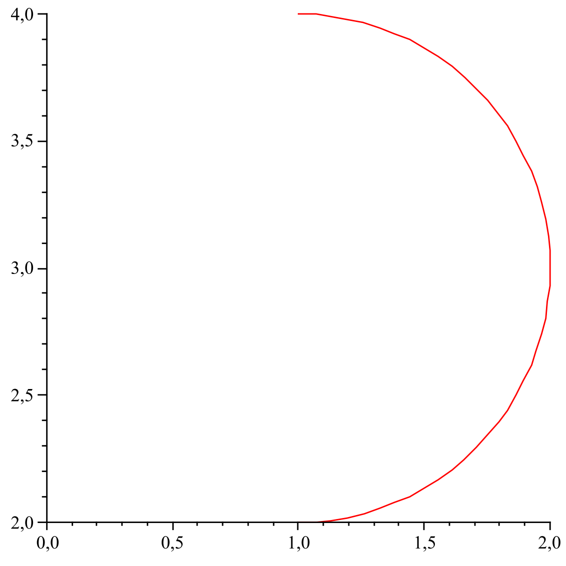
Soluzione: applicando la formula $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta$, con $\rho(\theta) = (1 + \cos\theta)$ otteniamo:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| d\theta = 8 \end{aligned}$$

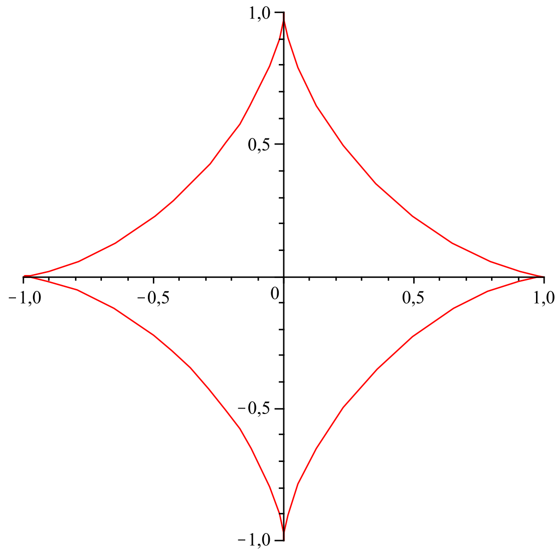
Tale curva è detta *cardioide* (si veda la figura)



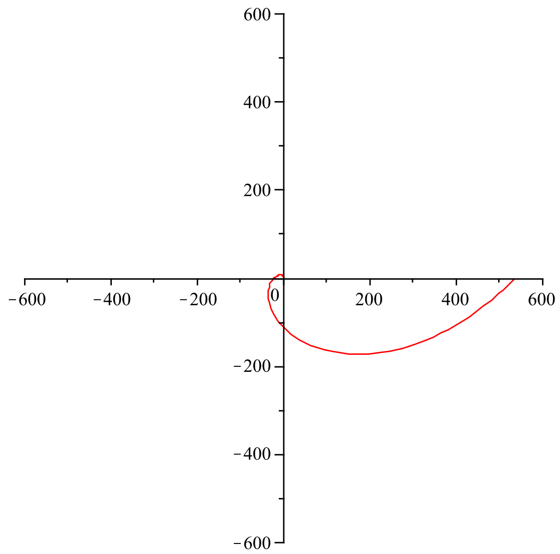
es 1: la semicirconferenza $\gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|, x^2 + y^2 = 4, y \leq 0\}$



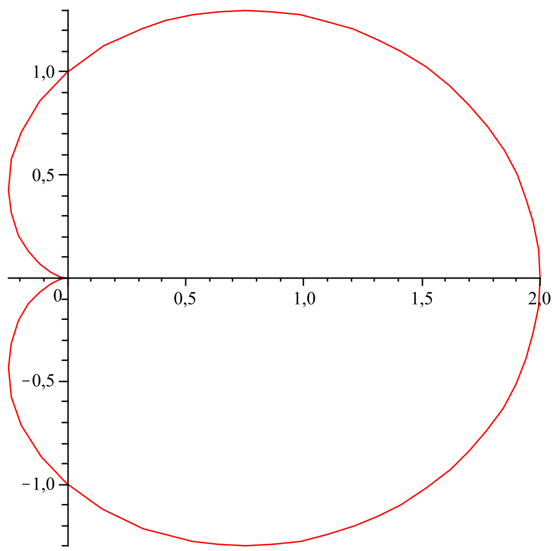
es 2: la semicirconferenza $\gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|, (x-1)^2 + (y-3)^2 = 1, x \geq 1\}$



es 4: l'astroide $\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t) \qquad t \in [0, 2\pi]$



es 5: la curva parametrizzata da $\alpha(\theta) = (e^\theta \cos\theta, e^\theta \sin\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$



es 6: la cardioide $\alpha(\theta) = ((1 + \cos\theta)\cos\theta, (1 + \cos\theta)\sin\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$