Soluzioni appello febbraio 2015

Esercizio 1 (8 punti)
Si consideri la curva piana $\gamma \subset \mathbf{R}^2$ di equazione parametrica

$$\alpha(t) = (\sin(t/2)\cos t, \sin(t/2)\sin t), \qquad t \in [0, \pi]$$

1. La curva γ è regolare? Motivare la risposta.
2. Calcolare il valore del parametro $t \in [0, \pi]$ per il quale $\alpha(t) = (0, \sqrt{2}/2)$.
3. Calcolare versore tangente, versore normale e curvatura nel punto $(0, \sqrt{2}/2)$.
4. Scrivere l'equazione del cerchio osculatore nel punto $(0, \sqrt{2}/2)$.

Soluzione:

1. La curva γ è regolare in quanto la mappa α è di classe C^1 e il vettore tangente $\alpha'(t)$ è sempre diverso da (0,0), infatti:

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\sin^2(t/2) + \frac{1}{4}\cos^2(t/2)} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\sin^2(t/2)} \neq 0, \qquad \forall t \in [0, \pi]$$

2. Imponiamo $\alpha(t) = (\sin(t/2)\cos t, \sin(t/2)\sin t) = (0, \sqrt{2}/2)$:

$$\sin(t/2)\cos t = 0 \tag{1}$$
$$\sin(t/2)\sin t = \sqrt{2}/2 \tag{2}$$

Dall'equazione (1) otteniamo che $\sin(t/2) = 0$ oppure $\cos t = 0$. Elevando al quadrato le due equazioni (1) e (2) e sommandole abbiamo che $\sin^2(t/2) = 1/2 \neq 0$, quindi l'unica soluzione nell'intervallo $[0, \pi]$ è per $\cos t = 0$, ossia $t = \pi/2$.

3. $\alpha'(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1/2)$, $\alpha''(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -5/4)$, $\alpha'(\pi/2) \wedge \alpha''(\pi/2) = (0, 0, 7/8)$. Abbiamo quindi:

$$T(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1), \quad B(\pi/2) = \hat{k}, \quad N(\pi/2) = B(\pi/2)\wedge T(\pi/2) = \hat{k}\wedge\frac{1}{\sqrt{5}}(-2\hat{i}+\hat{j}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, -2)$$

Infine la curvatura è data da

$$k(\pi/2) = \frac{\|\alpha'(\pi/2) \wedge \alpha''(\pi/2)\|}{\|\alpha'(\pi/2)\|^3} = \frac{28}{25}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

4. Il cerchio osculatore nel punto $(0, \sqrt{2}/2)$ è la circonferenza di raggio $\rho = \frac{1}{k} = \frac{25}{28}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ e centro nel punto

$$C = (x_c, y_c) = (0, \sqrt{2}/2) + \rho N(\pi/2) = (0, \sqrt{2}/2) + \frac{25}{28}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}(-1, -2) = \left(-\frac{5\sqrt{2}}{28}, \frac{\sqrt{2}}{7}\right)$$

di equazione $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = \rho^2$:

$$\left(x + \frac{5\sqrt{2}}{28}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{7}\right)^2 = \frac{125}{392}$$

Esercizio 2 (8 punti)
Individuare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3$$

nel quadrato di vertici (0,0), (1,0), (1,1), (0,1).
Soluzione:
Cerchiamo i punti di massimo e di minimo assoluto di f sul quadrato tra:

1. I punti interni in cui $\nabla f = (0,0)$.

2. i punti sulla frontiera del quadrato.

1. I punti in cui si annulla il gradiente sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2y^2(3-4x-3y) = 0 \\ x^3y(2-2x-3y) = 0 \end{cases}$$

   cioé i punti degli assi $(0,y)$, $(x,0)$ ed il punto $(1/2, 1/3)$, che è interno al quadrato e in cui f vale $f(1/2,1/3) = 1/432$.

2. Il bordo del quadrato è formato da 4 segmenti:
   Il segmento congiungente il punto (0,0) con il punto (1,0), in cui la funzione f vale $f(x,0) = 0$.
   Il segmento congiungente il punto (0,0) con il punto (0,1), in cui la funzione f vale $f(0,y) = 0$.
   Il segmento congiungente il punto (1,0) con il punto (1,1), in cui la funzione f vale $f(1,y) = -y^3$, con $y \in [0,1]$. Il punto di massimo si ha per $y = 0$ dove $f = 0$, mentre il punto di minimo si ha per $y = 1$ dove $f = -1$.
   Il segmento congiungente il punto (0,1) con il punto (1,1), in cui la funzione f vale $f(x,1) = -x^4$, con $x \in [0,1]$. Il punto di massimo si ha per $x = 0$ dove $f = 0$, mentre il punto di minimo si ha per $x = 1$ dove $f = -1$.

Concludendo, il punto di massimo assoluto è $(1/2, 1/3)$ dove f vale $f(1/2,1/3) = 1/432$, mentre il punto di minimo assoluto è $(1,1)$ dove f vale -1.
Esercizio 3 (7 punti) Si calcoli il flusso del campo vettoriale $F(x,y,z) = (y,x,2)$ attraverso la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : z = x^2+y^2, z \leq 2x\}$, orientata in modo tale che il versore normale soddisfi la diseguaglianza $\hat{n} \cdot \hat{k} < 0$.
Soluzione:
La superficie è parametrizzata dalla mappa $r : A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$:

$$r(x,y) = (x,y,x^2+y^2), \quad (x,y) \in A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2x\}$$

Notiamo che la diseguaglianza $x^2+y^2 \leq 2x$ che caratterizza l'insieme A può essere riscritta $(x-1)^2+y^2 \leq 1$, che mette in evid3enza he A è un cerchio di centro (1,0) e raggio 1.
Il vettore tangente è $N(x,y) = (2x, 2y, -1)$. Il flusso di F attraverso Σ può essere calcolato come:

$$\int\int_\Sigma F \cdot \hat{n} dS = \int\int_A (y,x,2)(2x,2y,-1)dxdy = \int\int_A (4xy-2)dxdy$$

Utilizzando ad esempio le coordinate polari centrate in (1,0):

$$x = 1+\rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta$$

abbiamo

$$\int\int_A (4xy-2)dxdy = \int_o^{2\pi}\int_0^1 (4\rho\sin\theta(1+\rho\cos\theta)-2)\rho d\rho d\theta = -2\pi$$

Esercizio 4 (7 punti)

Calcolare l'area della regione piana $D \subset \mathbf{R}^2$ delimitata dall'arco di cicloide di equazione parametrica

$$\alpha(t) = (R(t - \sin t), R(1 - \cos t)), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

e dal segmento congiungente i punti (0,0) e $(2\pi R, 0)$.

Soluzione:

Utilizzando la formula di Gauss-Green nel piano, abbiamo che

$$A(D) = \int\int_D 1 dxdy = \oint_{\partial D^+} F \cdot dr$$

dove $F(x, y) = (-y/2, x)$ e la frontiera ∂D^+ di D orientata positivamente è composta dal segmento congiungente il punto (0,0) con il punto $(2\pi R, 0)$, e dall'arco di cicloide percorsa in senso antiorario, dal punto $(2\pi R, 0)$ al punto (0,0). Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D^+} F \cdot dr &= \int_0^{2\pi R} F(x, 0)(1, 0) dx - \int_0^{2\pi} F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= 0 - \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} (-1 + \cos t, t - \sin t) \cdot (1 - \cos t, \sin t) dt = 3\pi R^2\end{aligned}$$