Soluzioni

1. Disegnare il grafico della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, nei casi:

   (a) $f(x, y) = x$.
   La funzione dipende solo dalla coordinata x. In questo caso il grafico rappresenta un piano (vedi figura).

   (b) $f(x, y) = y^2$.
   La funzione dipende solo dalla coordinata y. Le sezioni del grafico con piani verticali paralleli al piano yz sono parabole, mentre le sezioni del grafico con piani verticali paralleli al piano xz sono rette orizzontali (vedi figura)

   (c) $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$
   In questo caso il grafico rappresenta un paraboloide passante per $(0, 0, 4)$ con concavità rivolta verso il basso (vedi figura).

2. Descrivere le curve di livello della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, nei casi:

   (a) $f(x, y) = x - y$.
   L'equazione $x - y = c$, ovvero $y = x - c$ definisce delle rette parallele alla bisetrice del primo e terzo quadrante (vedi figura)

   (b) $f(x, y) = xy$.
   Per $c = 0$, l'equazione $xy = 0$ definisce le due rette $x = 0$ e $y = 0$, ovvero i due assi coordinati. Se $c > 0$ l'equazione $xy = c$, ovvero $y = c/x$, definisce due rami di iperbole nel primo e nel terzo quadrante, mentre se $c < 0$ l'equazione $xy = c$, ovvero $y = c/x$, definisce due rami di iperbole nel secondo e nel quarto quadrante (vedi figura)

   (c) $f(x, y) = \sin(x)$.
   Per $-1 \leq c \leq 1$ l'equazione $\sin(x) = c$ ha come soluzioni $x = \arcsin(c) + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, che rappresenta un insieme di rette parallele all'asse delle y (vedi figura).

   (d) $f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$.
   Per $c = 1$, l'equazione $\sin(x)\sin(y) = 1$ ha come soluzione l'insieme dei punti del piano della forma $(\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2h\pi)$, e della forma $-\pi/2 + 2k\pi, -\pi/2 + 2h\pi)$ con $k, h \in \mathbb{Z}$.
   Per $c = 0$, l'equazione $\sin(x)\sin(y) = 0$ ha come soluzione $\sin(x) = 0$ oppure $\sin(y) = 0$, che rappresentano rispettivamente nel piano xy le rette $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ (parallele all'asse delle y) e le rette $y = h\pi$, con $h \in \mathbb{Z}$, (parallele all'asse delle x).

Per $0 < c < 1$ oppure $-1 < c < 0$ l'equazione $\sin(x)\sin(y) = c$ rappresenta una famiglia di curve chiuse che si ripetono con periodicità di $(2\pi, 2\pi)$ nel piano xy (vedi figura).

(e) $f(x,y) = \frac{x-y}{2x+y}$, dove f è definita in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2x + y \neq 0\}$.
Per $c \neq -1$ l'equazione $\frac{x-y}{2x+y} = c$ definisce nel piano xy la curva $y = \frac{1-2c}{1+c}x$, ovvero una retta passante per l'origine e di coefficiente angolare $\frac{1-2c}{1+c}$. Per $c = -1$ l'equazione $\frac{x-y}{2x+y} = c$ definisce nel piano xy la retta $x = 0$ (l'asse delle y). Le linee di livello sono quindi rette passanti per l'origine e di inclinazione dipendente dal valore di c (vedi figura).

(f) $f(x,y) = \frac{y}{x}e^x$, dove f è definita in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \neq 0\}$.
L'equazione $\frac{y}{x}e^x = c$ definisce, al variare di $c \in \mathbb{R}$, la famiglia di curve della forma $y = cxe^{-x}$ (vedi figura).

3. Descrivere le superfici di livello della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, nei casi:

(a) $f(x,y,z) = 2x - y + z$.
L'equazione $2x - y + z = c$ definisce, al variare di $c \in \mathbb{R}$, una famiglia di piani paralleli fra loro, ortogonali al vettore di componenti $(2, -1, 1)$. La figura 3(a) ne rappresenta due.

(b) $f(x,y,z) = x^2 + z^2$
Per $c > 0$, l'equazione $x^2 + z^2 = c$ rappresenta, al variare di c, una famiglia di cilindri infiniti, il cui asse di simmetria è l'asse delle y, e raggio pari a $\sqrt{c}$. La figura 3(b) ne rappresenta uno.

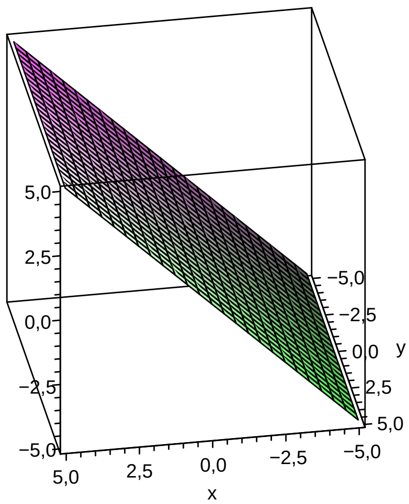
(c) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$. Per $c > 1$ l'equazione $e^{x^2+y^2+z^2} = c$, ovvero $x^2 + y^2 + z^2 = \log(c)$, definisce la superficie sferica di raggio $\sqrt{\log(c)}$ (vedi figura 3(c)).

(d) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 4z^2}$.
Per $c > 0$ l'equazione $\sqrt{x^2 + 2y^2 + 4z^2} = c$, ovvero $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = c^2$, rappresenta la superficie dell'elissoide di semiassi c, $c/\sqrt{2}$ e $c/2$ (vedi figura 3(d)).

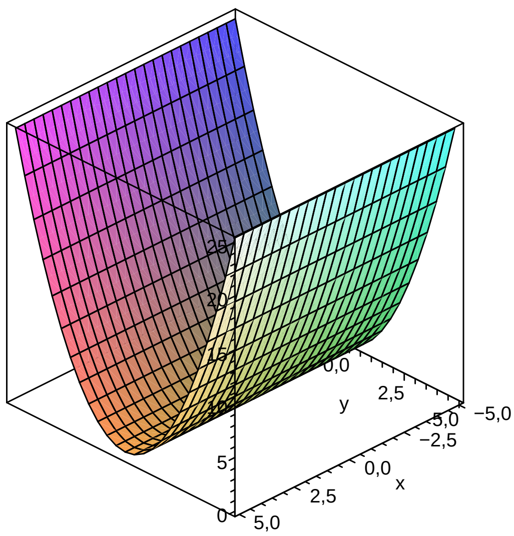
(e) $f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{(z-1)^2}$ dove f è definita in $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z \neq 1\}$
Per $c = 0$ l'equazione $\frac{x^2+y^2}{(z-1)^2} = 0$, ovvero $x^2 + y^2 = 0$ rappresenta l'asse delle z.
Per $c > 0$ l'equazione $\frac{x^2+y^2}{(z-1)^2} = c$, ovvero $z = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{x^2 + y^2}$ rappresenta un cono con vertice nel punto $(0, 0, 1)$. L'angolo di apertura del cono dipende dal valore di c. La figura 3(e) ne rappresenta uno.

(f) $f(x,y,z) = \log\left(\frac{z}{x^2+y^2}\right)$, dove f è definita in $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \neq (0,0), z > 0\}$.

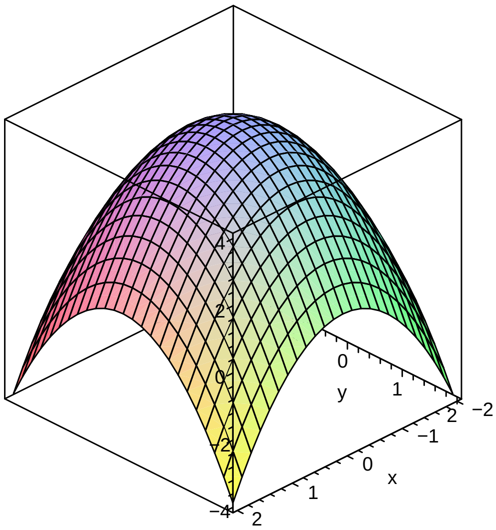
L'equazione $\log\left(\frac{z}{x^2+y^2}\right) = c$, ovvero $z = e^c(x^2 * y^2)$, rappresenta, al variare di c, una famiglia di paraboloidi passanti per $(0,0,0)$. La figura 3(f) ne rappresenta 2.



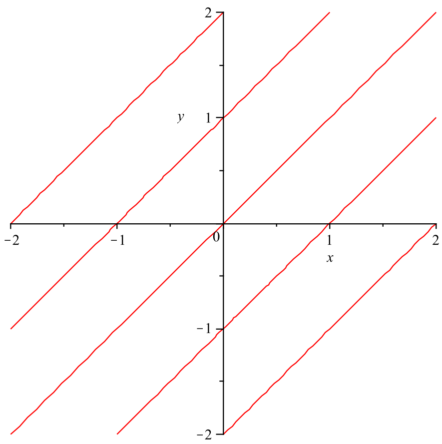
es 1(a): il grafico della funzione $f(x, y) = x$



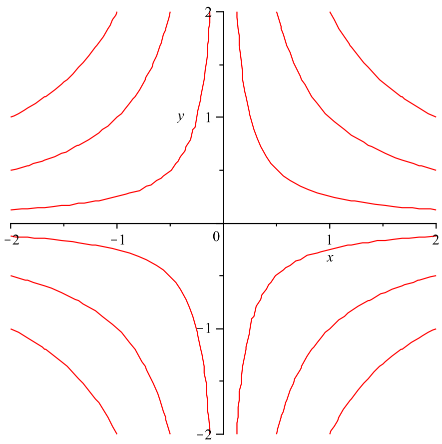
es 1(b): il grafico della funzione $f(x, y) = y^2$



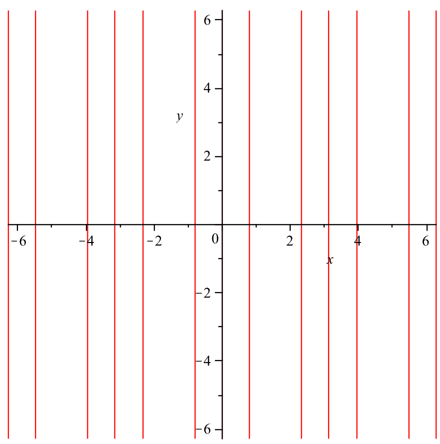
es 1(c): il grafico della funzione $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$



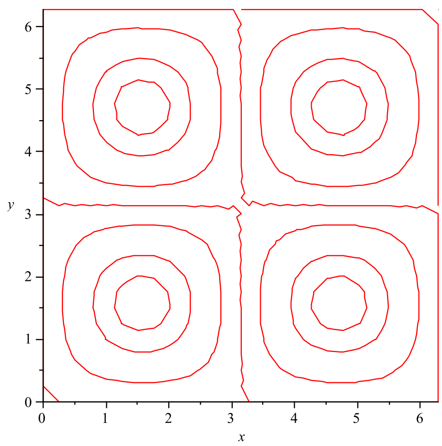
es 2(a): alcune curve di livello della funzione $f(x, y) = x - y$



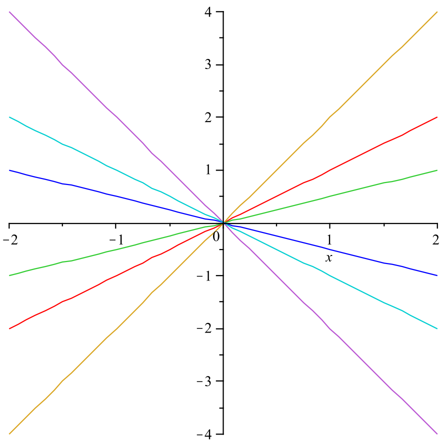
es 2(b): alcune curve di livello della funzione $f(x,y) = xy$



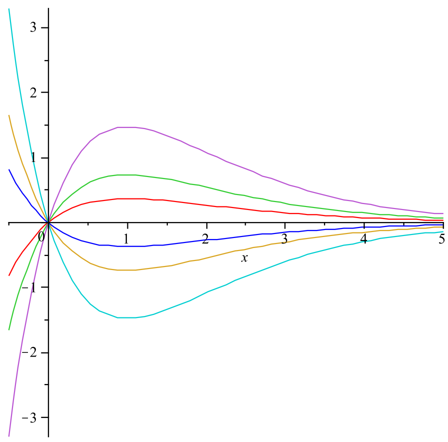
es 2(c): alcune curve di livello della funzione $f(x,y) = \sin(x)$



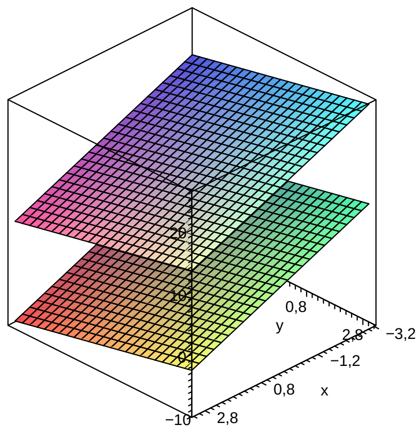
es 2(d): alcune curve di livello della funzione $f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$



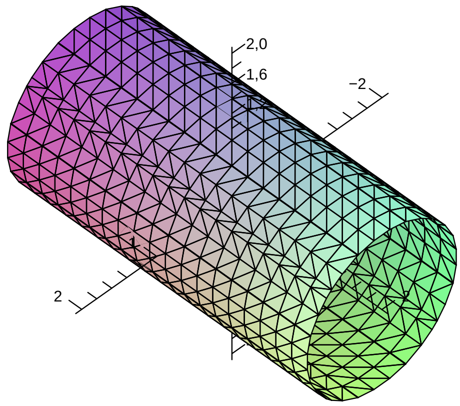
es 2(e): alcune curve di livello della funzione $f(x, y) = \frac{x-y}{2x+y}$



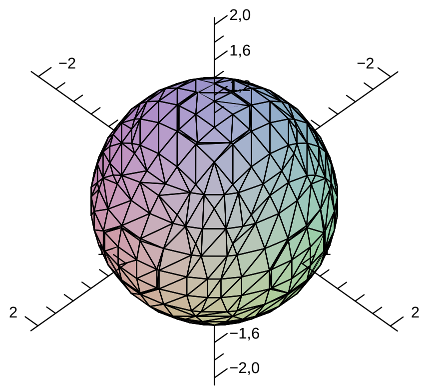
es 2(f): alcune curve di livello della funzione $f(x,y) = \frac{y}{x}e^x$



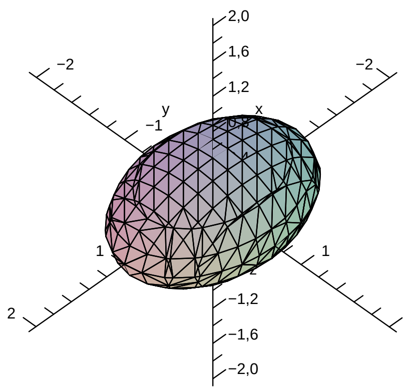
es 3(a): alcune superfici di livello della funzione $f(x,y,z) = 2x - y + z$



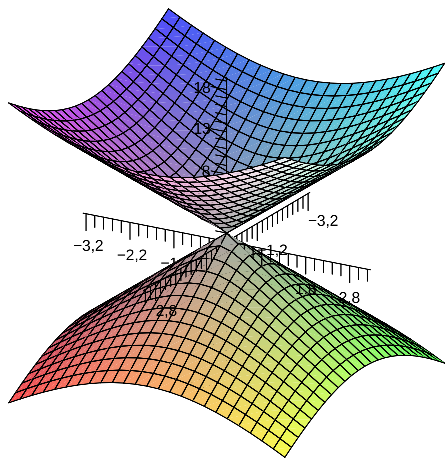
es 3(b): superficie di livello della funzione $f(x, y, z) = x^2 + z^2$



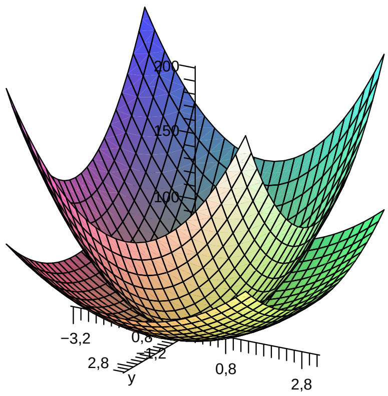
es 3(c): superficie di livello della funzione $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}$



es 3(d): superficie di livello della funzione $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 4z^2}$



es 3(e): superficie di livello della funzione $f(x, y, z) = \frac{x^2+y^2}{(z-1)^2}$



es 3(f): alcune superfici di livello della funzione $f(x, y) = \log\left(\frac{z}{x^2+y^2}\right)$