Soluzioni appello gennaio 2015

Esercizio 1 (7 punti)
Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ il campo vettoriale $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$

$$F(x, y, z) = (2xy + 3\alpha z, x^2 - z \sin y, \cos(y) - \alpha e^z + x)$$

è conservativo. Per tale valore di α, calcolare un potenziale U e il lavoro di F lungo la curva γ di parametrizzazione

$$\alpha(t) = (t, \pi t^2, t), \qquad t \in [0, 1].$$

Soluzione:
Il campo F è di classe C^1 su $\mathbf{R}^3$, che è un insieme semplicemente connesso, quindi affinchè F sia conservativo, è necessario e sufficiente che $\operatorname{rot} F = (0, 0, 0)$. Imponendo che

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} F_y &= \frac{\partial}{\partial y} F_x & \qquad 2x &= 2x \\
\frac{\partial}{\partial x} F_z &= \frac{\partial}{\partial z} F_x & \qquad 3\alpha &= 1 \\
\frac{\partial}{\partial z} F_y &= \frac{\partial}{\partial y} F_z & \qquad -\sin y &= -\sin y
\end{aligned}$$

otteniamo $\alpha = 1/3$. Il campo F diviene

$$F(x, y, z) = (2xy + z, x^2 - z \sin y, \cos(y) - \alpha e^z + x)$$

Il potenziale associato è

$$U(x, y, z) = x^2 y + zx + z \cos y - \frac{e^z}{3}$$

Per calcolare il lavoro di F lungo la curva γ utilizziamo la formula

$$\int_\gamma F \cdot dr = U(\alpha(1) - U(\alpha(0)) = U(1, \pi, 1) - U(0, 0, 0) = \pi - \frac{e}{3} + \frac{1}{3}$$

Esercizio 2 (8 punti)
Si consideri l'insieme $D \subset \mathbf{R}^2$ definito da $D := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, (x - 2)^2 + y^2 \leq 2\}$.

1. Rappresentare graficamente D.
2. Calcolare l'integrale doppio $\int\int_D f(x, y) dxdy$, dove $f(x, y) = x$.

Soluzione:
L'insieme D è l'intersezione fra il cerchio di centro (0,0) e raggio $\sqrt{2}$ ed il cerchio di centro (2,0) e raggio $\sqrt{2}$. Notiamo inoltre che i punti di intersezione fra la circonferenza di centro (0,0) e raggio $\sqrt{2}$ e la circonferenza di centro (2,0) e raggio $\sqrt{2}$ hanno coordinate $(1, -1)$ e $(1, 1)$.
L'insieme D può essere rappresentato come un insieme $x-$semplice:

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \leq y \leq 1, 2 - \sqrt{2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{2 - y^2}\}$$

e l'integrale doppio $\int\int_D f(x, y) dxdy$ può essere calcolato come:

$$\int\int_D f(x, y) dxdy = \int_{-1}^{1} \int_{2-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} x dxdy = \pi - 2$$

Esercizio 3 (8 punti) Si calcoli il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (x, y, 2)$ attraverso la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$, orientata in modo tale che il versore normale soddisfi la diseguaglianza $\hat{n} \cdot \hat{k} > 0$.

Soluzione:

Indichiamo con $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ l'insieme

$$\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$$

Utilizzando il teorema della divergenza abbiamo che

$$\int\int\int_{\Omega} \mathrm{div} F \, dxdydz = \int\int_{\partial\Omega} F \cdot \hat{n}_e dS$$

dove la frontiera $\partial\Omega$ di Ω è composta dall'unione della superficie Σ e dall'ellisse $B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = 0, \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$. Abbiamo dunque

$$\begin{aligned}
\int\int\int_{\Omega} \mathrm{div} F \, dxdydz &= \int\int_{\partial\Omega} F \cdot \hat{n}_e dS \\
\int\int\int_{\Omega} \mathrm{div} F \, dxdydz &= \int\int_{\Sigma} F \cdot \hat{n}_e dS + \int\int_{B} F \cdot \hat{n}_e dS \\
\int\int\int_{\Omega} 2dxdydz &= \int\int_{\Sigma} F \cdot \hat{n}_e dS + \int\int_{B} (x, y, 2) \cdot \hat{(}0, 0, -1) dS \\
2Vol(\Omega) &= \int\int_{\Sigma} F \cdot \hat{n}_e dS - 2Area(B) \\
\frac{8}{3}\pi &= \int\int_{\Sigma} F \cdot \hat{n}_e dS - 4\pi
\end{aligned}$$

Quindi $\int\int_{\Sigma} F \cdot \hat{n}_e dS = \frac{8}{3}\pi + 4\pi = \frac{20}{3}\pi$.

Esercizio 4 (7 punti)

Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$ nel triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 3)$ e $(3, 1)$.

Soluzione:

Cerchiamo prima di tutto i punti stazionari interni al triangolo, ovvero le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione è il punto (0,0), che appartiene al bordo dell'insieme D e in cui la funzione vale $f(0, 0) = 0$.

Analizziamo ora il bordo del triangolo composto da tre segmenti:

1. Il segmento congiungente il punto (0,0) con il punto (3,1), che può essere parametrizzato tramite la mappa $\alpha : [0, 3] \to \mathbf{R}^2$ definita da $\alpha(x) = (x, x/3)$. Su tale segmento la funzione vale $f(x, x/3) = 8x^2/9$, che nell'intervallo $[0, 3]$ assume il valore minimo in $x = 0$ dove $f(0, 0) = 0$, mentre assume il valore massimo in $x = 3$ dove $f(3, 1) = 8$.

2. Il segmento congiungente il punto (0,0) con il punto (1,3), che può essere parametrizzato tramite la mappa $\alpha : [0, 1] \to \mathbf{R}^2$ definita da $\alpha(x) = (x, 3x)$. Su tale segmento la funzione vale $f(x, 3x) = -8x^2$, che nell'intervallo $[0, 1]$ assume il valore massimo in $x = 0$ dove $f(0, 0) = 0$, mentre assume il valore minimo in $x = 1$ dove $f(1, 3) = -8$.

3. Il segmento congiungente il punto (1,3) con il punto (3,1), che può essere parametrizzato tramite la mappa $\alpha : [1,3] \to \mathbf{R}^2$ definita da $\alpha(x) = (x, -x+4)$. Su tale segmento la funzione vale $f(x, -x+4) = 8x - 16$, che nell'intervallo $[1, 31]$ assume il valore massimo in $x = 3$ dove $f(3,1) = 8$, mentre assume il valore minimo in $x = 1$ dove $f(1,3) = -8$.

Concludendo, il punto di massimo assoluto è (3,1) in cui $f = 8$, mentre il punto di minimo assoluto è (1,3) in cui $f = -8$.