Soluzioni appello gennaio 2016, versione A

Esercizio 1

Calcolare massimo e minimo assoluto della funzione $f(x, y, z) = 3x + 3y + \sqrt{6}z + 1$ sulla semisfera $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$

Soluzione:

Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, i punti di Ω candidati ad essere punti di massimo o di minimo assoluto per la funzione f sono quelli in cui $\nabla F = \lambda \nabla g$, dove $g(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-1$. Risolviamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 3 = 2\lambda x \\ 3 = 2\lambda y \\ \sqrt{6} = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni possiamo dedurre che $x = y$, mentre dalla seconda e dalla terza ricaviamo che $z = \frac{\sqrt{6}}{3}y$. Sostituendo nella quarta equazione otteniamo due soluzioni $(\sqrt{6}/4, \sqrt{6}/4, 1/2)$ e $(-\sqrt{6}/4, -\sqrt{6}/4, -1/2)$. Solo il primo di questi punti soddisfa la disequazione $z \geq 0$ e appartiene all'insieme Ω, mentre l'altro punto va scartato. Calcolando il valore della funzione f nel punto $(\sqrt{6}/4, \sqrt{6}/4, 1/2)$ otteniamo $f(\sqrt{6}/4, \sqrt{6}/4, 1/2) = 2\sqrt{6} + 1$.
Resta da analizzare la curva bordo della superficie Ω, cioé la circonferenza γ appartenente al piano xy di equazione $x^2 + y^2 = 1$. Una parametrizzazione di tale circonferenza è la funzione $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3$ definita da $\alpha(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$. la funzione f valutata nei punti della curva γ, descritta dalla funzione composta $f \circ \alpha : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$, è :

$$f(\alpha(\theta)) = 3\cos\theta + 3\sin\theta + 1.$$

Dato che $\frac{d}{d\theta} f \circ \alpha(\theta) = -3\sin\theta + 3\cos\theta$, che si annulla per $\cos\theta = \sin\theta$, cioé in $\theta = \pi/4$ e $\theta = 5\pi/4$, i punti di γ candidati ad essere di massimo o minimo sono $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$, dove $f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0) = 1 + 3\sqrt{2}$, e $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$ dove $f(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0) = 1 - 3\sqrt{2}$.
Concludendo, il punto di minimo assoluto è $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$, mentre il punto di massimo assoluto è $(\sqrt{6}/4, \sqrt{6}/4, 1/2)$

Esercizio 2

Si calcoli la massa della piramide di vertici (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (2,0,0) e densità $f(x, y, z) = xz$

Soluzione:

Possiamo riguardare tale piramide come l'insieme Ω compreso tra i piani $z = 0$ e $z = 1-y-x/2$ (cioé il piano passante per i 3 punti (0,0,1), (0,1,0), (2,0,0)) la cui proiezione sul piano xy è il triangolo T di vertici (0,0), (0,1) e (2,0), cioé $T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in [0, 2], 0 \leq y \leq 1 - x/2\}$:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in T, 0 \leq z \leq 1 - y - x/2\}$$

Integrando per fili abbiamo

$$\begin{aligned} \int\int\int_\Omega xz dx dy dz &= \int\int_T \left(\int_0^{1-y-x/2} xz dz \right) dx dy \\ &= \int\int_T \frac{x}{2}(1 - y - x/2)^2 dx dy = \int_0^2 \left(\int_0^{1-x/2} \frac{x}{2}(1 - y - x/2)^2 dy \right) dx \\ &= \int_0^2 \frac{x}{6}(1 - x/2)^3 dx = \frac{1}{30} \end{aligned}$$

Esercizio 3 Calcolare per quale valore del parametro reale $\alpha \in \mathbf{R}$ campo vettoriale $F(x, y, z) =$

$(2\alpha yz, xz + 2yz + 3, xy + y^2 + z^2)$ è conservativo e calcolare, per tale valore di α, un potenziale. Si calcoli inoltre il lavoro di F lungo la curva γ intersezione fra la semisfera $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ ed il piano di equazione $x + y + z = 0$.

Soluzione:

Il campo vettoriale F è definito su $\mathbf{R}^3$ che è un insieme semplicemente connesso, quindi F è conservativo se e solo se è irrotazionale. Imponenendo $\operatorname{rot} F = (0,0,0)$ otteniamo le condizioni $2\alpha z = z$ e $2\alpha y = y$, entrambe verificate se $\alpha = 1/2$. In tal caso il campo F diviene $F(x,y,z) = (yz, xz + 2yz + 3, xy + y^2 + z^2)$. Imponendo che la funzione potenziale $U : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ soddisfi le tre condizioni

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} U(x,y,z) = yz \\ \frac{\partial}{\partial x} U(x,y,z) = xz + 2yz + 3 \\ \frac{\partial}{\partial x} U(x,y,z) = xy + y^2 + z^2 \end{cases}$$

otteniamo $U(x,y,z) = xyz + y^2 z + 3y + z^3/3$.

Per calcolare il lavoro lungo la curva γ, dato che il campo è conservativo, è sufficiente calcolare la differenza del potenziale ai due estremi di γ. Tale curva, in quanto intersezione fra la semisfera Ω ed un piano passante per l'origine (0,0,0), è una semicirconferenza, le cui estremità sono i punti $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$ e $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ ottenuti mettendo a sistema l'equazione del piano $x+y+z=0$ con le due equazioni che descrivono la circonferenza bordo di Ω, cioé $z = 0$ e $x^2 + y^2 = 0$.
Il lavoro da $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$ a $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ è dunque:

$$U(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0) - U(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0) = 3\sqrt{2},$$

mentre, cambiando il verso di percorrenza, il lavoro da $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ a $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$ è

$$U(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0) - U(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0) = -3\sqrt{2}.$$

Esercizio 4

Sia $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$ la parte della superficie laterale del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, compresa fra i piani $z = 0$ e $x - y + z = 2$.

1. Fornire una parametrizzazione di Σ.
2. Calcolare l'area di Σ.

Soluzione:

1. Utilizzando le coordinate cilindriche in $\mathbf{R}^3$ è possibile parametrizzare la superficie Σ in funzione dei parametri θ, t come segue:

$$r(\theta, t) = (\cos\theta, \sin\theta, t), \qquad \theta \in [0, 2\pi],\ t \in [0, 2 + \sin\theta - \cos\theta]$$

2. Utilizzando la parametrizzazione ricavata al punto 1, otteniamo i due vettori tangenti:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} r(\theta, t) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0), \qquad \frac{\partial}{\partial\theta} r(\theta, t) = (0, 0, 1),$$

ed il vettore normale $N(\theta, t)$:

$$N(\theta, t) = \frac{\partial}{\partial\theta} r(\theta, t) \wedge \frac{\partial}{\partial t} r(\theta, t) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

L'area è data da

$$A(\Sigma) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2+\sin\theta-\cos\theta} \|N(\theta, t)\| dt\, d\theta = \int_0^{2\pi} (2 + \sin\theta - \cos\theta) d\theta = 4\pi$$