Complementi di Analisi Matematica

18 giugno 2012

Esercizio 1 (7 punti)
Verificare che il campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y\cos(xy) - \sin(z + x), x\cos(xy), -\sin(z + x))$$

è conservativo e calcolarne un potenziale. Calcolare quindi il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la retta congiungente il punto $P_1 = (\pi/2, 0, 0)$ con il punto $P_2 = (0, 3, \pi)$
Soluzione:

Il campo $\mathbf{F}$ è di classe C^1 su $\mathbf{R}^3$ che è un insieme semplicemente connesso. Per verificare se è conservativo è quindi necessario e sufficiente verificare che è irrotazionale ovvero che sono verificate contemporaneamente le tre condizioni:

$$\frac{\partial}{\partial x}F_2 = \frac{\partial}{\partial y}F_1, \qquad \frac{\partial}{\partial x}F_3 = \frac{\partial}{\partial z}F_1, \qquad \frac{\partial}{\partial y}F_3 = \frac{\partial}{\partial z}F_2$$

Infatti abbiamo:

$$\cos(xy) - xy\sin(xy) = \cos(xy) - xy\sin(xy), \qquad -\cos(z + x) = -\cos(z + x), \qquad 0 = 0$$

Calcoliamo dunque il potenziale, ovvero una funzione U tale che

$$\frac{\partial}{\partial x}U(x, y, z) = y\cos(xy) - \sin(z + x), \quad \frac{\partial}{\partial y}U(x, y, z) = x\cos(xy), \quad \frac{\partial}{\partial y}U(x, y, z) = -\sin(z + x).$$

Imponendo la prima condizione $\frac{\partial}{\partial x}U(x, y, z) = y\cos(xy) - \sin(z+x)$ abbiamo che U deve essere della forma

$$U(x, y, z) = \sin(xy) + \cos(x + z) + f(y, z)$$

Imponendo la seconda condizione $\frac{\partial}{\partial y}U(x, y, z) = x\cos(xy)$ otteniamo

$$x\cos(xy) + \frac{\partial}{\partial y}f(y, z) = x\cos(xy)$$

e dunque $\frac{\partial}{\partial y}f(y, z) = 0$, da cui $f(y, z) = g(z)$. Quindi la forma provvisoria per la funzione U è :

$$U(x, y, z) = \sin(xy) + \cos(x + z) + g(z)$$

Imponendo la terza condizione $\frac{\partial}{\partial z}U(x, y, z) = -\sin(z + x)$ otteniamo

$$-\sin(x + z) + \frac{d}{dz}g(z) = -sin(x + z),$$

da cui possiamo dedurre che $\frac{d}{dz}g(z) = 0$ e quindi $g(z) = costante$. Il potenziale cercato è dunque $U(x, y, z) = \sin(xy) + \cos(x + z) + costante$.
Per calcolare il lavoro L per andare dal punto P_1 al punto P_2, dato che il campo è conservativo, è sufficiente calcolare la differenza tra il potenziale in P_2 e il potenziale in P_1:

$$L = U(0, 3, \pi) - U(\pi/2, 0, 0) = -1$$

Esercizio 2 (8 punti)
Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin(x), \sin y, x + y)$$

attraverso la superficie Σ di equazione

$$r(u, v) = (u, v, u^2 + v^2), \qquad u \in [0, \pi/2], v \in [0, \pi/2]$$

scegliendo il versore normale $\hat{n}$ che punta verso l'alto ($\hat{n} \cdot \hat{k} \geq 0$)
Soluzione:

Una coppia di vettori tangenti alla superficie è :

$$\frac{\partial}{\partial u} r(u, v) = (1, 0, 2u), \qquad \frac{\partial}{\partial v} r(u, v) = (0, 1, 2v)$$

il vettore normale è dato dal loro prodotto vettoriale

$$N(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} r(u, v) \wedge \frac{\partial}{\partial v} r(u, v) = (-2u, -2v, 1)$$

che ha terza componente positiva come richiesto dalla consegna dell'esercizio. L'integrale di superficie $\int\int_\Sigma \mathbf{F} \cdot \hat{n} dS$ è quindi dato da

$$\begin{aligned}
\int\int_\Sigma \mathbf{F} \cdot \hat{n} dS &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \mathbf{F} \cdot N dudv \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (\sin u, \sin v, u + v) \cdot (-2u, -2v, 1) dudv \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (-2u \sin u - 2v \sin v + u + v) \, dudv = -2\pi + \frac{\pi^3}{8}
\end{aligned}$$

Esercizio 3 (8 punti)
Si calcolino le coordinate del baricentro della semisfera

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$$

di densita $\rho(x, y, z) = \alpha z^2$.
Soluzione:

La massa è data dall'integrale triplo

$$M = \int\int\int_S \rho(x, y, z) dxdydz = \int\int\int_S \alpha z^2 dxdydz$$

Utilizzando le coordinate sferiche ρ, θ, ϕ:

$$M = \alpha \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \rho^4 \cos^2 \phi \sin \phi d\rho d\phi d\theta = 2\pi\alpha \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^2 \left(-\frac{\cos^3(\phi)}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \pi\alpha \frac{64}{15}$$

Analogamente le coordinate del baricentro sono

$$x_G = \frac{1}{M} \int\int\int_S x\rho(x, y, z) dxdydz = \frac{1}{M} \alpha \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \rho^5 \cos^2 \phi \sin^2 \phi \cos \theta d\rho d\phi d\theta = 0$$

$$y_G = \frac{1}{M} \int\int\int_S y\rho(x, y, z) dxdydz = \frac{1}{M} \alpha \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \rho^5 \cos^2 \phi \sin^2 \phi \sin \theta d\rho d\phi d\theta = 0$$

$$
\begin{aligned}
z_G &= \frac{1}{M}\int\int\int_S z\rho(x,y,z)dxdydz = \frac{1}{M}\alpha\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^2 \rho^5\cos^3\phi\sin\phi\sin\theta d\rho d\phi d\theta \\
&= \frac{1}{M}2\pi\alpha\frac{\rho^6}{6}\Big|_0^2\left(-\frac{\cos^4(\phi)}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi\alpha\frac{16}{3}}{\pi\alpha\frac{64}{15}} = 5/4
\end{aligned}
$$

Esercizio 4 (7 punti)

Calcolare la probabilità che lanciando due dadi (non truccati) la somma dei risultati dia un numero minore o uguale a 5, sapendo che il risultato del primo dado è un numero pari.

Soluzione:

Si tratta di calcolare una probabilità condizionata. Indicato infatti con A l'evento "a somma dei risultati dà un numero minore o uguale a 5" e con B l'evento "il risultato del primo dado è un numero pari", otteniamo che

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{4/36)}{1/2} = \frac{2}{9}$$