Soluzioni appello giugno 2015

Esercizio 1
Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x,y) = y^3 - x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + 2xy + x^2 + y^2 - 4x - 4y$$

1. Calcolare i punti stazionari di f e determinare se sono di massimo locale, minimo locale o sella.
2. Calcolare il massimo e minimo assoluto di f sul segmento congiungente il punto (0,0) con il punto (1,1).

Soluzione:

1. Il gradiente di f è il vettore $\nabla f(x,y) = (-3x^2 + 6xy - 3y^2 + 2y + 2x - 4, 3y^2 + 3x^2 - 6xy + 2y + 2x - 4)$. Le coordinate (x,y) dei punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -3x^2 + 6xy - 3y^2 + 2y + 2x - 4 = 0 \\ 3y^2 + 3x^2 - 6xy + 2y + 2x - 4 = 0 \end{cases}$$

che può essere riscritto (sommando e sottraendo le due equazioni)

$$\begin{cases} 4y + 4x - 8 = 0 \\ 6y^2 + 6x^2 - 12xy = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y + x - 2 = 0 \\ (x-y)^2 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione il punto $(x,y) = (1,1)$. La matrice Hessiana in (1,1) è

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha traccia 4 e determinante 0. I due autovalori sono quindi $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 0$ e non è possibile stabilire dall'analisi della matrice Hessiana se il punto (1,1) è di minimo locale oppure di sella. Analizzando il segno di $f(x,y) - f(1,1) = y^3 - x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + 2xy + x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4$ lungo rette passanti per (1,1), in particolare lungo la retta di parametrizzazione

$$(x(t), y(t) = (1+t, 1-t)$$

otteniamo:

$$f(x(t), y(t)) - f(1,1) = -8t^3,$$

da cui possiamo dedurre che in un intorno di (1,1) il segno di $f(x,y) - f(1,1)$ cambia e il punto è quindi di sella.

2. le coordinate dei punti del segmento congiungente (0,0) e (1,1) sono:

$$(x,x), \qquad x \in [0,1]$$

In tali punti la funzione vale

$$f(x,x) = 4x(x-2)$$

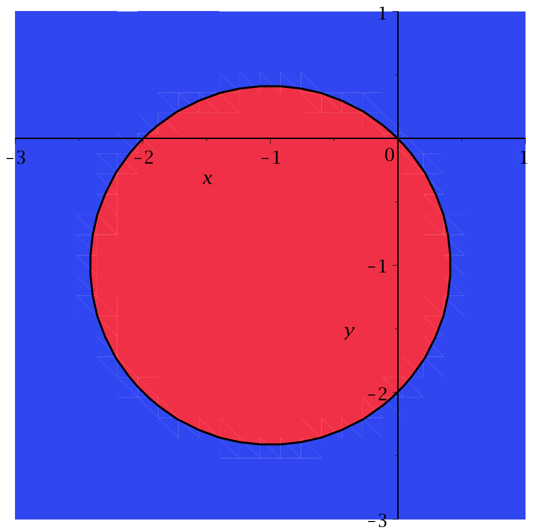
Il minimo assoluto di tale funzione per $x \in [0,1]$ è raggiunto nel punto $x = 1$ e vale -4, mentre il massimo assoluto in $x = 0$ e vale 0.

Esercizio 2
Si indichi con $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ la parte la parte del cilindro $C = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : (x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 2\}$ compresa tra i piani $z = 0$ e $x + y + z = 1$.

1. Rappresentare graficamente la proiezione di Ω sul piano $z = 0$.
2. Rappresentare graficamente la retta r intersezione tra i piani $z = 0$ e $x + y + z = 1$.
3. Calcolare l'integrale $\int\int\int_\Omega f(x, y, z)dxdydz$, dove $f(x, y, z) = x$.

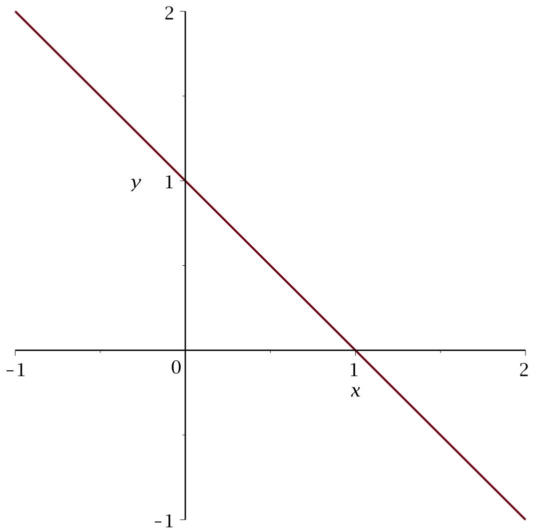
Soluzione:

1. La proiezione di Ω sul piano $z = 0$ è il cerchio di centro (-1,-1) e raggio $\sqrt{2}$.



il cerchio di centro (-1,-1) e raggio $\sqrt{2}$

2. La retta r intersezione tra i piani $z = 0$ e $x + y + z = 1$ è la retta giacente nel piano xy e di equazione $y = 1 - x$



la retta di equazione $y = 1 - x$

3. Integrando "per fili"

$$\int\int\int_\Omega f(x, y, z)dxdydz = \int\int_D (\int_0^{1-x-y} xdz)dxdy,$$

dove $D \subset \mathbf{R}^2$, $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 2\}$. Abbiamo quindi:

$$\int\int\int_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int\int_D (\int_0^{1-x-y} xdz)dxdy = \int\int_D (1-x-y)xdxdy$$

Utilizzando le coordinate polari nel piano centrate in (-1,-1):

$$x = -1 + \rho\cos\theta, \qquad y = -1 + \rho\sin\theta$$

$$\int\int_D (1-x-y)xdxdy = \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}(-1+\rho\cos\theta)(3-\rho\sin\theta-\rho\cos\theta)\rho d\rho d\theta = -6\pi - \frac{1}{2}$$

Esercizio 3 Si calcoli il flusso del campo vettoriale $F(x,y,z) = (2,1,0)$ attraverso la superficie Σ intersezione della sfera $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$, con il piano di equazione $x+y+z=0$, orientata in modo tale che il versore normale soddisfi la diseguaglianza $\hat{n} \cdot \hat{k} > 0$.
Soluzione:
La superficie Σ è un cerchio di raggio 1 che giace sul piano di equazione $x+y+z=0$. Il suo vettore normale è $N = (1,1,1)$ ed il versore normale è dunque $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Il flusso del campo vettoriale F attraverso Σ è dato quindi da:

$$\int\int_\Sigma F \cdot \hat{n}dS = \frac{1}{\sqrt{3}}\int\int_\Sigma (2,1,0)(1,1,1)dS = \sqrt{3}\int\int_\Sigma dS = \sqrt{3}\pi$$

Esercizio 4
Calcolare versore tangente, versore normale, versore binormale e curvatura della curva parametrizzata da

$$\alpha(t) = (t^2, t^4 - 2, t^3), \qquad t \in (0,1)$$

Soluzione:

$$\alpha'(t) = (2t, 4t^3, 3t^2) \quad \alpha''(t) = (2, 12t^2, 6t), \quad \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = 2t^2(-6t^2, -3, 8t)$$
$$\|\alpha'(t)\| = |t|\sqrt{4 + 16t^4 + 9t^2} \qquad \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| = 2t^2\sqrt{9 + 36t^4 + 64t^2}$$

Abbiamo dunque, per $t \in (0,1)$:

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{(2, 4t^2, 3t)}{\sqrt{4+16t^4+9t^2}}, \quad B(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} = \frac{(-6t^2, -3, 8t)}{\sqrt{9+36t^4+64t^2}}$$

$$N(t) = B(t) \wedge T(t) = \frac{(-9t - 32t^3, 18t^3 + 16t, -24t^4 + 6)}{\sqrt{4+16t^4+9t^2}\sqrt{9+36t^4+64t^2}}, \quad k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{2t^2\sqrt{9+36t^4+64t^2}}{(|t|\sqrt{4+16t^4+9t^2})^3}$$