Esercizi su limiti di funzioni di piu' variabili

Studiare l'esistenza e, in caso affermativo, calcolare il valore dei seguenti limiti:

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{y}$,
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{y}$,
3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sin y}$,
4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sin xy}$,
5. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{|x|+|y|}$,
6. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|}$,
7. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$,
8. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$,
9. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{2x^4+y^2}$,

Soluzioni

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{y}$ non esiste. É sufficiente studiare il comportamento della funzione lungo rette passanti per l'origine, di equazione $y = mx$, con $m \in \mathbb{R}$.
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{y}$ non esiste. É sufficiente studiare il comportamento della funzione lungo parabole passanti per l'origine, di equazione $y = ax^2$, con $a \in \mathbb{R}$.
3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sin y}$ non esiste. Anche in questo caso è sufficiente studiare il comportamento della funzione lungo parabole passanti per l'origine, di equazione $y = ax^2$, con $a \in \mathbb{R}$.
4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sin xy} = 1$. Per mostrarlo è sufficiente rappresentare la funzione $f(x,y) = \frac{xy}{\sin xy}$ come composizione di due funzioni: $f(x,y) := (h \circ g)(x,y)$, con $g(x,y) = xy$ e $h(t) = \frac{t}{\sin t}$. Inoltre $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$ e $\lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} = 0$.
5. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{|x|+|y|}$ non esiste. É sufficiente studiare il comportamento della funzione lungo rette passanti per l'origine, di equazione $y = mx$, con $m \in \mathbb{R}$.

6. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|} = 0$. Per mostrarlo utilizziamo le coordinate polari centrate in $(0,0)$:

$$\left|\frac{xy}{|x|+|y|}\right| = \rho\frac{|\sin\theta\cos\theta|}{|\sin\theta|+|\cos\theta|} \leq \rho\frac{1}{\sqrt{2}},$$

dove $\lim_{\rho\to 0} \rho\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$.

7. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$. Per mostrarlo utilizziamo le coordinate polari centrate in $(0,0)$:

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \rho|\cos^2\theta\sin\theta| \leq \rho$$

dove $\lim_{\rho\to 0} \rho = 0$.

8. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ non esiste. É sufficiente studiare il comportamento della funzione lungo parabole passanti per l'origine, di equazione $y = ax^2$, con $a \in \mathbb{R}$.

9. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{2x^4+y^2} = 0$. Per mostrarlo utilizziamo le coordinate polari centrate in $(0,0)$:

$$\left|\frac{xy^2}{2x^4+y^2}\right| = \rho\frac{|\sin^2\theta\cos\theta|}{|\sin^2\theta+2\rho^2\cos^4\theta|} = \rho\frac{|\cos\theta|}{|1+2\rho^2\frac{\cos^4\theta}{\sin^2\theta}|} \leq \rho$$

dove $\lim_{\rho\to 0} \rho = 0$.