Soluzioni appello scritto del 1 luglio 2015

Esercizio 1 (7 punti)
Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ il campo vettoriale $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$

$$F(x, y) = (x^2 - \alpha y, y^2 + 2x)$$

è conservativo? Per tale valore di α si determini un potenziale $U : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$.
Si calcoli inoltre, per ogni valore di α, il lavoro di F lungo l'arco di parabola passante per i punti $(0, 1)$, $(1, 0)$ e $(2, 1)$.
Soluzione:
Dato che il campo è definito su tutto $\mathbf{R}^2$, che è un insieme semplicemente connesso, condizione necesaria e sufficiente per assicurare che F è conservativo è $\frac{\partial}{\partial x} F_y = \frac{\partial}{\partial y} F_x$, da cui otteniamo $\alpha = -2$. Per tale valore di α il campo è $F(x, y) = (x^2 + 2y, y^2 + 2x)$ e è ottenibile come gradiente del potenziale $U(x, y) = x^3/3 + y^3/3 + 2xy$.
La parabola passante per i punti $(0, 1)$, $(1, 0)$ e $(2, 1)$ ha equazione $y = (x-1)^2$, e può essre parametrizzata dalla mappa $\gamma : [0, 2] \to \mathbf{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t, (t-1)^2)$. IL lavoro di F lungo tale curva è dato da

$$\int F \cdot ds = \int_0^2 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^2 (t^2 - \alpha(t-1)^2, (t-1)^4 + 2t) \cdot (1, 2(t-1)) dt = \frac{16}{3} - \frac{2}{3}\alpha$$

Esercizio 2 (8 punti)
Sia $T \subset \mathbf{R}^2$ il triangolo (pieno) di vertici (0,0), (-1,-2) e (1,-1) e $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2y$. Calcolare il massimo ed il minimo assoluto di f su T.
Soluzione:
Prima di tutto cerchiamo i punti stazionari all'interno di T. I punti in cui $\nabla f(x, y) = (2x, 2y + 2) = (0, 0)$ sono le soluzioni del sistema

$$\{ \; 2x = 02y + 2 = 0$$

cioé il punto (0,-1) in cui la funzione vale $f(0, -1) = -1$
Analizziamo ora il bordo:

- il segmento congiungente il punto (0,0) con il punto (1,-1), parametrizzato con $\alpha(t) = (t, -t)$, $t \in [0, 1]$, dove la funzione vale $f(t, -t) = 2t^2 - 2t$. Abbiamo che $\frac{d}{dt} f(t, -t) = 4t - 2$si annulla per $t = 1/2$, dobbiamo controllare il valori della funzione f in (1/2,-1/2), dove $f(1/2, -1/2) = -1/2$, e nei punti del bordo, dove $f(0, 0) = 0$ e $f(1, -1) = 0$.

- il segmento congiungente il punto (0,0) con il punto (-1,-2), parametrizzato con $\alpha(t) = (t, 2t)$, $t \in [-1, 0]$, dove la funzione vale $f(t, 2t) = 5t^2 - +4t$. Abbiamo che $\frac{d}{dt} f(t, 2t) = 10t + 4$ si annulla per $t = -2/5$, dobbiamo controllare il valori della funzione f in (-2/5,-4/5), dove $f(-2/5, -4/5) = -4/5$, e nei punti del bordo, dove $f(0, 0) = 0$ e $f(-1, -2) = 1$.

- il segmento congiungente il punto (-1,-2) con il punto (1,-1), parametrizzato con $\alpha(t) = (2t - 1, t - 2)$, $t \in [0, 1]$, dove la funzione vale $f(2t-1, t-2) = (2t-1)^2 + (t-2)^2 + 2(t-2)$. Abbiamo che $\frac{d}{dt} f(2t - 1, t - 2) = 2(5t - 3)$ si annulla per $t = 3/5$, dobbiamo controllare il valori della funzione f in $\alpha(3/5) = (1/5, -7/5)$, dove $f(1/5, -7/5) = -4/5$, e nei punti del bordo, dove $f(1, -1) = 0$ e $f(-1, -2) = 1$.

Concludendo, il punto di minimo assoluto di f su T è il punto (0,-1) in cui f vale -1, mentre il punto di massimo assoluto di f su T è il punto (-1,-2) in cui f vale 1.
Esercizio 3 (7 punti) Si calcoli il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (x, y, 1)$ attraverso la

superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1\}$ orientata in modo che il versore normale $\hat{n}$ soddisfi la diseguaglianza $\hat{n} \cdot \hat{e}_z > 0$.

Soluzione:

Rappresentando la superficie Σ in forma paramentrica tramite la funzione $R : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$:

$$r(x, y) = (x, y, 1 - x - y), \qquad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq o, y \geq 0, y \leq 1 - x\}$$

otteniamo. $N(x, y) = (1, 1, 1)$. Il flusso del campo vettoriale F attraverso Σ è dato da:

$$\begin{aligned}\int\int_\Sigma F \cdot \hat{n} dS &= \int\int_D (x, y, 1)(1, 1, 1) dxdy = \int\int_D (x + y + 1) dxdy \\ &= \int_0^1 (\int_0^{1-x} (x + y + 1) dy) dx = \int_0^1 (x(1 - x) + (1 - x)^2/2 + 1 - x) dx = 5/6\end{aligned}$$

Esercizio 4 (8 punti)

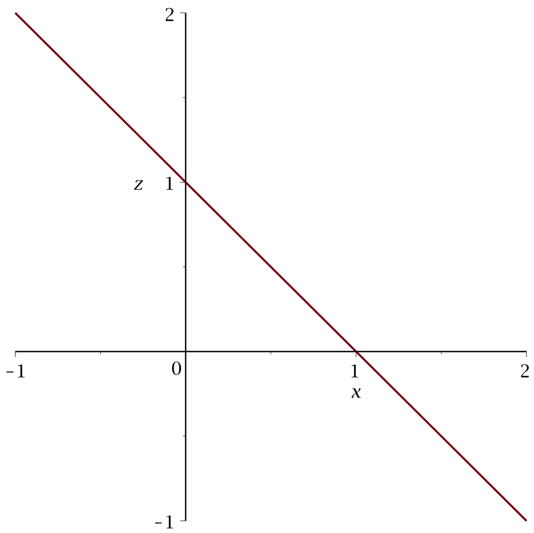
Sia Ω la parte del cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x^2 + z^2 \leq 1\}$ compresa tra i piani $y = 0$ e $x + y + z = 1$:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x^2 + z^2 \leq 1, y \geq 0, x + y + z \leq 1\}$$

1. Rappresentare graficamente la retta intersezione tra i piani $y = 0$ e $x + y + z = 1$
2. Rappresentare graficamente la proiezione di Ω sul piano $y = 0$
3. Calcolare l'integrale triplo della funzione $f(x, y, z) = x + z$ sull'insieme Ω

Soluzione:

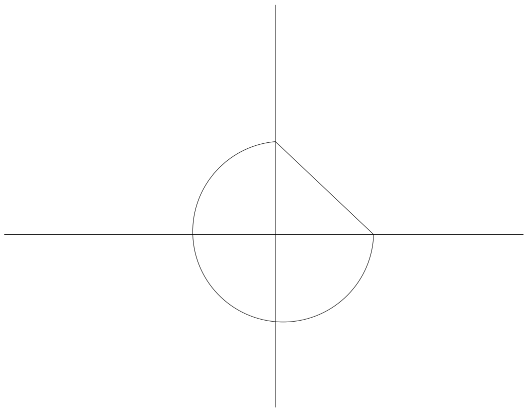
1. La retta intersezione tra i piani $y = 0$ e $x + y + z = 1$ giace sul piano xz e, su tale piano, è descritta dall'equazione $z = 1 - x$



la retta sul piano xz di equazione $z = 1 - x$

2. La proiezione di Ω sul piano $y = 0$ è il sottoinsieme D del piano xz descritto da

$$D = \{(x, z) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + z^2 \leq 1, z \leq 1 - x\}$$



L'insieme D, proiezione di Ω sul piano xz

3. L'integrale triplo della funzione $f(x, y, z) = x + z$ sull'insieme Ω può essere calcolato "per fili":

$$\begin{aligned}\int\int\int_\Omega (x+z)dxdydz &= \int\int_D \left(\int_0^{1-x-z} (x+z)dy\right) dxdz = \int\int_D (1-x-z)(x+z)dxdz \\ &= \int\int_{D_1} (1-x-z)(x+z)dxdz + \int\int_{D_2} (1-x-z)(x+z)dxdz\end{aligned}$$

dove $D = D_1 \cup D_2$, D_2 è il triangolo $D_2 = \{(x, z) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, z \geq 0, z \leq 1-x\}$ e $D_1 = D \setminus D_2$. Abbiamo

$$\int\int_{D_2} (1-x-z)(x+z)dxdz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-z)(x+z)\right) dx = \frac{1}{12},$$

mentre l'integrale sull'insieme D_1 può essere calcolato in coordinate polari:

$$\int\int_{D_1} (1-x-z)(x+z)dxdz = \int_0^1 \int_{\pi/2}^{2\pi} (\rho\sin\theta + \rho\cos\theta - \rho^2 - 2\rho\sin\theta\cos\theta)\rho d\rho d\theta = -\frac{5}{12} - \frac{3\pi}{8}$$

Concludendo

$$\int\int\int_\Omega (x+z)dxdydz = \frac{1}{12} - \frac{5}{12} - \frac{3\pi}{8} = -\frac{1}{3} - \frac{3\pi}{8}$$