Soluzioni appello scritto settembre 2015

Esercizio 1 (7 punti)
Calcolare l'integrale di volume $\int\int\int_\Omega f(x,y,x)dxdydz$ della funzione $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ definita da $f(x,y,z):=2x+y$ sull'insieme $\Omega:=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 2, y\ge\sqrt{x^2+z^2}\}$, cioé quella parte della sfera di centro (0,0,0) e raggio $\sqrt{2}$ interna al cono infinito $C=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : y\ge\sqrt{x^2+z^2}\}$.

Soluzione:
Introduciamo il cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} x(\rho,\phi,\theta)=\rho\sin\phi\cos\theta \\ y(\rho,\phi,\theta)=\rho\cos\phi \\ z(\rho,\phi,\theta)=\rho\sin\phi\sin\theta \end{cases} \qquad \rho\in[0.+\infty),\phi\in[0,\pi),\theta\in[0,2\pi)$$

Il valore assoluto del determinante della matrice Jacobiana è $|\det J(\rho,\phi,\theta)|=\rho^2\sin\phi$. L'integrale $\int\int\int_\Omega f(x,y,x)dxdydz$ può essere calcolato come:

$$\begin{aligned}\int\int\int_\Omega f(x,y,x)dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{2}}(2\rho\sin\phi\cos\theta+\rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta \\ &= 2\pi\int_0^{\pi/4}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3 d\rho=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Esercizio 2 (8 punti)
Individuare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione

$$f(x,y)=x^2y^3-x^2y^4-x^3y^3$$

nel triangolo di vertici (0,0), (1,1), (-1,1).
Soluzione:

Cerchiamo prima di tutto i punti stazionari interni al triangolo. Per trovare i punti in cui $\nabla f=(0,0)$, cerchiamo le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2xy^3-2xy^4-3x^2y^3=0 \\ 3x^2y^2-4x^2y^3-3x^3y^2=0 \end{cases}$$

cioé

$$\begin{cases} xy^3(2-2y-3x)=0 \\ x^2y^2(3-4y-3x)2=0 \end{cases}$$

che sono $x=0$ (l'asse delle ordinate), $y=0$ (l'asse delle ascisse) e il punto $(1/3,1/2)$. Fra questi punti, gli unici interni al triangolo T sono quelli appartenenti all'asse delle ordinate, con coordinate $(0,y)$, con $0<y<1$ in cui la funzione vale $f(0,y)=0$, ed il punto $(1/3,1/2)$ in cui la funzione vale $f(1/3,1/2)=\frac{5}{432}$.
Analizziamo ora il bordo del triangolo composto da tre segmenti:

1. Il segmento congiungente il punto (-1,1) con il punto (1,1), che può essere parametrizzato tramite la mappa $\alpha:[-1,1]\to\mathbf{R}^2$ definita da $\alpha(x)=(x,1)$. Su tale segmento la funzione vale $f(x,1)=-x^3$, che nell'intervallo $[-1,1]$ assume il valore minimo in $x=1$ dove $f(1,1)=-1$, mentre assume il valore massimo in $x=-1$ dove $f(-1,1)=1$.

2. Il segmento congiungente il punto (0,0) con il punto (1,1), che può essere parametrizzato tramite la mappa $\alpha:[0,1]\to\mathbf{R}^2$ definita da $\alpha(x)=(x,x)$. Su tale segmento la funzione vale $f(x,x)=x^5-2x^6$. Tale funzione ammette un punto stazionario in $x=5/12$, in cui la funzione f vale $f(5/12,5/12)=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{12}\right)^5$, mente agli estremi si ha $f(0,0)=0$ e $f(1,1)=-1$. Possiamo concludere che nell'intervallo $[0,1]$ assume il valore massimo in $x=5/12$, mentre assume il valore minimo in $x=1$.

3. Il segmento congiungente il punto (0,0) con il punto (-1,1), che può essere parametrizzato tramite la mappa $\alpha : [-1,0] \to \mathbf{R}^2$ definita da $\alpha(x) = (x, -x)$. Su tale segmento la funzione vale $f(x,-x) = -x^5$, che nell'intervallo $[-1,0]$ assume il valore massimo in $x = -1$ dove $f(-1,1) = 1$, mentre assume il valore minimo in $x = 0$ dove $f(0,0) = 0$.

Concludendo, il punto di massimo assoluto di f nel triangolo T è (-1,1) in cui $f = 1$, mentre il punto di minimo assoluto è (1,1) in cui $f = -1$.

Esercizio 3 (7 punti) Si calcoli il flusso del campo vettoriale $F(x,y,z) = (x, 2y, -z)$ attraverso la superficie $\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, y+z > 0\}$, orientata in modo tale che il versore normale $\hat{n}(x,y,z)$ nel punto $(x,y,z) \in \Sigma$ soddisfi la diseguaglianza $\hat{n}(x,y,z) \cdot (x,y,z) > 0$.

Soluzione:

Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ la semisfera a di sopra del piano $y + z = 0$:

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, y+z > 0\}$$

La frontiera $\partial\Omega$ di Ω è l'unione di due superfici: la calotta Σ e il cerchio $C := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, y+z = 0\}$. Utilizzando il teorema della divergenza abbiamo:

$$\int\int\int_{\Omega} divF(x,y,z)dxdydz = \int\int_C F \cdot \hat{n}_e dS + \int\int_{\Sigma} F \cdot \hat{n}_e dS$$

Abbiamo che

$$\int\int\int_{\Omega} divF(x,y,z)dxdydz = 2Vol(\Omega) = 2\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$$

Per quanto riguarda l'integrale di superficie sul cerchio C (giacente sul piano $y+z = 0$), introduciamo la parametrizzazione

$$r(x,y) = (x, y, -y), \qquad (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1\}.$$

Il vettore normale (uscente da Ω) è dato da $N(x,y) = \frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial r}{\partial y} = (0,-1,-1)$. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\int\int_C F \cdot \hat{n}_e dS &= \int\int_D F(x,y,-y) \cdot N(x,y)dxdy = \int\int_D (x,2y,y) \cdot (0,-1,-1)dxdy \\ &= \int\int_D (-3y)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (-\frac{3}{\sqrt{2}}\rho\sin\theta)\frac{\rho}{\sqrt{2}}d\rho d\theta = 0,\end{aligned}$$

dove nel calcolo dell'ultimo integrale sono state utilizzate le coordinate ellittiche nel piano $x = \rho\cos\theta$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin\theta$.

Dal teorema della divergenza otteniamo quindi

$$\int\int_{\Sigma} F \cdot \hat{n}_e dS = \frac{4}{3}\pi$$

Esercizio 4 (8 punti)

Si consideri la curva piana $\gamma \subset \mathbf{R}^2$ descritta in forma forma parametrica dalla mappa $\alpha : [0,\pi] \to \mathbf{R}^2$:

$$\alpha(\theta) = \Big((\cos\theta)^2, \cos\theta\sin\theta\Big), \quad \theta \in [0,\pi].$$

- Calcolare la lunghezza di γ.
- Calcolare, punto per punto, la curvatura.
- Descrivere e rappresentare graficamente la curva γ

Soluzione:

- La lunghezza di γ è data da
$$\int_0^\pi \|\alpha'(\theta)\| d\theta = \int_0^\pi 1 d\theta = \pi$$
infatti $\alpha'(\theta) = (-2\sin\theta cos\theta, -sin^2\theta + \cos^2\theta) = (-\sin(2\theta), \cos(2\theta))$.

- Per calcolare la curvatura utilizziamo la formula $K = T'(\theta)/\|\alpha'\theta\|$, dove $T(\theta) = \alpha'(\theta)/\|\alpha'\theta\|$ è il versore tangente alla curva. Dato che $T(\theta) = (-\sin(2\theta), \cos(2\theta))$ e $T'(\theta) = (-2\cos(2\theta), -2\sin(2\theta))$ otteniamo $K(\theta) = 2$.

- Notiamo che γ è una curva piana con curvatura costante pari a 2. Deduciamo che γ è una circonferenza di raggio 1/2. Di fatto la curva γ è la circonferenza di centro $(1/2, 0)$ e raggio 1/2, infatti le coordinate x, y dei sui punti soddisfano l'equazione $(x - 1/2)^2 + y^2 = 1/2$, come si può facimente verificare sostituendo a x, y le espressioni $x(\theta) = \cos^2\theta$ e $y(\theta) = \cos\theta\sin\theta$.