Soluzioni compito scritto settembre 2016

Esercizio 1

Si consideri la superficie $\Sigma \in \mathbb{R}^3$ definita da

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z^2 - x^2 - y^2 = 0, 0 \leq z \leq 1\}$$

1. Fornire una parametrizzazione di Σ.
2. Calcolare il massimo e minimo assoluto della funzione $f(x,y,z) = 2x + y + z$ sull'insieme Σ.

Soluzione:

1. Σ è la superficie laterale di un cono con vertice nell'origine. Una possibile parametrizzazione è data dalla funzione $r : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$:

   $$r(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2}), \qquad (x,y) \in D, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}.$$

   Una parametrizzazione alternativa può essere ricavata utilizzando le coordinate cilindriche nello spazio. Consideriamo infatti la mappa $\tilde{r} : \tilde{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$:

   $$\tilde{r}(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho), \qquad (\rho,\theta) \in \tilde{D}, \quad \tilde{D} = [0,1] \times [0, 2\pi].$$

2. Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, riguardando la superficie Σ come un sottoinsieme del luogo di zeri della funzione (di classe $C^1(\mathbb{R}^3)$) $g(x,y,z) = z^2 - x^2 - y^2$. Notiamo che il punto $(0,0,0) \in \Sigma$ va analizzato a parte perché $\nabla g(0,0,0) = (0,0,0)$ e quindi calcoliamo subito il valore della funzione f in tale punto ottenendo $f(0,0,0) = 0$.
   Per applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange dobbiamo cercare i punti $(x,y,z) \in \Sigma$ in cui $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$ per un opportuno $\lambda \in \mathbb{R}$. Introducendo la funzione Lagrangiana $L(x,y,z,\lambda) = 2x+y+z-\lambda(z^2-x^2-y^2)$ e cercando i punti in cui $\nabla L = (0,0,0,0)$ otteniamo il sistema:

   $$\begin{cases} 2 + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ 1 - 2\lambda z = 0 \\ z^2 - x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

   che non ha soluzioni.
   Resta da analizzare la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$. Su tale curva la funzione vale $f(x,y,1) = 2x + y + 1$. Per studiare massimo e minimo di tale

funzione (di due variabili x e y) sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ utilizziamo ancoro il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La funzione Lagrangiana è $L(x, y, \lambda) = 2x + y + 1 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Imponendo $\nabla L = (0, 0, 0)$ otteniamo

$$\begin{cases} 2 - 2\lambda x = 0 \\ 1 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni di tale sistema otteniamo $x = 2y$. Sostituendo nella terza si ha $5y^2 = 1$ e quindi si ottengono due soluzioni: il punto $(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}, 1)$, in cui f vale $\sqrt{5} + 1$, ed il punto $(-2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}, 1)$, in cui f vale $-\sqrt{5} + 1$.

Concludendo il punto di massimo assoluto di f su Σ è $(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}, 1)$, in cui f vale $\sqrt{5} + 1$, mentre il punto di minimo assoluto è $(-2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}, 1)$, in cui f vale $-\sqrt{5} + 1$.

Esercizio 2

Si calcoli l'integrale triplo $\int\int\int_\Omega f(x, y, z)dxdydz$ dove $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è la funzione $f(x, y, z) = xy + z$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ è la piramide di vertici (0,0,0), (0,0, 2), (1,-1,0) e (1,1,0).

Soluzione: Integriamo per fili riguardando la piramide come l'insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ della forma

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in T, 0 \leq z \leq -2x + 2\},$$

dove $T \subset \mathbb{R}^2$ è il triangolo nel piano xy di vertici (0,0), (1,-1) e (1,1), mentre il secondo estremo nella variabile z è stato ricavato derivando l'equazione del piano passante per i tre vertici (0,0,2), (1,-1,0) e (1,1,0), cioé $z = -2x + 2$.
Integrando per fili otteniamo

$$\begin{aligned} \int\int\int_\Omega (xy + z)dxdydz &= \int\int_T \left(\int_0^{-2x+2} (xy + z)dz \right) dxdy \\ &= \int\int_T \left(xy(-2x + 2) + \frac{(-2x + 2)^2}{2} \right) dxdy \\ &= 2\int_0^1 \left(\int_{-x}^{x} (xy(-x + 1) + (-x + 1)^2)dy \right) dx \\ &= 4\int_0^1 x(-x + 1)^2 dx = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Esercizio 3

Si calcoli il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (2, 1, 0)$ attraverso la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, z \leq 2x+3y\}$ orientata in modo tale che per ogni punto $(x, y, z) \in \Sigma$ il versore normale $\hat{n}$ in un quel punto soddisfi la diseguaglianza $\hat{n} \cdot (x, y, z) > 0$.

Soluzione:

Dobbiamo calcolare il flusso del campo F uscente dalla parte di superficie sferica di centro (0,0,0) e raggio 1 che si trova al di sotto del piano (passante per il entro della sfera) di equazione $z = 2x + 3y$. Notiamo che tale piano taglia la sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ formando un cerchio di raggio massimo (pari a 1). Calcoliamo in flusso di F attraverso Σ utilizzando opportunamente il teorema della divergenza. Consideriamo l'insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definito da $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \leq 2x + 3y\}$, cioé la parte della sfera piena di equazione $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ che si trova al di sotto del piano $z = 2x + 3y$. Per il teorema della divergenza abbiamo:

$$\begin{aligned} \int\int\int_\Omega \operatorname{div} F(x, y, z) dxdydz &= \int\int_{\partial\Omega} F \cdot \hat{n}_e dS \\ 0 &= \int\int_\Sigma F \cdot \hat{n} dS + \int\int_C F \cdot \hat{n} dS \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $\operatorname{div} F = 0$ e che la frontiera $\partial\Omega$ di Ω è composta dalla superficie Σ e dal cerchio C intersezione tra la sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ed il piano $z = 2x + 3y$. Nell'equazioni sopra $\hat{n}$ indica il versore normale alle superfici descritte, scelto con il verso uscente dall'insieme Ω. In particolare, nel caso del cerchio C, il versore normale uscente n è l'unico vettore ortogonale al piano $z = 2x + 3y$ di norma 1 e con terza componente positiva (cioé che punta verso l'alto). Dall'equazione del piano $2x + 3y - z = 0$ possiamo subito ricavare che $\hat{n}$ è un multiplo di $N = (2, 3, -1)$, quindi $\hat{n} = \frac{(-2,-3,1)}{\sqrt{14}}$ Abbiamo dunque

$$\int\int_\Sigma F \cdot \hat{n} dS = -\int\int_C F \cdot \hat{n} dS = -\int\int_C (2, 1, 0) \cdot \frac{(-2, -3, 1)}{\sqrt{14}} dS = \frac{7\pi}{\sqrt{14}}$$

Esercizio 4

Calcolare versore tangente, versore normale, versore binormale e curvatura della curva parametrizzata da

$$\alpha(t) = (2t, t^3 - 1, t^4), \qquad t \in (0, 1).$$

Soluzione: Utilizziamo le formule

$$T = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{(2, 3t^2, 4t^3)}{\sqrt{4 + 9t^4 + 16t^6}}$$

$$B = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} = \frac{(t^3, -2t, 1))}{\sqrt{1 + 4t^2 + t^6}}$$

$$N = B \wedge T = \frac{(-8t^4 - 3t^2, 2 - 4t^6, 3t^5 + 4t)}{\sqrt{(4 + 9t^4 + 16t^6)(1 + 4t^2 + t^6)}}$$

$$k = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{12|t|\sqrt{1 + 4t^2 + t^6}}{(4 + 9t^4 + 16t^6)^{3/2}}$$