Superfici e integrali di superficie

1. Scrivere una parametrizzazione per le seguenti superfici
   (a) Il grafico della funzione $f(x,y) = x^2y^3$
   (b) La superficie laterale di un cilindro di raggio R e altezza h, il cui asse di simmetria è l'asse z
   (c) La superficie laterale di un cilindro di raggio R e altezza h, il cui asse di simmetria è l'asse x
   (d) La porzione di superficie sferica centrata in (0,0,0) e raggio 2 compresa tra il piano $z = 0$ ed il piano $z = 1$

2. Calcolare, punto per punto, il vettore normale alla superficie dell'elissoide di semiassi a, b, c, di equazione parametrica

$$r(\phi,\theta) = (a\sin\phi\cos\theta, b\sin\phi\sin\theta, c\cos\phi) \qquad \phi \in [0,\pi],\ \theta \in [0,2\pi)$$

3. Calcolare, punto per punto, il vettore normale alla superficie parametrizzata da

$$r(u,v) = (u+v, u^2+v^2, u^3+v^3), \qquad (u,v) \in [1,2]\times[1,2]$$

4. Calcolare, punto per punto, il vettore normale alla superficie grafico della funzione $f(x,y) = xy$ (paraboloide iperbolico). Calcolare quindi l'area della porzione di superficie che si proietta sull'insieme D del piano xy di equazione $x^2 + y^2 \leq 1$

5. Calcolare, punto per punto, il vettore normale alla superficie del toro, di equazione parametrica

$$r(\phi,\theta) = ((3+\sin\phi)\cos\theta, (3+\sin\phi)\sin\theta, \cos\phi), \qquad \phi \in [0,2\pi),\ \theta \in [0,2\pi)$$

   Calcolare poi l'area della superficie.

6. Calcolare l'area della superficie parametrizzata da

$$r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v) \qquad u \in [0,1],\ v \in [0,2\pi]$$

7. Calcolare l'area della porzione di superficie conica di equazione $z^2 = y^2 + x^2$ interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 \leq 1$

8. Calcolare l'integrale della funzione $f(x,y,z) = (x^2+y^2)^{1/2}z$ sulla superficie di equazione

$$r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v) \qquad u \in [0,1],\ v \in [0,2\pi]$$

9. Calcolare l'integrale della funzione $f(x,y,z) = x+y$ sulla porzione di superficie conica $z = \sqrt{x^2+y^2}$ che si proietta sul piano xy sull'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$

10. Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{i}+\mathbf{k}$ attraverso la superficie di equazione

$$r(u,v) = (u^2, \sqrt{2}uv, v^2) \qquad (u,v) \in A$$
$$A := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2, \ : \ 1 \le u^2+v^2 \le 2, u < v\}$$

11. Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = y^2\mathbf{i}+x\mathbf{j}$ lungo il bordo del quadrato di vertici (0,0), (1,0), (1,1), (0,1), percorso in senso antiorario.

12. Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = z\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + y^2z\mathbf{k}$ uscente dalla superficie del solido

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1+x^2+y^2\}$$

13. Dato il campo $\mathbf{F}(x,y,z) = xy\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}+yz\mathbf{k}$ calcolare il flusso di r$ot\mathbf{F}$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 = 1, z \ge 0\}$$

orientata in modo che il vesore normale abbia la terza componente non negativa

14. Calcolare il flusso dell campo $\mathbf{F}(x,y,z) = 2x\mathbf{i}+4y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ uscente dalla superficie dell'ellissoide di equazione $x^2+4y^2+2z^2 = 4$

Soluzioni

1. (a) $r(x,y) = (x,y,x^2y^3)$
   (b) $r(\theta,z) = (R\cos\theta, R\sin\theta, z)$, $\theta \in [0,2\pi]$, $z \in [0,h]$
   (c) $r(\theta,x) = (x, R\cos\theta, R\sin\theta)$, $\theta \in [0,2\pi]$, $x \in [0,h]$
   (d) $r(\phi,\theta) = (2\sin\phi\cos\theta, 2\sin\phi\sin\theta, 2\cos\phi)$, $\theta \in [0,2\pi]$, $\phi \in [\pi/3,\pi/2]$

2.
$$r(\phi,\theta) = (a\sin\phi\cos\theta, b\sin\phi\sin\theta, c\cos\phi) \qquad \phi\in[0,\pi],\ \theta\in[0,2\pi)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial\phi} &= (a\cos\phi\cos\theta, b\cos\phi\sin\theta, -c\sin\phi)\\
\frac{\partial r}{\partial\theta} &= (-a\sin\phi\sin\theta, b\sin\phi\cos\theta, 0)\\
\frac{\partial r}{\partial\phi}\wedge\frac{\partial r}{\partial\theta} &= (bc\sin^2\phi\cos\theta, ac\sin^2\phi\sin\theta, ab\sin\phi\cos\phi)
\end{aligned}$$

3.
$$r(u,v) = (u+v, u^2+v^2, u^3+v^3)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial u} &= (1, 2u, 3u^2)\\
\frac{\partial r}{\partial v} &= (1, 2v, 3v^2)\\
\frac{\partial r}{\partial u}\wedge\frac{\partial r}{\partial v} &= (6uv^2-6u^2v, 3u^2-3v^2, 2v-2u)
\end{aligned}$$

4. La superficie è parametrizzata da $r(x,y) = (x,y,xy)$, quindi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= (1,0,y)\\
\frac{\partial r}{\partial y} &= (0,1,x)\\
\frac{\partial r}{\partial x}\wedge\frac{\partial r}{\partial y} &= (-y,-x,1)
\end{aligned}$$

$$A(\Sigma) = \int\int_D \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+\rho^2}\rho d\rho d\theta = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

5.
$$r(\phi,\theta) = ((3+\sin\phi)\cos\theta, (3+\sin\phi)\sin\theta, \cos\phi), \qquad \phi\in[0,2\pi),\ \theta\in[0,2\pi)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial\phi} &= (\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, -\sin\phi)\\
\frac{\partial r}{\partial\theta} &= (-(3+\sin\phi)\sin\theta, (3+\sin\phi)\cos\theta, 0)\\
\frac{\partial r}{\partial\phi}\wedge\frac{\partial r}{\partial\theta} &= ((3+\sin\phi)\sin\phi\cos\theta, (3+\sin\phi)\sin\phi\sin\theta, (3+\sin\phi)\cos\phi)
\end{aligned}$$

$$A(\Sigma) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (3 + \sin\phi) d\phi d\theta = 12\pi^2$$

6.
$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v) \qquad u \in [0, 1],\ v \in [0, 2\pi]$$
$$\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} = (\sin v, -\cos v, u)$$
$$A(\Sigma) = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} du = \pi(\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}))$$

7. Per simmetria rispetto al piano xy, l'area della porzione di superficie conica di equazione $z^2 = y^2 + x^2$ interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 \leq 1$ si ottiene come il doppio dell'area della porzione di superficie conica di equazione $z = \sqrt{y^2 + x^2}$, con $x^2 + y^2 \leq 1$ (e quindi $z \leq 1$). Parametrizzando il cono in coordinate polari sferiche

$$r(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, \rho), \qquad \theta \in [0, 2\pi], \rho \in [0, 1]$$

otteniamo
$$A(\Sigma) = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{2} \rho d\rho d\theta = 2\sqrt{2}\pi$$

8. Calcolare l'integrale della funzione $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)^{1/2} z$ sulla superficie di equazione

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v) \qquad u \in [0, 1],\ v \in [0, 2\pi]$$

$$\int\int_\Sigma f dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 uv\sqrt{1 + u^2} du dv = \frac{2\pi^2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$

9. Calcolare l'integrale della funzione $f(x, y, z) = x + y + z$ sulla porzione di superficie conica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ che si proietta sul piano xy sull'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.
La superficie è parametrizzata da

$$r(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, \rho), \qquad \theta \in [0, 2\pi], \rho \in [1, 2]$$
$$\int\int_\Sigma f dS = \int_0^{2\pi} \int_1^2 (\rho cos\theta + \rho \sin\theta)\sqrt{2} \rho d\rho d\theta = 0$$

10. Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ attraverso la superficie di equazione

$$r(u,v) = (u^2, \sqrt{2}uv, v^2) \qquad u \in [0,1],\ (u,v) \in A$$
$$A := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2,\ :\ 1 \le u^2 + v^2 \le 2, u < v\}$$
$$r(u,v) = (u^2, \sqrt{2}uv, v^2) \qquad u \in [0,1],\ (u,v) \in A$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial u} &= (2u, \sqrt{2}v, 0) \\ \frac{\partial r}{\partial v} &= (0, 2\sqrt{u}, 2v) \\ \frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} &= (2\sqrt{2}v^2, -4uv, 2\sqrt{2}u^2) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\int\int_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int\int_A \mathbf{F}(r(u,v)) \cdot (\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}) dudv = 2\sqrt{2} \int\int_A (u^2 + v^2) dudv$$

L'ultimo integrale, sull'insieme piano A, che è una parte della corona circolare di raggi 1 e $\sqrt{2}$, può essere calcolato utilizzando le coordinate polari nel piano:

$$2\sqrt{2} \int\int_A (u^2 + v^2) dudv = 2\sqrt{2} \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_1^{\sqrt{2}} \rho^2\, \rho\, d\rho d\theta = 2\sqrt{2}\pi \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}$$

11. Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ lungo il bordo del quadrato di vertici (0,0), (1,0), (1,1), (0,1), percorso in senso antiorario.
Applicando il teorema del rotore

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds = \int\int_{[0,1]\times[0,1]} \mathrm{r}ot\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dxdy = \int_0^1 \int_0^1 (1 - 2y) dydx = 0$$

12. Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = z\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + y^2z\mathbf{k}$ uscente dalla superficie del solido

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ 2\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1 + x^2 + y^2\}$$

Applicando il teorema della divergenza

$$\int\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int\int\int_\Omega div\, \mathbf{F} dxdydz$$

dove $div\,\mathbf{F} = x^2 + y^2$. L'insieme Ω è l'insieme dei punti dello spazio compreso fra i grafici delle funzioni $2\sqrt{x^2+y^2}\ 1+x^2+y^2$ che si proietta sull'insieme dei punti (x,y) del piano tali che $2\sqrt{x^2+y^2} \leq 1+x^2+y^2$, ovvero $\sqrt{x^2+y^2} \leq 1$. Possiamo calcolare l'integrale triplo integrando per fili:

$$\begin{aligned}\int\int\int_\Omega div\,\mathbf{F} dxdydz &= \int\int_{x^2+y^2\leq 1} dxdy \int_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{1+x^2+y^2} (x^2+y^2)dz \\ &= \int\int_{x^2+y^2\leq 1} (x^2+y^2)(1+x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2})dxdy\end{aligned}$$

L'integrale doppio sul cerchio descritto da $x^2 + y^2 \leq 1$ può essere calcolato utilizzando le coordinate polari nel piano:

$$\begin{aligned}&\int\int_{x^2+y^2\leq 1} (x^2+y^2)(1+x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2})dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{0^1} \rho^2(1+\rho^2-2\rho)\rho d\rho = \frac{\pi}{30}\end{aligned}$$

13. Dato il campo $\mathbf{F}(x,y,z) = xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ calcolare il flusso di r$ot\mathbf{F}$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0\}$$

orientata in modo che il versore normale abbia la terza componente non negativa.
Applicando il teorema del rotore

$$\int\int_\Sigma \mathrm{r}ot\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \int_{\partial^+\Sigma} \mathbf{F}\cdot ds$$

dove il bordo di Σ orientato positivamente è la circonferenza di raggio 1 sul piano xy, percorsa in senso antiorario, parametrizzata da

$$\alpha(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0); \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Il lavoro di F lungo tale curva è quindi

$$\int_{\partial^+\Sigma} \mathbf{F}\cdot ds = \int_0^{2\pi} (\cos\theta\sin\theta, \cos^2\theta, 0)(-\sin\theta, \cos\theta, 0)d\theta = 0$$

14. Applicando il teorema della divergenza, il flusso dell campo $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ uscente dalla superficie dell'ellissoide di equazione $x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 4$ è pari all'integrale sull'ellissoide $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + 4y^2 + 2z^2 \leq 4\}$ della divergenza di F:

$$\int\int\int_{x^2+4y^2+2z^2\leq 4} (2 + 4 + 1) dxdydz = 7\, Vol(\Omega)$$

Scrivendo l'equazione di Ω come $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{2} \leq 1$, si deduce che i semiassi dell'ellissoide sono $a = 2$, $b = 1$, $c = \sqrt{2}$, quindi $Vol(\Omega) = \frac{4}{3}\pi abc = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$