Appendice A

Alcune nozioni matematiche rilevanti.

Vediamo in questa appendice alcune nozioni di grande importanza in meccanica classica e più in generale in fisica matematica. Si tratta delle nozioni elementari di di teoria degli spazi affini ed euclidei e geometria differenziale.

A.1 Elementi di Geometria Affine.

Lo spazio tridimensionale della fisica classica, ma anche lo spaziotempo quadridimensionale della fisica relativistica speciale, sono *spazi affini*. Tali spazi ammettono particolari trasformazioni, chiamate *traslazioni* che, quando lo spazio affine viene dotato di significato fisico ed in particolare dotato delle usuali proprietà metriche, corrispondono alle operazioni fisiche di traslazione rigide dei corpi materiali. L'esistenza delle traslazioni è connessa alla proprietà di *omogeneità* dello spazio di quiete di un riferimento inerziale ed è il punto di partenza per definire la nozione di impulso e di energia nelle formulazioni avanzate della meccanica. Torneremo più avanti su questi argomenti. Dal punto di vista puramente matematico, gli spazi affini (se ulteriormente dotati della struttura metrica che vedremo tra poco) sono gli spazi della geometria di Euclide[1]. Richiamiamo brevemente la definizione e le principali caratteristiche degli spazi affini e degli spazi euclidei. Tali nozioni dovrebbero già essere note dai corsi di geometria elementare.

[1]Talvolta si trova scritto che la geometria di Euclide (in n dimensioni) è la geometria in $\mathbb{R}^n$ e, per esempio, si parla di $\mathbb{R}^2$ come del *piano euclideo*. Questo punto di vista non è corretto (anche dal punto di vista fisico), perché $\mathbb{R}^n$ ha una struttura che *non* è invariante per traslazioni, per esempio l'origine $(0, \ldots, 0)$ è un punto privilegiato (che non ha alcun corrispondente fisico!). Ignorare la parte della struttura di $\mathbb{R}^n$ che non invariante per traslazioni significa appunto vedere $\mathbb{R}^n$ come uno spazio affine. Si legga a tal proposito la "definizione" di spazio affine data a p.13 del fondamentale testo di Arnold di Metodi Matematici della Meccanica Classica [Arnold92].

A.1.1 Spazi affini.

Definizione A.1. Uno **spazio affine (reale) di dimensione (finita)** n è un insieme $\mathbb{A}^n$, i cui elementi sono detti **punti**, dotato di alcune strutture che descriviamo di seguito.
(1) Uno spazio vettoriale reale n-dimensionale V, detto **spazio delle traslazioni** o **spazio dei vettori liberi**.
(2) Un'applicazione $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \ni (P, Q) \mapsto P - Q \in V$ che gode delle due seguenti proprietà:
(i) per ogni coppia di elementi $Q \in \mathbb{A}^n$, $\mathbf{v} \in V$ c'è un *unico* punto $P \in \mathbb{A}^n$ tale che $P - Q = \mathbf{v}$;
(ii) $P - Q + Q - R = P - R$ per ogni terna $P, Q, R \in \mathbb{A}^n$.
Se $Q \in \mathbb{A}^n$ e $\mathbf{v} \in V$, $Q + \mathbf{v} \in \mathbb{A}^n$ indica l'unico punto P in $\mathbb{A}^n$ tale che $P - Q = \mathbf{v}$. Una **retta** in $\mathbb{A}^n$ di **origine** P e **vettore tangente u** è la funzione $\mathbb{R} \ni t \mapsto P + t\mathbf{u} \in \mathbb{A}^n$. Un **segmento** di retta si ottiene restringendo t ad un intervallo (diverso da un punto). $\diamondsuit$

N.B. *Gli spazi affini considerati in queste dispense sono esclusivamente reali e con dimensione finita.*

Esercizi A.1.
1. Provare che, per ogni $P \in \mathbb{A}^n$, $P - P = \mathbf{0}$ vettore nullo di V.
2. Provare che, se $Q \in \mathbb{A}^n$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ allora:

$$(Q + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = Q + (\mathbf{u} + \mathbf{v})\,. \tag{A.1}$$

3. Provare che, se $Q, P \in \mathbb{A}^n$ allora:

$$P - Q = -(Q - P)\,. \tag{A.2}$$

4. Provare che, se $P, Q \in \mathbb{A}^n$ e $\mathbf{u} \in V$ allora:

$$P - Q = (P + \mathbf{u}) - (Q + \mathbf{u})\,. \tag{A.3}$$

Ogni spazio affine $\mathbb{A}^n$ ammette una classe di sistemi di coordinate globali naturali detti *sistemi di coordinate cartesiane*, che giocano un importantissimo ruolo nello sviluppo della teoria. Un tale sistema di coordinate si costruisce come segue. Si fissi un punto $O \in \mathbb{A}^n$, detto *origine* delle coordinate, ed una base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ dello spazio delle traslazioni V, detta *sistema di assi* delle coordinate. Variando $P \in \mathbb{A}^n$ le componenti, $((P - O)^1, \ldots, (P - O)^n)$, di ogni vettore $P - O$ rispetto alla base scelta definiscono una funzione biettiva $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{R}^n$ che permette di identificare i punti di $\mathbb{A}^n$ con i punti di $\mathbb{R}^n$. Questa corrispondenza tra punti, P, e n-ple, $((P - O)^1, \ldots, (P - O)^n)$, è biettiva. È iniettiva per la richiesta (i) nella definizione A.1 ed è suriettiva perché il dominio di $(P, O) \mapsto P - O \in V$ coincide, per definizione, con tutto $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ ed ora O è tenuto fisso.

Definizione A.2. Nello spazio affine $\mathbb{A}^n$ con spazio delle traslazioni V si fissi un punto $O \in \mathbb{E}^n$ ed una base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ di V. Il sistema di coordinate globali $(\mathbb{A}^n, f)$, dove f associa a $P \in \mathbb{A}^n$ la n-pla di componenti di $P - O$, rispetto alla base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, è detto **sistema di coordinate cartesiane con origine O e assi $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$**. I sistemi di coordinate (locali) non cartesiane sono detti sistemi di coordinate **curvilinee**. $\diamondsuit$

Le coordinate cartesiane sono importanti anche perché consentono di rappresentare in maniera semplice le cosiddette *trasformazioni affini*. Una trasformazione affine è una trasformazione che preserva la struttura di spazio affine. Formalmente si ha la seguente definizione.

Definizione A.3. Siano $\mathbb{A}_1^n$ e $\mathbb{A}_2^m$ spazi affini con spazi delle traslazioni V_1 e V_2 rispettivamente. $\psi : \mathbb{A}_1^n \to \mathbb{A}_2^m$ è detta **trasformazione affine** se valgono le condizioni:
(i) ψ è *invariante per traslazioni*, cioè

$$\psi(P + \mathbf{u}) - \psi(Q + \mathbf{u}) = \psi(P) - \psi(Q)\ , \ \text{ per ogni } P, Q \in \mathbb{A}_1^n \text{ e } \mathbf{u} \in V_1\ ;$$

(ii) la funzione $P - Q \mapsto \psi(P) - \psi(Q)$ definisce una trasformazione lineare $V_1 \to V_2$, indicata con $d\psi : V_1 \to V_2$.

Esercizi A.2.
1. Sia $(\mathbb{A}^n, f)$ un sistema di coordinate cartesiane, come nella definizione A.2, con coordinate $x^1, \cdots, x^n$ e $(\mathbb{A}^n, g)$ un altro sistema di coordinate cartesiane, con coordinate $x'^1, \cdots, x'^n$, di origine O' e assi $\mathbf{e}'_1, \ldots, e'_n$, in modo che valga

$$\mathbf{e}_i = \sum_j B^j{}_i \mathbf{e}'_j\ .$$

Provare che la funzione $g \circ f^{-1}$ è espressa, in coordinate, dalle relazioni:

$$x'^j = \sum_{i=1}^{n} B^j{}_i (x^i + b^i), \tag{A.4}$$

dove $(O - O') = \sum_i b^i e_i$.
2. In riferimento all'esercizio precedente, provare che la funzione $f \circ g^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, in coordinate, è espressa da:

$$x^i = \sum_{j=1}^{n} (B^{-1})^i{}_j x'^j - b^i\ . \tag{A.5}$$

3. Provare che se $\psi : \mathbb{A}_1^n \to \mathbb{A}_2^m$ è affine, allora, per ogni scelta di sistemi di coordinate cartesiane nei due rispettivi spazi, ψ ha la forma $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$x_2^i = \sum_{j=1}^{n} L^i{}_j x_1^j + c^i\ . \tag{A.6}$$

per opportuni coefficienti ${L^i}_j$ e c^i, dipendenti da ψ e dai sistemi di coordinate.
Dimostrare che, viceversa, $\psi : \mathbb{A}_1^n \to \mathbb{A}_2^m$ è affine se esistono due sistemi di coordinate cartesiane nei rispettivi spazi in cui ψ ha la forma (A.6) in coordinate.

4. Mostrare che le trasformazioni affini trasformano rette in rette. Ossia, se $\psi : \mathbb{A}_1^n \to \mathbb{A}_2^n$ è affine e $P(t) := P + t\mathbf{u}$, con $t \in \mathbb{R}$ è la retta in $\mathbb{A}_1^n$ di origine P è vettore tangente $\mathbf{v} \in V_1$, allora $\psi(P(t))$, al variare di $t \in \mathbb{R}$ definisce ancora una retta in $\mathbb{A}^m$.

Per ogni spazio affine $\mathbb{A}^n$, lo spazio vettoriale V delle traslazioni agisce come insieme di trasformazioni $\{T_\mathbf{v}\}_{\mathbf{v}\in V}$ su $\mathbb{A}^n$. La trasformazione $T_\mathbf{v} : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ di $\mathbf{v} \in V$ su $\mathbb{A}^n$ è definita in modo ovvio come $T_\mathbf{v} : P \mapsto P + \mathbf{v}$. Dal punto di vista fisico, quando $\mathbb{A}^3$ è pensato come l'usuale spazio fisico, le trasformazioni $T_\mathbf{v}$ sono le traslazioni rigide dei corpi fisici. Tornando alla struttura matematica, esplicitiamo alcune caratteristiche dell'azione di V sullo spazio affine.

(i) L'insieme $\{T_\mathbf{v}\}_{\mathbf{v}\in V}$ è banalmente un *gruppo* rispetto alla composizione di applicazioni valendo $T_\mathbf{u}T_\mathbf{v} = T_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}$.
Dato che $T_\mathbf{u}T_v = T_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}$ e $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$, il gruppo risulta anche essere *abeliano* cioé commutativo: $T_\mathbf{u}T_\mathbf{v} = T_\mathbf{u}T_\mathbf{v}$ per ogni coppia $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Dato che l'applicazione $V \ni v \mapsto T_v$ è iniettiva (poiché $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ se $T_\mathbf{u} = T_\mathbf{v}$), essa è un isomorfismo gruppale quando V è visto come gruppo commutativo rispetto alla somma di vettori.

(ii) Solo $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ soddisfa che $T_\mathbf{v}(P) = P$ per ogni $P \in \mathbb{A}^n$, in altre parole, l'azione del gruppo delle traslazioni è *libera*.

(iii) Per ogni coppia $P, Q \in \mathbb{A}^n$ esiste una traslazione $T_\mathbf{v}$ tale che $T_\mathbf{v}(P) = Q$, in altre parole, l'azione del gruppo delle traslazioni è *transitiva*.
Il gruppo delle traslazioni acquista ulteriore interesse quando si potenzia la struttura di spazio affine con un prodotto scalare.

A.1.2 Spazi Euclidei.

Quando uno spazio affine è dotato di una struttura aggiuntiva, compatibilbile con quella preesistente, che consente di definire proprietà metriche, si ha uno *spazio euclideo.* Lo spazio euclideo tridimensionale è il modello classico dello spazio fisico. Si deve anche osservare che lo spazio euclideo unidimensionale ha interesse fisico, dato che corrisponde alla modellizzazione matematica della nozione di asse temporale classico.

Definizione A.4. Uno spazio affine $\mathbb{E}^n$ di dimensione n (finita) e dotato di un prodotto scalare (reale simmetrico) $\cdot$ nello spazio delle traslazioni V, è detto **spazio euclideo (reale) di dimensione** n.
I sistemi di coordinate cartesiane associati a basi ortonormali rispetto a $\cdot$ sono detti sistemi di coordinate cartesiane **ortonormali**.
Una trasformazione affine tra due spazi euclidei che conserva le rispettive distanze è detta **isometria affine**. $\diamondsuit$

Mostriamo ora come la presenza del prodotto scalare dia senso a tutte le nozioni metriche che ci aspettiamo dalla fisica: distanze ed angoli. Ricordiamo a tal fine la definizione di *spazio metrico*.

Definizione A.5. Uno **spazio metrico** è un insieme M dotato di una funzione $d : M \times M \to \mathbb{R}$ detta **distanza**, soddisfacente:
(i) $d(P,Q) = d(Q,P)$,
(ii) $d(P,Q) \geq 0$ dove $=$ vale se solo se $P = Q$,
(iii) $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$ per $P,Q,R \in M$.
Una funzione $f : M \to M'$ con M, M' spazi metrici con distanze, d e d' rispettivamente è detta **isometria** se *conserva le distanze*, cioè : $d(P,Q) = d'(f(P), f(Q))$ per ogni coppia $P,Q \in M$. $\diamondsuit$

Ovviamente, per (ii), le isometrie sono sempre trasformazioni iniettive. Nel caso degli spazi euclidei, la presenza del prodotto scalare arricchisce ulteriormente la struttura di spazio affine aggiungendo una struttura di spazio metrico, quando la distanza tra punti di $\mathbb{E}^n$ è definita come la norma standard associata al prodotto scalare $\cdot$ valutata su $P - Q$:

$$d(P,Q) := ||P - Q|| := \sqrt{P - Q \cdot P - Q}\,. \tag{A.7}$$

Quindi gli spazi euclidei sono naturalmente degli spazi metrici. Si noti che il prodotto scalare presente nello spazio delle traslazioni consente di definire la nozione misura di *angolo tra vettori*: l'angolo α tra due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è , quando ha senso definirlo, l'unico (in $[0,\pi]$) che soddisfa

$$||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}|| \cos\alpha = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\,.$$

Passiamo ora a considerare le isometrie tra spazi euclidei. Dato che la nozione di isometria nasce indipendentemente da quella di trasformazione affine, ci si può chiedere se tra due spazi euclidei possano esistere isometrie che non siano trasformazioni affini. Vale tuttavia il seguente notevole teorema che, per spazi euclidei, identifica isometrie ed isometrie affini. La dimostrazione è data negli esercizi.

Teorema A.1. *Siano $\mathbb{E}^n_1$ e $\mathbb{E}^n_2$ spazi euclidei con la stessa dimensione n (finita). $f : \mathbb{E}^n_1 \to \mathbb{E}^n_2$ è un'isometria se e solo se è un'isometria affine.*

Osservazioni A.1.
(1) La distanza d su uno spazio euclideo (A.7) gode di alcune interessanti proprietà . In primo luogo essa è *invariante sotto l'azione delle traslazioni*:

$$d(P + \mathbf{u}, Q + \mathbf{u}) = d(P,Q)\,, \;\; \forall\; P,Q \in \mathbb{E}^n,\; \mathbf{u} \in V\,. \tag{A.8}$$

La verifica di tale proprietà è immediata dalla definizione di d e tenendo conto della proprietà $(P + \mathbf{u}) - (Q + \mathbf{u}) = P - Q$.
Un'altra proprietà interessante della distanza di spazi euclidei è di natura completamente matematica: risulta per computo diretto che la funzione $P,Q \mapsto d(P,Q)^2$ è di classe C^∞ rispetto

ad ogni sistema di coordinate cartesiane (cioé , rispetto alla struttura differenziabile naturale di $\mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n$ che diremo più avanti). Non lo è invece la funzione $P, Q \mapsto d(P,Q)$ che è continua, ma ammette una singolarità per $P = Q$.
(2) Come conseguenza dell'esercizio A.2.**1**, tenendo conto che le matrici di trasformazione tra basi ortonormali sono le matrici ortogonali, la più generale legge di trasformazione tra le coordinate di due differenti sistemi di coordinate cartesiani ortonormali assume la forma

$$x'^j = \sum_{i=1}^{n} R^j{}_i (x^i + b^i), \tag{A.9}$$

dove i numeri reali b^i sono arbitrariamente fissati e i coefficienti $R^j{}_i$ definiscono individuano una qualsiasi fissata *matrice ortogonale* di dimensione n. Ricordiamo che le matrici ortogonali di ordine n sono le matrici reali $n \times n$, R, tali che $RR^t = I$ (ossia in componenti $\sum_k R^i{}_k R^j{}_k = \delta^{ij}$). Esse costituiscono un gruppo rispetto al prodotto matriciale righe per colonne, detto **gruppo ortogonale di dimensione** n o **gruppo delle rotazioni in dimensione** n ed indicato con il simbolo $O(n)$.
(3) Fino ad ora abbiamo interpretato *passivamente* le (A.9), cioè riferendole a due *diversi* sistemi di coordinate nei quali si descrive lo *stesso* punto. Tuttavia queste trasformazioni si possono interpretare anche *attivamente*, lavorando in un unico sistema di coordinate cartesiane ortonotmali. Se fissiamo un unico sistema di coordinate cartesiane ortonormali, in riferimento a tale sistema di coordinate, la forma più generale per un'isometria $\psi : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ che trasforma il punto generico $P \in \mathbb{E}^n$ di coordinate $(x^1, \ldots, x^n)$ nel punto $\psi(P) \in \mathbb{E}^n$, di coordinate $(x'^1, \ldots, x'^n)$, è ancora data dalla (A.9) in cui i numeri reali b^i e la matrice R sono fissati e dipendono da ψ. Si dimostra abbastanza facilmente che, per un fissato spazio euclideo $\mathbb{E}^n$, *la classe delle isometrie* $\psi : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *costituisce un gruppo rispetto alla legge di composizione di funzioni.* In particolare, la composizione di due isometrie è ancora tale e l'inversa di una isometria, esiste sempre, ed è un'isometria. *Il gruppo delle isometrie include come sottogruppo quello delle traslazioni.* Le isometrie dello spazio fisico tridimensionale sono dunque tutte e sole le *rototraslazioni* della forma (A.9) interpretate come *trasformazioni attive.* Queste operazioni, dal punto di vista fisico, sono le operazioni che si possono eseguire attivamente sui corpi senza alterarne le proprietà metriche.
(4)* Si consideri un sistema di coordinate locali curvilinee $y^1, ..., y^n$ nello spazio euclideo $\mathbb{E}^n$ con prodotto scalare $(\cdot|\cdot)$. Possiamo associare a ciascuna coordinata y^i un versore $\mathbf{f}_i(P)$, tangente in P alla curva uscente da P che si ottiene facendo variare solo la coordinata y^i e mantenendo costanti le altre. Tenendo conto dell'identificazione canonica (A.30), vale

$$\mathbf{f}_i(P) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial y^i}|_P \,\middle|\, \frac{\partial}{\partial y^i}|_P\right)}} \frac{\partial}{\partial y^i}|_P \tag{A.10}$$

A.1.3 Orientazione di spazi Euclidei.

Lo spazio delle traslazioni V di uno spazio euclideo $\mathbb{E}^n$, o più generalmente di uno spazio affine $\mathbb{A}^n$, è per sua natura *orientabile.* Ricordiamo questa importante nozione. Se $\mathcal{B}$ denota la classe di tutte le basi di V, e $A, B \in \mathcal{B}$, con $A = \{e_r^{(A)}\}_{r=1,2,\ldots,n}$ e $B = \{e_r^{(B)}\}_{r=1,2,\ldots,n}$, denotiamo con $M(A, B)$ la matrice $n \times n$ di passaggio da una base all'altra, cioé la matrice i cui coefficienti $M(A, B)^j{}_i$ sono dati da

$$e_i^{(A)} = \sum_{j=1}^{n} M(A, B)^j{}_i e_j^{(B)} .$$

Dato che $M(A, B)$ è non singolare, il determinante deve essere non nullo e, di fatto, può essere sia positivo che negativo. La relazione

$$\forall A, B \in \mathcal{B}\,, \quad A \sim B \quad \text{se e solo se } \det M(A, B) > 0$$

risulta essere una relazione di equivalenza con due sole classi di equivalenza. La classe $\mathcal{B}$ viene naturalmente decomposta nell'unione di tali due classi disgiunte. La scelta di una delle due classi, che viene detta classe delle basi ad **orientazione positiva**, è un'**orientazione** di V e dello spazio euclideo (o affine) associato.

Osservazioni A.2.
(1) Nel caso di uno spazio euclideo $\mathbb{E}^3$, nel quale ricade il nostro spazio fisico, le due classi di equivalenza di basi sono dette classe delle basi **destrorse** e classe delle basi **sinistrorse**. La prima classe di equivalenza è quella che include la terna individuata dalla nostra mano destra, costituita, nell'ordine, da pollice, indice, medio. La seconda è definita analogamente rispetto alla mano sinistra. *Si è soliti scegliere come terne con orientazione positiva le terne destrorse, e noi seguiamo questa convenzione.*
(2) Nel caso di $\mathbb{E}^3$ orientato, l'orientazione dello spazio euclideo individua anche un'orientazione delle rotazioni attorno ad un fissato asse di rotazione $\mathbf{u}$. Una rotazione $R_\theta \in SO(3)$ di un angolo $\theta \in (0, 2\pi)$ attorno ad $\mathbf{u}$ è detta **positiva**, se, fissato un vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{u}, \mathbf{0}$, la terna $\mathbf{v}, R_\theta\mathbf{v}, \mathbf{u}$ è destrorsa.
(3) Nel caso di $\mathbb{E}^3$ orientato, il prodotto vettoriale tra due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ che individuano un angolo $\alpha \in [0, \pi]$, è dato dal vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} \in V$ di modulo $||\mathbf{u}||\, ||\mathbf{v}|| \sin\alpha$, di direzione normale a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e di verso scelto in modo tale che $\mathbf{u}\,, \mathbf{v}\,, \mathbf{u} \wedge \mathbf{u}$ sia una terna destrorsa (se nessuno dei vettori ha modulo nullo). Questa definizione è *equivalente* alla regola del determinante

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = (u^2v^3 - u^3v^2)\mathbf{e}_1 - (u^1v^3 - u^3v^1)\mathbf{e}_2 + (u^1v^2 - u^2v^1)\mathbf{e}_3\,,$$

purché la base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ *di* V *sia ortonormale destrorsa*, e $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^3 u^j\mathbf{e}_j$ e $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^3 v^j\mathbf{e}_j$.
Esiste una definizione alternativa di prodotto vettoriale, basata sulla nozione di *pseudovettore*, che noi non adopereremo.

Esercizi A.3.

1. Sia $\mathbb{E}^n$ uno spazio euclideo e d la sua distanza. Fissato un punto $O \in \mathbb{E}^n$, si identifichino (biunivocamente) i vettori dello spazio V delle traslazioni di $\mathbb{E}^n$ con i punti di $\mathbb{E}^n$ tramite la corrispondenza $\mathbf{u} \mapsto O + u$. Provare che il prodotto scalare $\cdot$ su V si può scrivere in termini di d come:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} d\,(O, O + (\mathbf{u} + \mathbf{v}))^2 + \frac{1}{2} d\,(O, O + (\mathbf{u} - \mathbf{v}))^2\ . \tag{A.11}$$

2. Siano $\mathbb{E}_1^n$ e $\mathbb{E}_2^n$, due spazi euclidei con la stessa dimensione n, con distanze d_1 e d_2 rispettivamente e prodotti scalari $(\cdot|\cdot)_1$ e $(\cdot|\cdot)_2$ rispettivamente. Sia $\phi : \mathbb{E}_1^n \to \mathbb{E}_2^m$ una trasformazione affine. Provare che $d\phi$ conserva il prodotto scalare tra vettori (e quindi anche l'angolo tra vettori), ossia, per ogni fissato $Q \in \mathbb{E}_1^3$:

$$(\phi(P) - \phi(Q)|\phi(P') - \phi(Q))_2 = (P - Q|P' - Q)_1 \ , \ \ \forall \ P, P' \in \mathbb{E}_1^3 \, . \tag{A.12}$$

se e solo se ϕ conserva le distanze, cioé

$$d_2(\phi(P), \phi(Q)) = d_1(P, Q) \ , \ \ \forall \ P, Q \in \mathbb{E}_1^3 \, . \tag{A.13}$$

3. Siano $\mathbb{E}_1^n$ e $\mathbb{E}_2^n$ due spazi euclidei con la stessa dimensione e con distanze d_1 e d_2 rispettivamente. Mostrare che la trasformazione $\phi : \mathbb{E}_1^n \to \mathbb{E}_2^n$ è un isometria se e solo se, per una scelta (e quindi ogni scelta) di coordinate cartesiane ortonormali in $\mathbb{E}_1^n$ e $\mathbb{E}_2^n$, è rappresentata nella forma $(i = 1, \ldots, n)$

$$x_2^i = \sum_{j=1}^{n} R^i{}_j \, x_1^j + b^j \, . \tag{A.14}$$

essendo la matrice di coefficienti $R^i{}_j$ una matrice ortogonale $n \times n$ reale.

4. Dati due spazi affini $\mathbb{A}^n$ e $\mathbb{A}^m$, un'applicazione $\psi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ è detta *diffeomorfismo*, se è (1) biettiva ed inoltre (2), quando si rappresentano ψ e ψ^{-1} in coordinate cartesiane in $\mathbb{A}^n$ e $\mathbb{A}^m$ e quindi si pensano come funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$ rispettivamente, tali funzioni risultano essere ovunque infinitamente differenziabili (cioè di classe C^∞). Considerando le isometrie tra due spazi euclidei, mostrare che:

(i) le isometrie tra due spazi euclidei con la stessa dimensione sono diffeomorfismi;

(ii) le funzioni inverse di isometrie sono ancora isometrie;

(iii) la composizione di due isometrie è ancora un'isometria;

(iv) se $\phi : \mathbb{E}_1^n \to \mathbb{E}_2^n$ è un isometria, allora $d\phi : V_1 \to V_2$ è un isomorfismo tra spazi vettoriali che conserva il prodotto scalare.

5. Mostrare che le isometrie $\phi : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ costituiscono un gruppo che è sottogruppo dei diffeomorfismi dallo spazio euclideo $\mathbb{E}^n$ in se stesso.

6.* Dimostrare il teorema A.1.

A.2 Elementi di geometria differenziale.

In tutte le dispense è stata adottata la seguente definizione tecnica che enunciamo qui una volta per tutte.

Definizione A.6. Siano $n, m = 1, 2, \ldots$ e $k = 0, 1, \ldots$ fissati e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e non vuoto.

(a) Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ è detta essere **di classe** C^k, e si scrive in tal caso $f \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^n)$, se tutte le derivate parziali (incluse quelle miste) delle componenti di f esistono e sono continue

fino all'ordine k incluso. Si pone $C^k(\Omega) := C^k(\Omega; \mathbb{R})$.
(b) $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ è detta di classe C^∞ se è di classe C^k per ogni $k = 0, 1, \ldots$ e si definisce:

$$C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n) := \bigcap_{k=0,1,\ldots} C^k(\Omega; \mathbb{R}^n) .$$

Si pone $C^\infty(\Omega) := C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$. $\diamondsuit$

Solitamente quando non è menzionata esplicitamente la classe di differenziabilità k di una funzione (oppure di una varietà) si sottointende che $k = \infty$, noi seguiamo questa convenzione in tutte le dispense.

A.2.1 Richiami di Topologia elementare.

Ricordiamo qui alcuni fatti di topologia generale elementare. Una coppia $(X, \mathscr{T})$, dove X è un insieme e $\mathscr{T}$ una classe di sottoinsiemi di X, si dice **spazio topologico** se valgono i seguenti fatti: (i) $\emptyset, X \in \mathscr{T}$, (ii) l'unione di elementi (in quantità arbitraria) di $\mathscr{T}$ è ancora un elemento di $\mathscr{T}$, (iii) l'intersezione di una quantità finita di elementi di $\mathscr{T}$ è ancora un elemento di $\mathscr{T}$. In questo caso gli insiemi di $\mathscr{T}$ vengono detti **(insiemi) aperti**, $\mathscr{T}$ viene detta **topologia** su X. Gli **insiemi chiusi** di X sono, per definizione, i complementi rispetto a X degli aperti.
In $\mathbb{R}^n$ c'è una topologia naturale detta **topologia euclidea** o anche **topologia standard**, i cui aperti sono, oltre all'insieme vuoto, gli insiemi dati dalle unioni arbitrarie di palle aperte di centro e raggio arbitrario. Le nozioni topologiche elementari di $\mathbb{R}^n$ studiate nei corsi di analisi sono sottocasi delle nozioni generali date sopra.
Se $A \subset X$ è un insieme arbitrario e $(X, \mathscr{T})$ è uno spazio topologico, è possibile indurre su A una topologia $\mathscr{T}_A$ tramite $\mathscr{T}$. Ponendo infatti: $\mathscr{T}_A := \{B \cap A \mid B \in \mathscr{T}\}$, si verifica subito che $(A, \mathscr{T}_A)$ è ancora uno spazio topologico. $\mathscr{T}_A$ è detta **topologia indotta (da $\mathscr{T}$) su** A.
Se $p \in X$, dove $(X, \mathscr{T})$ è uno spazio topologico, un **intorno aperto** di p è un qualsiasi $A \in \mathscr{T}$ tale che $p \in \mathscr{T}$.
Se $(X, \mathscr{T})$ e $(X', \mathscr{T}')$ sono spazi topologici, una funzione $f : X \to X'$ è detta **continua**, se è tale che $f^{-1}(A) \subset \mathscr{T}$ quando $A \in \mathscr{T}'$ (cioé la controimmagine di un aperto dello spazio di arrivo è un aperto nello spazio di partenza). Se $(X, \mathscr{T})$ e $(X', \mathscr{T}')$ sono spazi topologici e $p \in X$, una funzione $f : X \to X'$ è detta **continua in** p se, per ogni intorno aperto B di $f(p)$, esiste un intorno aperto A di p tale che $f(A) \subset B$. Si verifica facimente che $f : X \to X'$ è continua se e solo se è continua in ogni punto $p \in X$. Se $(X, \mathscr{T})$ e $(X', \mathscr{T}')$ sono spazi topologici, una funzione $f : X \to X'$ è detta **omeomorfismo** quando è continua, biettiva e l'inversa è continua.
Si prova che se i due spazi X, X' usati sopra sono $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^m$ rispettivamente, oppure sottoinsiemi di tali spazi, dotati delle rispettive topologie euclidee, la definizioni classiche di funzione continua e continua in un punto sono equivalenti a quelle generali date sopra.
Uno spazio topologico $(X, \mathscr{T})$ è detto **spazio di Hausdorff** o **spazio T_2** o **spazio separabile di secondo tipo**, se per ogni coppia di punti $p, q \in X$ ci sono due intorni aperti $U \ni p$ e $V \ni q$ con $U \cap V = \emptyset$.

Uno spazio topologico $(X, \mathscr{T})$ è detto essere **a base numerabile** se esiste una classe numerabile $\mathcal{B} \subset \mathscr{T}$ (appunto la "base numerabile") tale che ogni insieme aperto di X si possa ottenere come unione di elementi di $\mathcal{B}$.
$\mathbb{R}^n$ dotato della topologia standard è sia di Hausdorff che a base numerabile.

A.2.2 Varietà differenziabili.

Lo strumento matematico più generale e potente atto a descrivere le proprietà generali dello spaziotempo, dello spazio fisico tridimensionale e dello spazio astratto in cui descrivere i sistemi fisici delle teorie classiche, è la nozione di *varietà differenziabile.* Si tratta in essenza di un insieme di oggetti arbitrari, indicati con il nome generico di *punti*, che può essere ricoperto localmente con sistemi di coordinate i quali identificano i punti dell'insieme con n-ple di $\mathbb{R}^n$.

Definizione A.7. Una **varietà differenziabile di dimensione** n e **classe** C^k, con $n = 1, 2, 3, \cdots$ e $k = 1, 2, ..., \infty$ fissati, è un insieme M i cui elementi sono detti **punti**, dotato di alcune strutture geometriche con proprietà che precisiamo di seguito.
(1) L'insieme M deve essere dotato di una **struttura differenziabile di classe** C^k e **dimensione** n, $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ cioé , una collezione di coppie (U_i, ϕ_i), dette **carte locali** o **sistemi di coordinate locali**, in cui U_i è sottoinsieme di M e ϕ_i è un'applicazione con dominio U_i a valori in $\mathbb{R}^n$ e vale:

(i) $\cup_{i\in I} U_i = M$, ogni ϕ_i è iniettiva e $\phi_i(U_i)$ aperto in $\mathbb{R}^n$;

(ii) le carte locali in $\mathcal{A}$ devono essere C^k-*compatibili* a due a due. Due applicazioni iniettive $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ e $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ con $U, V \subset M$ sono dette C^k**-compatibili** (o più brevemente k-**compatibili**) se vale $U \cap V \neq \emptyset$ e le funzioni $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$ e $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ sono entrambe di classe C^k, oppure se vale $U \cap V = \emptyset$;

(iii) $\mathcal{A}$ è **massimale** ossia soddisfa: se $U \subset M$ è aperto e $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ è compatibile con ogni carta di $\mathcal{A}$, allora $(U, \phi) \in \mathcal{A}$.

(2) Dal punto di vista topologico, si richiede che:

(i) M sia uno spazio topologico di Hausdorff a base numerabile;

(ii) lo spazio topologico M sia, tramite le carte di $\mathcal{A}$, *localmente omeomorfo a* $\mathbb{R}^n$. In altre parole, se $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, allora U è aperto e $\phi : U \to \phi(U)$ è un omeomorfismo. $\diamondsuit$

Osservazioni A.3.
(1) Ogni carta locale (U, ϕ) permette di assegnare biunivocamente una n-pla di numeri reali $(x^1_p, \cdots, x^n_p) = \phi(p)$ ad ogni punto p di U. Gli elementi della n-pla sono le **coordinate** di p nella carta (U, ϕ). I punti in U sono quindi in corrispondenza biunivoca con le n-ple di $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Una carta locale con dominio dato da tutto M è detta **carta globale** o **sistema di coordinate globale**.
(2) Nell'ipotesi $U \cap V \neq \emptyset$, la k-compatibilità di carte locali (U, ϕ) e (V, ψ) implica che la matrice jacobiana di $\phi \circ \psi^{-1}$, essendo invertibile, abbia determinante ovunque non nullo. Viceversa, se $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$ è biettiva, di classe C^k, con determinante della matrice jacobiana

non nullo su $\psi(U \cap V)$, allora $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ è anch'essa C^k e quindi le due carte locali sono k-compatibili. La prova di ciò (esercizio A.4.**5**) si basa sul noto [GiustiII]:
Teorema A.2. (**Teorema della funzione inversa**)
Sia $f : D \to \mathbb{R}^n$, con $D \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, una funzione di classe C^k, con $k = 1, 2, \ldots, \infty$ fissato. Se la matrice jacobiana di f, valutata in $p \in D$, ha determinante non nullo allora esistono un intorno aperto $U \subset D$ di p ed un intorno aperto V di $f(p)$ tali che: (i) $f \restriction_U : U \to V$ sia biettiva (ii) la sua inversa $f \restriction_U^{-1} : V \to U$ sia di classe C^k. $\diamondsuit$
(3) Le due richieste sul *tipo* di topologia in (2)(i) (che valgono per la topologia standard di $\mathbb{R}^n$) sono di carattere tecnico e assicurano, rispettivamente, l'unicità delle soluzioni di problemi basati su equazioni differenziali su M (necessaria dal punto di vista fisico quando queste equazioni descrivono l'evoluzione di sistemi fisici) e la fattibilità della teoria dell'intergazione su M. La richiesta in (2)(ii) corrisponde invece al requisito intuitivo che M "sia continuo come" $\mathbb{R}^n$ nell'intorno di ogni punto. Classici controesempi mostrano che la proprietà di Hausdorff di $\mathbb{R}^n$ non è trasportata su M dagli omeomorfismi locali dati e pertanto deve essere imposta separatamente.
(4) Sia M spazio topologico di Hausdorff a base numerabile. Una collezione di carte locali $\mathcal{A}$ su M che soddisfi (i) e (ii) in (1) ma non necessariamente (iii), e che soddisfi (ii) in (2), è detto **atlante** su M **di dimensione** n e **classe** C^k. Si dimostra facilmente che per ogni atlante $\mathcal{A}$ su M esiste un unico atlante massimale che lo include. Si osservi che due atlanti su M tali che ogni carta di uno sia compatibile con ogni carta dell'altro, inducono la stessa struttura differenziabile su M. Quindi per assegnare una struttura differenziabile è sufficiente assegnare un atlante non massimale, uno dei possibili che la individua. L'unica struttura differenziabile associata nel modo detto ad un fissato atlante si dice essere **indotta** dall'atlante.
(5) Si deve comunque notare che possono esistere più strutture differenziabile inequivalenti sulla stesso spazio topologico di Hausdorff a base numerabile[2]. Ciò accade in dimensione ≥ 4. Pertanto, per assegnare una varietà differenziabile N di dimensione $n \geq 4$ non è sufficiente specificare il solo insieme N, anche se è stata specificata la topologia appropriata. Fanno eccezione i casi in cui N è un sottoinsieme di una varietà di dimensione maggiore M assegnata, di cui N è sottovarietà embedded, come specificato sotto.
(6) Si può provare che se $1 \leq k < \infty$, si possono eliminare alcune carte dalla struttura differenziabile (un numero infinito di carte!), in modo tale che l'insieme risultate sia ancora un atlante con $k = \infty$. Si possono considerare varietà *analitiche* (in simboli si scrive C^ω), in cui tutte le funzioni $\phi \circ \psi^{-1}$ e $\psi \circ \phi^{-1}$ sono assunte essere funzioni analitiche reali.

Esempi A.1.
1. L'esempio più semplice di varietà differenziabile, di classe C^∞ e dimensione n, è ogni sottoinsieme non vuoto e aperto di $\mathbb{R}^n$ (includendo $\mathbb{R}^n$ stesso) con una struttura differenziabile standard individuata dalla funzione identità (che da sola definisce un atlante).
2. Si consideri sfera unitaria $\mathbb{S}^2$ (dotata della topologia ereditata da $\mathbb{R}^3$) in $\mathbb{R}^3$, centrata

[2]Tecnicamente parlando strutture, differenziabili non diffeomorfe. Si rimanda ai corsi di geometria differenziale per approfondimenti.

nell'origine e quindi di equazione, in coordinate canoniche x^1, x^2, x^3 di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{S}^2 := \left\{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\right\} .$$

$\mathbb{S}^2$ acquista una struttura di varietà differenziabile, di dimensione 2 e classe C^∞, da quella di $\mathbb{R}^3$, definendo un atlante su $\mathbb{S}^2$ costituito da 6 carte locali $(\mathbb{S}^2_{(i)\pm}, \phi^{(i)}_\pm)$ $(i = 1, 2, 3)$ ottenute come segue. Considerato l'asse x^i $(i = 1, 2, 3)$ e la coppia di emisferi aperti $\mathbb{S}^2_{(i)\pm}$ con asse sud-nord dato dall'asse x^i, si considerano le carte locali $\phi^{(i)}_\pm : \mathbb{S}^2_{(i)\pm} \to \mathbb{R}^2$ che associano ad ogni $p \in \mathbb{S}^2_{(i)\pm}$ le coordinate di esso sul piano a $x^i = 0$. Si può provare (vedi sotto) che è impossibile dotare $\mathbb{S}^2$ di una carta globale a differenza di $\mathbb{R}^3$ (o di ogni suo sottoinsieme aperto). Questo fatto dimostra che la classe delle varietà differenziabili non si riduce ai soli sottoinsiemi non vuoti aperti degli $\mathbb{R}^n$ ed è pertanto interessante. Un'esempio analogo è quello di una circonferenza in $\mathbb{R}^2$.

A.2.3 Varietà prodotto.

Date due varietà differenziabili M ed N, di dimensione m ed n rispettivamente, ed entrambe di classe C^k, si può costruire una terza varietà differenziabile di classe C^k e dimensione $m + n$ sull'insieme di punti $M \times N$ dotato della topologia prodotto. (Tale spazi topologico è quindi ancora di Hausdorff ed a base numerabile.) Tale varietà è detta *varietà prodotto* di M e N e si indica semplicemente con $M \times N$. La struttura differenziabile di $M \times N$, detta *struttura differenziabile prodotto*, è quella che si ottiene come segue. Se (U, ϕ) e (V, ψ) sono due carte locali su M ed N rispettivamente, è immediato verificare che

$$U \times V \ni (p, q) \mapsto (\phi(p), \psi(q)) =: \phi \oplus \psi(p, q) \in \mathbb{R}^{m+n} \tag{A.15}$$

è un omeomorfismo locale. Inoltre, se (U', ϕ') e (V', ψ') sono altre due carte locali su M ed N rispettivamente, k-compatibili con le rispettive precedenti, le carte $(U \times V, \phi \oplus \psi)$ e $(U' \times V', \phi' \oplus \psi')$ risultano essere banalmente k-compatibili. Infine, al variare delle carte (U, ϕ) e (V, ψ) nelle strutture differenziabili di M e N, le carte $(U \times V, \phi \oplus \psi)$ definiscono un atlante su $M \times N$. La struttura differenziabile da esso generata è , per definizione, la struttura differenziabile prodotto.

Definizione A.8. Date due varietà differenziabili M ed N, di dimensione m ed n rispettivamente, ed entrambe di classe C^k, la **varietà prodotto** $M \times N$ è la varietà sull'insieme $M \times N$, dotato della topologia prodotto, e con struttura differenziabile indotta dalle carte locali $(U \times V, \phi \oplus \psi)$ definite in (A.15), quando (U, ϕ) e (V, ψ) variano nelle strutture differenziabili di M e N. $\diamondsuit$

A.2.4 Funzioni differenziabili.

Dato che una varietà differenziabile, localmente è indistiguibile da $\mathbb{R}^n$, la struttura di varietà differenziabile permette di dare senso alla nozione di *funzione differenziabile* definita su un insieme che non sia un $\mathbb{R}^n$ oppure un suo sottoinsieme, ma che abbia la struttura di varietà differenziabile. L'idea è banalmente quella di ridursi, localmente, alla definizione standard in $\mathbb{R}^n$ di funzione differenziabile, usando la struttura di carte locali che ricoprono ogni varietà differenziabile. Se M è una varietà differenziabile di dimensione n e classe C^k, diremo che $f : M \to \mathbb{R}$ è differenziabile con continuità fino all'ordine ordine $p \leq k$, oppure più brevemente, che f è di *classe* C^p, se le funzioni $f \circ \phi^{-1}$ sono di classe C^p come funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ per ogni carta locale (U, ϕ) su M. Tenendo conto che $\mathbb{R}$ è una varietà differenziabile, possiamo dare la seguente definizione del tutto generale che include il caso appena considerato (se $N = \mathbb{R}$ con struttura differenziabile standard).

Definizione A.9. Siano M, N varietà differenziabili di dimensione m, n e classe C^p e C^q $(p, q \geq 1)$. Una funzione continua $f : M \to N$ è di **classe** C^k $(0 \leq k \leq p, q$ eventualmente $k = \infty)$ se $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ è di classe C^k, come funzione da $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$, per ogni scelta delle carte locali $(U, \phi), (V, \psi)$, rispettivamente in N e M.
La classe delle funzioni differenziabili di classe $k = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ da M ad N è indicata con $C^p(M; N)$; se $N = \mathbb{R}$ si scrive semplicemente $C^k(M)$.
Un k**-diffeomorfismo** $f : M \to N$ tra due varietà M, N è una funzione di classe C^k, biettiva, con inversa di classe C^k. Se M ed N sono connesse da un k-diffeomorfismo f si dicono varietà k-**diffeomorfe** (tramite f). $\diamondsuit$

Osservazioni A.4.
(1) Si noti che abbiamo ammesso il caso di funzioni differenziabili di classe C^0, che in realtà corrisponde a funzioni solamente continue ed a omeomorfismi nel caso di 0-diffeomorfismi. Ovviamente ogni k-diffeomorfismo è anche un omeomorfismo per cui, per esempio, non ci possono essere diffeomorfismi tra $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{R}^2$ (oppure ogni suo sottoinsieme non vuoto e aperto), essendo il primo compatto ed il secondo no. Questo fatto prova, come menzionato sopra, che non possono esistere carte globali su $\mathbb{S}^2$.
(2) Si dimostra facilmente che, affinché $f : M \to N$ sia C^p, è sufficiente che $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ siano funzioni C^k al variare delle carte locali $(U, \phi), (V, \psi)$ in due atlanti, rispettivamente su M ed N, senza dover controllare la validità di tale condizione per *tutte* le possibile carte locali delle due varietà .
(3) Se $f : M \to N$ è una funzione differenziabile (di classe C^k) e sono assegnate carte locali $(U, \phi), (V, \psi)$, rispettivamente in N e M, la funzione $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ è detta **rappresentazione in coordinate** di f.

A.2.5 Sottovarietà embedded.

Un altro utile concetto è quello di *sottovarietà embedded.* $\mathbb{R}^n$ è una sottovarietà embedded di $\mathbb{R}^m$ con $m > n$. In coordinate canoniche $x^1, \cdots, x^m$ di $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ si identifica con il sottoinsieme individuato dalle condizioni $x^{n+1} = \cdots = x^m = 0$ e le prime n coordinate di $\mathbb{R}^m$, $x^1, \cdots, x^n$, sono identificate con le coordinate standard di $\mathbb{R}^n$. L'idea è quella di generalizzare, in senso locale, questa situazione usando coordinate locali e considerando varietà N ed M in luogo di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

Definizione A.10. Sia data una varietà differenziabile M, di dimensione $m > n$ e classe C^k $(k \geq 1)$. Una **sottovarietà embedded di** M **di dimensione** n **e classe** C^k, N, è una varietà differenziabile (di dimensione n e classe C^k) costituita come segue.
(a) N è un sottoinsieme di M dotato della topologia ereditata da M.
(b) La struttura differenziabile di N è quella generata da un atlante $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ in cui:
(i) $U_i = V_i \cap N$ e $\phi_i = \psi\restriction_{V_i \cap N}$ per una opportuna carta locale (V_i, ϕ_i) su M;
(ii) nelle coordinate $x^1, \cdots, x^m$ associate a (V_i, ϕ_i), l'insieme $V_i \cap N$ è individuato dalla richiesta $x^{n+1} = \cdots = x^m = 0$ e le rimanenti coordinate $x^1, \cdots, x^n$ sono coordinate locali associate a ϕ_i. $\diamondsuit$

Osservazioni A.5.
(1) La topologia di N è ancora, per costruzione, di Hausdorff ed a base numerabile.
(2) La struttura di sottovarietà embedded su N, se può essere assegnata, è univocamente individuata dalla struttura di varietà differenziabile di M come segue dall'esercizio **4** sotto.

Esercizi A.4.
1. Mostrare che $\mathbb{S}^2$ nell'esempio (2) di esempi A.1 è una sottovarietà embedded di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2.
2. L'insieme N di $\mathbb{R}^2$ ottenuto unendo la circonferenza di raggio unitario centrata in $(0, 1)$ con l'asse x^1 può essere dotato della struttura di sottovarietà embedded di $\mathbb{R}^2$? Può essere dotata della struttura di varietà differenziabile di dimensione 1?
3. Considerare la superficie conica C in $\mathbb{R}^3$ di equazione $0 \leq x^3 = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$. Si dimostri che C *non* può essere dotata della struttura di sottovarietà embedded di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2, ma che può essere dotata della struttura di varietà differenziabile di dimensione 2. Cosa succede se si considera $C^* := C \setminus \{(0, 0, 0)\}$ in luogo di C?
4. Provare che se M è una varietà differenziabile e $N \subset M$, con topologia ereditata da M, ammette due distinti atlanti $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ e $\{(U'_j, \phi'_j)\}_{j\in J}$ che soddisfano (b) della definizione A.10 allora le carte dei due atlanti sono tra di loro compatibili.
5. Siano $U \cap V \neq \emptyset$ con (U, ϕ) e (V, ψ) carte locali su M, tali che: $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$ è biettiva, di classe C^k $(k = 1, 2, \ldots, \infty)$, con determinante della matrice jacobiana non nullo su $\psi(U \cap V)$. Provare che $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ è anch'essa C^k e quindi le due carte locali sono k-compatibili.

Per concludere citiamo, senza provarlo (vedi per es. [doCarmo92, Westenholtz78]), un importante teorema che permette di stabilire quando un sottoinsieme di una varietà differenziabile può essere dotato della struttura di sottovarietà embedded. La dimostrazione del teorema è una diretta conseguenza del teorema del Dini [GiustiII].

Teorema A.3. (**Teorema dei valori regolari**.) *Sia M una varietà differenziabile di dimensione m e classe C^k. Si consideri l'insieme N determinato da $c(< m)$ costanti, v_j, e da c*

funzioni di classe C^k, $f_j : M \to \mathbb{R}$

$$N := \{p \in M \mid f_j(p) = v_j \ , \ j = 1, \cdots, c\} \ .$$

Se, nell'intorno di ogni punto $p \in N$, esiste una carta locale (U, ϕ) di M tale che la matrice jacobiana di coefficienti $\partial(f_j \circ \phi^{-1})/\partial x^i|_{\phi(p)}$ (con $j = 1, \cdots, c$ e $i = 1, \cdots, m$) abbia rango r, allora l'insieme N può essere dotato della struttura di sottovarietà differenziabile embedded di M di dimensione $n := m - c$ e classe C^k.
Se in particolare, la matrice quadrata $c \times c$ di elementi

$$\frac{\partial f_j \circ \phi^{-1}}{\partial x^k} \ , \quad j = 1, \ldots, c \text{ e } k = m - c + 1, m - c + 2, \ldots, m$$

è non singolare in $\phi(p)$ con $p \in N$, le prime n coordinate $x^1, \ldots, x^n$ definiscono un sistema di coordinate della struttura differenziabile di N in un intorno di p in N. $\diamondsuit$

Osservazioni A.6. La seconda parte del teorema dei valori regolari può essere enunciata rispetto ad una qualsiasi scelta di c coordinate rispetto alle quali la corrispondente matrice quadrata $c \times c$ è non singolare. Le rimanenti n coordinate definiscono, localmente un sistema di coordinate ammissibili su N. La prova di tale fatto è ovvia tenendo conto del fatto che, se $\phi : M \ni p \mapsto (x^1(p), x^2(p), \ldots, x^m(p)) \in \mathbb{R}^m$ è un sistema di coordinate locali su M, lo è anche ogni permutazione delle coordinate, per es. $\phi : M \ni p \mapsto (x^2(p), x^1(p), \ldots, x^m(p)) \in \mathbb{R}^m$.

Definizione A.11. Sia $f : M \to \mathbb{R}$ di classe C^k sulla varietà M di classe C^k. f è detta **non singolare in** $p \in M$ se esiste una carta locale (U, ϕ), con $U \ni p$, tale che la matrice riga jacobiana $\partial(f \circ \phi^{-1})/\partial x^i|_{\phi(p)}$ sia non nulla (cioé abbia rango 1). $\diamondsuit$

Se $f : M \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^k ovunque non singolare sulla varietà M di classe C^k e dimensione m, per il teorema dei valori regolari gli insiemi:

$$\Sigma_t := \{p \in M \mid f(p) = t\} \ ,$$

sono sottovarietà embedded di classe C^k e dimensione $m - 1$. Per costruzione $\Sigma_t \cap \Sigma_{t'} = \emptyset$ se $t \neq t'$. Infine $\cup_{t \in f(M)} \Sigma_t = M$. In tale situazione si dice che M è una **varietà fogliata** e che le sue **foglie** sono le sottovarietà Σ_t con $t \in f(M)$.

Esempi A.2.
1. L'esercizio A.4.**1** si risolve immediatamente applicando il teorema A.3. La sfera unitaria $\mathbb{S}^2$ in $\mathbb{R}^3$ ha equazione $f(x^1, x^2, x^3) = 0$ dove $f(x^1, x^2, x^3) := \sum_{i=1}^3 (x^i)^2$. f è differenziabile, la matrice rettangolare di coefficienti $\partial f/\partial x^i$ vale $(2x^1, 2x^2, 2x^3)$ e non si annulla su $\mathbb{S}^2$ (dove vale $(2, 2, 2)$). Di conseguenza il suo rango è 1.
2. Il teorema dei valori regolari non può essere direttamente applicato nell'esercizio A.4.**3** nel caso di C in quanto la funzione $f(x^1, x^2, x^3) := x^3 - \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$ non è differenziabile in $(0, 0, 0)$, cioé nel vertice del cono. Se si usa la funzione $g(x^1, x^2, x^3) := (x^3)^2 - ((x^1)^2 + (x^2)^2)$

il teorema non può ancora essere applicato perché il rango della matrice riga di elementi $\partial g/\partial x^i$ è nullo nell'origine.
3. Indichiamo con x, y, z le coordinate standard di $\mathbb{R}^3$ e consideriamo una superficie S che possa vedersi come l'immagine di $z = g(x, y)$, con $(x, y) \in D$ insieme aperto del piano $z = 0$ e con f di classe C^1. Questa superficie è una sottovarietà embedded di dimensione 2 e classe C^1 in $D \times \mathbb{R}$ dotato della struttura di varietà differenziabile standard. Inoltre il sistema di coordinate x, y appartiene alla struttura differenziabile della sottovarietà . Eccone la prova. Possiamo dotare $D \times \mathbb{R}$ del sistema di coordinate $y^1 = x^1, y^2 := x^2, y^3 := z - g(x, y)$: questa trasformazione di coordinate è infatti invertibile, differenziabile con inversa differenziabile come si prova immediatamente, per cui le coordinate y^1, y^2, y^3 appartengono alla struttura differenziabile di $D \times \mathbb{R}$ (e definiscono una carta locale della struttura differenziabile di $\mathbb{R}^3$). S è determinata da $y^3 = 0$ ed è quindi una sottovarietà embedded direttamente dalla definizione.
Alternativamente, si può usare il teorema dei valori regolari, considerando la funzione $f(x, y, z) := z - g(x, y)$ con $(x, y, z) \in D \times \mathbb{R}$, che determina S con la condizione $f(x, y, z) = 0$: in coordinate cartesiane la matrice jacobiana di f è il vettore riga $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, 1) \neq 0$.
4. Studiando le superfici in $\mathbb{R}^3$ (o equivalentemente in $\mathbb{E}^3$), riferendosi a coordinate cartesiane ortonormali $\mathbf{x} := (x, y, z)$, si è soliti definire una **superficie regolare** come l'immagine S di un'applicazione di classe (almeno) C^1, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ con $(u, v) \in D$ sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$, in modo tale che

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \neq \mathbf{0}\,, \quad \text{per ogni } (u, v) \in D\,. \tag{A.16}$$

In effetti una superficie regolare definita in questo modo può non essere una sottovarietà embedded di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 (e classe C^1). Tuttavia, se $S \subset \mathbb{R}^3$ è una sottovarietà bidimensionale embedded di dimensione 2 e classe (almeno) C^1, allora S è unione di superfici regolari.
Dimostriamo queste affermazioni. Per dimostrare la prima è sufficiente considerare il cilindro S retto in $\mathbb{R}^3$ che ha come base una *rosa a* 4 *petali* $x = \cos(2\theta)\cos\theta$, $y = \cos(2\theta)\sin\theta$. L'equazione di S è dunque $x = \cos(2u)\cos u$, $y = cos(2u)\sin u$, $z = v$, per $(u, v) \in (\pi/4, 9\pi/4) \times \mathbb{R}$. Il calcolo diretto prova che la condizione (A.16) è verificata nel dominio considerato. Tuttavia, la curva che individua S nel piano $z = 0$, cioè la rose a 4 petali suddetta, si interseca più volte nell'origine. La topologia indotta da $\mathbb{R}^3$ su S è tale che ogni punto sull'asse z non abbia mai un intorno su S che sia omeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Per quanto riguarda la seconda affermazione, supponiamo che $S \subset \mathbb{R}^3$ sia una sottovarietà embedded di dimensione 2 e classe C^1. Se $p \in S$, c'è un intorno aperto $U \ni p$ coperto da coordinate y^1, y^2, y^3 della struttura differenziabile C^1 di $\mathbb{R}^3$, tale che $S \cap U$ è descritto da $y^1 = 0$. $u = y^2, v = y^3$ sono coordinate locali su S. Il fatto che le coordinate y^1, y^2, y^3 siano compatibili con le coordinate cartesiane standard di $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$, implica che la matrice jacobiana di elementi $\frac{\partial x^i}{\partial y^j}$ abbia determinante non nullo. Questo equivale a dire che i tre vettori $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y^j}$, $j = 1, 2, 3$ siano ovunque linearmente indipendenti. Questo sarebbe impossibile se fosse

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y^2} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y^3} = 0\,,$$

per cui deve valere ovunque:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \neq 0\,.$$

Esercizi A.5.

1. Provare l'affermazione in (2) in osservazioni A.3:
Nell'ipotesi $U \cap V \neq \emptyset$, la k-compatibilità delle carte locali (U, ϕ) e (V, ψ) implica che la matrice jacobiana di $\phi \circ \psi^{-1}$, essendo invertibile, abbia determinante ovunque non nullo.

2. Provare che, se $f : M \to \mathbb{R}$ soddisfa il requisito di non singolarità in $p \in M$ rispetto alla carta locale (U, ϕ), allora soddisfa tale requisito rispetto ad ogni altra carta locale definita in un intorno di p.

3. Mostrare che, se per assegnate funzioni f_j e costanti c_j sono soddisfatte le ipotesi del teorema dei valori regolari per il punto p rispetto alla carta locale (U, ϕ), allora le ipotesi sono valide rispetto ad ogni altra carta locale definita in un intorno di p.

A.2.6 Spazio tangente e cotangente. Campi vettoriali covarianti e controvarianti.

Consideriamo la varietà differenziabile M di dimensione n e classe C^k ($k \geq 1$). Consideriamo ogni fissato spazio $C^k(M)$, come uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ rispetto alle combinazioni lineari di funzioni definite come, se $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in C^k(M)$:

$$(af + bg)(p) := af(p) + bg(p)\,, \quad \text{per ogni } p \in M\,.$$

Fissato un punto $p \in M$, una **derivazione** in p, è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare $L_p : C^k(M) \to \mathbb{R}$ che gode della *proprietà di Leibniz*:

$$L_p(fg) = f(p)L_p(g) + g(p)L_p(f)\,, \quad \text{per ogni } f, g \in C^k(M). \tag{A.17}$$

Evidentemente una combinazione lineare di derivazioni in p, $aL_p + bL'_p$ ($a, b \in \mathbb{R}$) dove

$$(aL_p + bL'_p)(f) := aL_p(f) + bL'_p(f)\,, \quad \text{per ogni } f, g \in C^k(M),$$

è ancora una derivazione. Pertanto le derivazioni in p formano uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$, che indichiamo con $\mathcal{D}^k_p$. Ogni carta locale (U, ϕ) con $U \in p$ definisce automaticamente n derivazioni in p come segue. Se $x^1, \ldots, x^n$ sono le coordinate associate a ϕ, definiamo la derivazione rispetto alla coordinata k-esima:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p : f \mapsto \left.\frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x^k}\right|_{\phi(p)}\,, \quad \text{per ogni } f, g \in C^1(M). \tag{A.18}$$

Le n derivazioni in p, $\left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p$, sono *linearmente indipendenti*: se 0 indica la derivazione nulla e $c^1, c^2, \cdots, c^n \in \mathbb{R}$ sono tali che:

$$\sum_{k=1}^{n} c^k \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p = 0\,,$$

allora scegliendo una funzione differenziabile che coincide con la funzione coordinata x^l in un intorno aperto di p (la cui chiusura è inclusa in U) e si annulla fuori di esso, la richiesta

$$\sum_{k=1}^{n} c^k \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p f = 0\,,$$

implica che $c^l = 0$. Dato che possiamo scegliere l arbitrariamente, concludiamo che ogni coefficiente c^r è nullo per $r = 1, 2, \ldots, n$. In definitiva le n derivazioni $\left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p$ formano una base per un sottospazio di $\mathcal{D}_p^k$ di dimensione n (si può in realtà provare che, nel caso di $k = \infty$, questo sottospazio coincide con $\mathcal{D}_p^\infty$ stesso). Cambiando carta locale ed usando (V, ψ) con $V \ni p$ e con coordinate $y^1, \ldots, y^n$, le nuove derivazioni rispetto alle nuove coordinate sono legate alle vecchi dalla relazione

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p = \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\right|_{\psi(p)} \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p\,. \tag{A.19}$$

La dimostrazione di questo fatto è immediata dalle definizioni date. Dato che la matrice jacobiana di coefficienti $\left.\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\right|_{\psi(p)}$ è biettiva per definizione di carte locali, concludiamo che il sottospazio di $\mathcal{D}_p^k$ generato dalle derivazioni $\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p$ coincide con quello generato dalle derivazioni $\left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p$. Tale sottospazio è quindi un oggetto *intrinseco*.

Definizione A.12. (**Spazio tangente**). Data una varietà differenziabile di dimensione n e classe C^k ($k \geq 1$), si consideri un punto $p \in M$.
Il sottospazio vettoriale delle derivazioni in $p \in M$ generato dalle n derivazioni $\left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p$, con $k = 1, 2, \ldots, n$, riferite ad un qualsiasi sistema di coordinate locali (U, ϕ) con $U \ni p$, è detto **spazio tangente in** p **ad** M e si indica con T_pM. Gli elementi dello spazio tangente in p di dicono **vettori tangenti in** p ad M o **vettori controvarianti in** p.
$\diamondsuit$

Ricordiamo che se V è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$, lo spazio V^* delle funzioni lineari da V in $\mathbb{R}$ è detto **spazio duale** di V. Se la dimensione di V è finita, è tale anche quella di V^* e le due dimensioni coincidono. In particolare, se $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ è una base per V, la **base duale** in V^* è la base di V^*, $\{e^{*j}\}_{j=1,\ldots,n}$, completamente individuata dal requisito di linearità e dalle richieste:

$$e^{*j}(e_i) = \delta_i^j\,, \quad \text{per } i, j = 1, \ldots, n\,.$$

Se $f \in V^*$ e $v \in V$, si usa la notazione:

$$\langle v, f \rangle := f(v)\,.$$

Definizione A.13. (**Spazio cotangente**). Data una varietà differenziabile di dimensione n e classe C^k ($k \geq 1$), si consideri un punto $p \in M$.
Lo spazio duale di T_pM è detto **spazio cotangente in** p **ad** M e si indica con T_p^*M. Gli elementi

dello spazio cotangente in p di dicono **vettori cotangenti in** p a M o **vettori covarianti in** p o **1-forme** in p. Per ogni base di elementi $\frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_p$ in T_pM, gli n elementi della base duale in T_p^*M vengono indicati con $dx^i|_p$. Per definizione:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x^k}|_p, dx^i|_p \right\rangle = \delta^i_k\,.$$

$\diamondsuit$

Possiamo ora dare la nozione di campo vettoriale differenziabile sulla varietà M.

Definizione A.14. Se M è una varietà differenziabile di classe C^k e dimensione n, un **campo vettoriale di classe** C^r o **campo vettoriale controvariante** di classe C^r, con $r = 0, 1, \ldots, k$ è un assegnazione di un vettore $v(p) \in T_pM$ per ogni $p \in M$, in modo tale che, per ogni carta locale (U, ϕ) con coordinate $x^1, \ldots, x^n$, per cui

$$v(q) = \sum_{i=1}^{n} v^i(x^1_q, \ldots, x^n_q)\, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_q\,,$$

le n funzioni $v^i = v^i(x^1, \ldots, x^n)$ sono di classe C^r su $\phi(U)$. un **campo covettoriale di classe** C^r o **campo vettoriale covariante** di classe C^r con $r = 0, 1, \ldots, k$ è un assegnazione di un covettore $\omega(p) \in T_pM$ per ogni $p \in M$, in modo tale che, per ogni carta locale (U, ϕ) con coordinate $x^1, \ldots, x^n$, per cui

$$\omega(q) = \sum_{i=1}^{n} v_i(x^1_q, \ldots, x^n_q)\, dx^i\Big|_q\,,$$

le n funzioni $\omega_i = \omega_i(x^1, \ldots, x^n)$ sono di classe C^r su $\phi(U)$. $\diamondsuit$

Osservazioni A.7.
(1) Dimostreremo più avanti che la nozione data di vettore tangente, nel caso di spazi affini e quindi nel caso di $\mathbb{R}^n$ in particolare, coincide con la nozione standard.
(2) Sia $v \in T_pM$ e si considerino due carte locali (U, ϕ) e (V, ψ) con $U \cap V \ni p$ e con coordinate, rispettivamente, $x^1, \ldots, x^n$ e $x'^1, \ldots, x'^n$. In tal caso deve valere:

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i\, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \sum_{j=1}^{n} v'^j\, \frac{\partial}{\partial x'^j}\Big|_p\,.$$

Pertanto

$$\sum_{i}^{n} v^i\, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \sum_{j,i=1}^{n} v'^j\, \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\Big|_{\psi(p)} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\,,$$

da cui

$$\sum_{i=1}^{n} \left(v^i - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\Big|_{\psi(p)} v'^j \right) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = 0\,.$$

Dato che le derivazioni $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ sono linearmente indipendenti, concludiamo che vale la legge di trasformazioni delle componenti di uno stesso vettore in T_pM, al variare delle coordinate,

$$v^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\Bigg|_{\psi(p)} v'^j \;, \tag{A.20}$$

Con la stessa procedura si ottiene l'analoga formula per i vettori covarianti

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\Bigg|_{\psi(p)} \omega'_j \;, \tag{A.21}$$

quando

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, dx^i\Big|_p = \sum_{j=1}^{n} \omega'_j \, dx'^j\Big|_p \;.$$

Vale la seguente proposizione di dimostrazione ovvia, ma molto importante dal punto di vista delle applicazioni.

Proposizione A.1. *Se M è una varietà differenziabile di classe C^k e dimensione n, assegnare un campo vettoriale controvariante X di classe C^r oppure un campo vettoriale controvariante ω di classe C^r è completamente equivalente all'assegnazione di n-ple di funzioni di classe C^r, $\{X^i_{(r)}\}_{i=1,\ldots,n}$ oppure, rispettivamente, $\{\omega_{(r)j}\}_{j=1,\ldots,n}$ – una n-pla per ogni carta locale $(U_{(r)}, \phi_{(r)})$ di un fissato (arbitrariamente) atlante di M – in modo tale che, cambiando carte nell'atlante, valgano le relazioni:*

$$X^i_{(r)}\left(\phi_{(r)}(p)\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^i_{(r)}}{\partial x^j_{(r')}}\Bigg|_{\phi_{(r')}(p)} X^j_{(r')}\left(\phi_{(r')}(p)\right)\,, \tag{A.22}$$

oppure, rispettivamente,

$$\omega_{(r')i}\left(\phi_{(r')}(p)\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^j_{(r')}}{\partial x^i_{(r)}}\Bigg|_{\phi_{(r)}(p)} \omega_{(r)j}\left(\phi_{(r)}(p)\right)\;, \tag{A.23}$$

per ogni punto $p \in M$. $\diamondsuit$

A.2.7 Differenziali, curve e vettori tangenti.

Consideriamo un campo scalare $f : M \to \mathbb{R}$ di classe C^r sulla varietà M di classe C^k e dimensione n. Supponiamo esplicitamente che $k \geq r > 1$. Se assegnamo su un atlante e per ogni carta dell'atlante le n funzioni $\{\frac{\partial f}{\partial x^i}\}$ si verifica subito che sono rispettate le condizioni della proposizione A.1, di conseguenza abbiamo definito un campo vettoriale covariante.

Definizione A.15. Consideriamo un campo scalare $f : M \to \mathbb{R}$ di classe C^r sulla varietà M di classe C^k e dimensione n e valga $k \geq r > 1$. Il **differenziale** di f, df è il campo vettoriale covariante di classe C^{r-1} individuato, in ogni carta locale (U, ψ) da:

$$df|_p = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{\psi(p)} dx^i|_p \,.$$

$\diamondsuit$.

Consideriamo una curva di classe C^r nella varietà M di classe C^k, cioé un'applicazione di classe C^r $(r = 0, 1, \ldots, k)$, $\gamma : I \to M$, dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto pensato come sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}$. Supponiamo esplicitamente che $r > 1$. Se $p \in \gamma(I)$, possiamo definire il *vettore tangente* a γ in p come, se $\gamma(t_p) = p$:

$$\dot{\gamma}(p) := \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{dx^i}{dt}\right|_{t_p} \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \,,$$

in una qualsiasi carta locale definita nell'intorno di p. La definizione in realtà *non* dipende dalla carta scelta. Infatti, se definissimo

$$\dot{\gamma}'(p) := \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{dx'^j}{dt}\right|_{t_p} \left.\frac{\partial}{\partial x'^j}\right|_p \,,$$

in riferimento ad un secondo sistema di coordinate definite nell'intorno di p, attraverso la (A.20) otterremmo subito che:

$$\dot{\gamma}(p) = \dot{\gamma}'(p) \,.$$

Possiamo allora dare la seguente definizione.

Definizione A.16. Una **curva di classe** C^r, $r = 0, 1, \ldots, k$ nella varietà differenziabile M di dimensione n e classe C^k, è un'applicazione di classe C^r, $\gamma : I \to M$, dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto (pensato come sottovarietà differenziabile embedded di $\mathbb{R}$). Se $r > 1$, il **vettore tangente** a γ in $p = \gamma(t_p)$ per qualche $t \in I$, è il vettore $\dot{\gamma}(p) \in T_pM$ definito da

$$\dot{\gamma}(p) := \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{dx^i}{dt}\right|_{t_p} \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \,, \tag{A.24}$$

in una qualsiasi carta locale definita nell'intorno di p. $\diamondsuit$.

A.2.8 Spazi affini come varietà differenziabili.

Ogni spazio affine $\mathbb{A}^n$ ammette una struttura naturale di varietà differenziabile (di classe C^∞) dalla classe di sistemi di coordinate globali naturali, tra di loro compatibili dei *sistemi di coordinate cartesiane* come definiti nella definizione A.2. Ricordiamo che un tale sistema di coordinate

si costruisce come segue. Si fissa un punto $O \in \mathbb{A}^n$, detto *origine* delle coordinate, ed una base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ dello spazio delle traslazioni V, detta *sistema di assi* delle coordinate. Variando $P \in \mathbb{A}^n$ le componenti, $((P-O)^1, \ldots, (P-O)^n)$, di ogni vettore $P - O$ rispetto alla base scelta definiscono una funzione biettiva $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{R}^n$ che permette di identificare i punti di $\mathbb{E}^n$ con i punti di $\mathbb{R}^n$. Questa corrispondenza tra punti, P, e n-ple, $((P-O)^1, \ldots, (P-O)^n)$, è biettiva. È iniettiva per la richiesta (i) nella definizione A.1 ed è suriettiva perché il dominio di $(P, O) \mapsto P - O \in V$ coincide, per definizione, con tutto $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ ed ora O è tenuto fisso.
La topologia euclidea di $\mathbb{R}^n$ induce tramite f una topologia su $\mathbb{A}^n$ (definendo gli aperti di $\mathbb{A}^n$ come le controimmagini degli aperti di $\mathbb{R}^n$) che lo rende spazio topologico omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ e quindi di Hausdorff a base numerabile. Si verifica facilmente che la topologia definita in tal modo non dipende dalla scelta di O e nemmeno dalla scelta della base in V. Ulteriormente la funzione f definisce da sola un atlante C^∞ su $\mathbb{A}^n$ e dota tale spazio di una struttura differenziabile generata da tale atlante. In base agli esercizi A.2.**1** e **2** si ha che, passando ad un altro sistema di coordinate cartesiane, $(\mathbb{E}^n, g)$, le funzioni $f \circ g^{-1}$ e $g \circ f^{-1}$ sono funzioni lineari non omogenee e quindi infinitamente differenziabili. Concludiamo che tutte le carte globali individuate da sistemi di coordinate cartesiane sono a due a due compatibili e che inducono, di conseguenza, la stessa struttura differenziabile di classe C^∞. Possiamo dire che tale struttura differenziabile è generata dalla sola struttura di spazio affine senza scelte arbitrarie, in questo senso è *naturale.*
Considerando uno spazio affine $\mathbb{A}^n$ come una varietà differenziabile una domanda che sorge spontanea è quale relazione intercorra tra lo spazio tangente ad ogni punto $T_P\mathbb{A}^n$, $P \in \mathbb{A}^n$ e lo spazio delle traslazioni V. Si ha il seguente teorema.

Teorema A.4. *Sia $\mathbb{A}^n$ uno spazio affine con spazio delle traslazioni V. Si fissi $P \in \mathbb{A}^n$ e si consideri $T_P\mathbb{A}^n$. Vale quanto segue.*
(a) *Se $(\mathbb{A}^n, f)$ è un sistema di coordinate cartesiane di origine O e con assi $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n \in V$, indicate con $x^1, \ldots, x^n$ le funzioni coordinate della carta globale detta, l'applicazione:*

$$\chi_P : V \ni \sum_{i=1}^n v^i\, \mathbf{e}_i \mapsto \sum_{i=1}^n v^i\, \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_P \in T_P\mathbb{A}^n\,, \tag{A.25}$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali.
(b) *Se χ'_P è un analogo isomorfismo ottenuto partendo da un'altro sistema di cartesiane, vale*

$$\chi_P = \chi'_P\,,$$

e in questo senso l'isomorfismo χ_P è naturale.

Dimostrazione. (a) Dato che sia V che $T_p\mathbb{A}$ hanno dimensione finita n, l'applicazione lineare χ_P definita in (A.25) tramite l'identificazione delle componenti di un vettore rispetto a due basi nei rispettivi spazi, è un isomorfismo. (b) Per l'esercizio A.2.**1** Se $(\mathbb{A}^n, f)$ è un sistema di coordinate cartesiane con coordinate $x^1, \cdots, x^n$ e $(\mathbb{A}^n, g)$ un altro sistema di coordinate cartesiane, con coordinate $x'^1, \cdots, x'^n$, di origine O' e assi $\mathbf{e}'_1, \ldots, e'_n$, in modo che valga

$$\mathbf{e}_i = \sum_j B^j{}_i \mathbf{e}'_j\,, \tag{A.26}$$

allora la funzione $g \circ f^{-1}$ è espressa, in coordinate, dalle relazioni:

$$x'^j = \sum_{i=1}^{n} B^j{}_i (x^i + b^i), \tag{A.27}$$

dove $(O - O') = \sum_i b^i e_i$. Definiamo allora:

$$\chi'_P : V \ni \sum_{j=1}^{n} v'^j \, \mathbf{e}'_j \mapsto \sum_{i=j}^{n} v'^j \, \frac{\partial}{\partial x'^j}\bigg|_P \in T_P\mathbb{A}^n \,, \tag{A.28}$$

Come conseguenza di (A.27) si ha che.

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_P = \sum_j B^j{}_i \, \frac{\partial}{\partial x'^j}\bigg|_P \, . \tag{A.29}$$

Da (A.26) e (A.29) notiamo che la matrice di passaggio tra le basi $\{\,\mathbf{e}'_j\}$ e $\{\,\mathbf{e}_i\}$ nei primi membri di (A.25) e (A.28) è la stessa che si ha tra le basi $\{\,\frac{\partial}{\partial x'^j}\big|_P\}$ e$\{\,\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_P\}$ nei secondi membri. Questo comporta immediatamente che $\chi_P = \chi'_P$. $\Box$

Osservazioni A.8.
(1) L'identificazione dovuta a χ_P identifica vettori dello spazio V con vettori dello spazio tangente $T_P\mathbb{A}^n$. I primi non sono associati in alcun punto di $\mathbb{A}^n$ e, nella letteratura geometrica tradizionale, sono chiamati *vettori liberi*, mentre i secondi sono associati al punto $P \in \mathbb{A}^n$ e, nella letteratura geometrica tradizionale, sono chiamati *vettori applicati*. Questa distinzione ha senso solo negli spazi affini. Nelle varietà differenziabili generiche esistono solo i vettori applicati.
(2) In base al teorema provato, se $(\mathbb{A}^n, f)$ è un sistema di coordinate cartesiane di origine O e con assi $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n \in V$, indicate con $x^1, \ldots, x^n$ le funzioni coordinate della carta globale detta sussiste l'identificazione canonica (dovuta all'esistenza dell'isomorfismo χ_P):

$$\mathbf{e}_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_P \, . \tag{A.30}$$

In particolare, il vettore tangente ad una curva $P = P(t)$ parametrizzata in coordinate cartesiane come $x^i = x^i(t)$, che in geometria differenziale è dato da

$$\mathbf{t}(t) = \sum_i \frac{dx^i}{dt} \, \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{P(t)} \, ,$$

è riscrivibile come:

$$\mathbf{t}(t) = \sum_i \frac{dx^i}{dt} \, \mathbf{e}_i \, .$$

In realtà quando si usa la prima notazione, si pensa in vettore tangente come vettore applicato, quando si usa la seconda lo si pensa come vettore libero.

A.2.9 Pushforward, pullback, derivata di Lie.

Siano M ed N sono varietà differenziabili (almeno di classe C^1), di dimensione m e n rispettivamente, e $f : N \to M$ una funzione differenziabile (almeno di classe C^1). Per un punto $p \in N$ consideriamo carte locali (U, ϕ) in N e (V, ψ) in M rispettivamente attorno a p e $f(p)$. Indichiamo con $(y^1, \ldots, y^n)$ le coordinate definite in tal modo in U e con $(x^1, \ldots, x^m)$ le coordinate definite in tal modo in V. Definiamo ancora $f^k(y^1, \ldots, y^n) = y^k(f \circ \phi^{-1})$ per $k = 1, \ldots, m$. Si definiscono allora:
(i) il **pushforward** $df_p : T_pN \to T_{f(p)}M$, data in coordinate da:

$$df_p : T_pN \ni \sum_{i=1}^{n} u^i \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p \mapsto \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f^j}{\partial y^i}\right|_{\phi(p)} u^i \right) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p , \tag{A.31}$$

e
(ii) il **pullback** $f_p^* : T^*_{f(p)}M \to T^*_pN$, data in coordinate da:

$$f_p^* : T^*_{f(p)}M \ni \sum_{j=1}^{m} \omega_j dx^j|_{f(p)} \mapsto \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \left.\frac{\partial f^j}{\partial y^i}\right|_{\phi(p)} \omega_j \right) dy^i|_p . \tag{A.32}$$

Si verifica immediatamente che le definizioni *non dipendono dalle coordinate usate attorno a p e $f(p)$*. Il pushforward è anche indicato con $f_{p*} : T_pN \to T_{f(p)}M$.

Sia X è un campo vettoriale di classe C^1 sulla varietà differenziabile M di classe C^2 e dimensione n. possiamo considerare il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali $\phi^{(X)}$ (vedi la sezione 3.5.3) da esso generato. Fissiamo $p \in M$ ed un campo vettoriale differenziabile Y su N. Se $\epsilon > 0$ è sufficientemente piccolo, ha senso il vettore in p:

$$(d\phi_t^{(X)})_{\phi_{-t}^{(X)}(p)} Y(\phi_{-t}^{(X)}(p)) , \quad \text{per ogni } t \in (-\epsilon, +\epsilon) .$$

La **derivata di Lie** del campo Y in p rispetto al campo X è definita come il vettore di T_pM:

$$\mathcal{L}_X|_pY := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (d\phi_t^{(X)})_{\phi_{-t}^{(X)}(p)} Y(\phi_{-t}^{(X)}(p)) . \tag{A.33}$$

In coordinate locali attorno a p, il gruppo ad un parametro trasforma $(x^1, \ldots, x^n)$ in $(x'^1, \ldots, x'^n) = (x_t^1, \ldots, x_t^n)$, pertanto, in coordinate:

$$(\mathcal{L}_X|_pY)^i := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right|_{(x^1_{-t}(p), \ldots, x^n_{-t}(p))} Y^j((x^1_{-t}(p), \ldots, x^n_{-t}(p))) .$$

Il calcolo esplicito fornisce allora:

$$(\mathcal{L}_X|_pY)^i := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right|_{(x^1_{-t}(p), \ldots, x^n_{-t}(p))} Y^j((x^1(p), \ldots, x^n(p))) + \sum_{j=1}^{n} \delta^i_j \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Y^j((x^1_{-t}(p), \ldots, x^n_{-t}(p)))$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j \; - \; \sum_{k=1}^{n} X^k \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} \right)\Bigg|_{(x^1(p),\ldots,x^n(p))} ,$$

dove abbiamo usato il fatto che:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} x'^i(x^1_t(p), \ldots, x^n_t(p)) = X^i(x^1(p), \ldots, x^n(p)) \, .$$

In definitiva abbiamo trovato che:

$$\mathcal{L}_X Y = [Y, X] \, , \tag{A.34}$$

dove il **commutatore** o **parentesi di Lie** $[X, Y]$ dei campi vettoriali X e Y di classe C^2 è definito come il campo vettoriale di classe C^1 che in coordinate locali si esprime come:

$$[Y, X](p) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j \; - \; X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} \right)\Bigg|_{(x^1(p),\ldots,x^n(p))} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \, . \tag{A.35}$$

Intrinsecamente $[X, Y]$ è l'unico campo vettoriale, visto come operatore differenziale, che soddisfa:

$$[Y, X](f) = Y(X(f)) - X(Y(f)) \quad \text{per ogni funzione } f \in C^1(M).$$

Per computo diretto si possono verificare le seguenti proprietà del commutatore visto come funzione che associa un campo vettoriale $[X, Y]$ di classe C^{k-1} a coppie di campi vettoriali X e Y di classe C^k sulla varietà di classe C^r, $r \geq k$. Se X, Y, Z sono campi vettoriali di classe C^k sulla varietà di classe C^r, $r \geq k$:

(i) **antisimmetria**: $[X, Y] = -[Y, X]$,

(ii) $\mathbb{R}$-**linearità** : $[aX + bZ, Y] = a[X, Y] + b[Z, Y]$ per ogni coppia $a, b \in \mathbb{R}$,

(iii) **proprietà di Jacobi**: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Per la proprietà di Jacobi si è assunto che i tre campi coinvolti siano di classe C^2 e lo 0 a secondo membro indica il campo vettoriale che è ovunque nullo su M. Vale infine, se $\cdot$ indica il prodotto punto per punto:

(iv) $[X, f \cdot Y] = f \cdot [X, Y] + X(f) \cdot Y$ per ogni funzione $f \in C^1(M)$.

A.2.10 Immersione di spazi tangenti per sottovarietà embedded.

Se $N \subset M$ è una sottovarietà differenziabile embedded della varietà differenziabile M (entrambe di classe C^k per qualche $k > 0$) e $n < m$ indicano rispettivamente le dimensioni di N ed M, i punti $p \in N$ sono contemporaneamente punti di M attraverso la funzione $\imath$ che identifica N con un sottoinsieme di M. La stessa cosa vale per i vettori di T_pN che possono essere visti, in modo naturale, come vettori in T_pM usando il pushforward $d\imath_p$ come ora mostriamo in dettaglio. Scegliamo una carta locale attorno a p, (U, ϕ) in N ed una analoga carta locale (V, ψ) attorno a p in M. Supponiamo che $\phi : U \ni q \mapsto (y^1(q), \ldots, y^n(q))$ mentre $\psi : V \ni q \mapsto (x^1(q), \ldots, x^m(q))$.

La funzione identità $\imath : N \to M$ che identifica N come varietà con N come sottoinsieme di M è differenziabile e

$$\psi \circ \imath \circ \phi^{-1} : (y^1, \ldots, y^n) \mapsto (x^1(y^1, \ldots y^n), \ldots, x^m(y^1, \ldots y^n)) \, .$$

Possiamo allora passare al pushforward $d\imath_p : T_pN \to T_{f(p)}M$, che come detto precedentemente, nelle coordinate dette è individuato da:

$$d\imath_p : \sum_{i=1}^{n} v^i \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p \mapsto \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\right|_p v^i \right) \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p \, , \tag{A.36}$$

Sappiamo che l'applicazione $d\imath_P$ non dipende dalla scelta delle carte locali attorno a p, (U, ϕ) e (V, ψ): se fossimo partiti da altre carte locali avremmo ottenuto la stessa funzione $d\imath_p$. In virtù di tale fatto proviamo che $d\imath_p$ è iniettiva.
Scegliendo coordinate in M adattate ad N, cioé una carta (V, ψ) con $\psi : V \ni q \mapsto (x^1(q), \ldots, x^m(q))$ in modo tale che $N \cap U$ corrisponda ai punti di coordinate $x^{n+1} = \cdots = x^m = 0$, le prime n coordinate $y^1 = x^1, \ldots y^n = x^n$ definiscono una carta locale su N. Questo è vero per la definizione stessa di sottovarietà embedded. Con questa scelta di coordinate locali in N e M, l'espressione esplicita di $d\imath_p$ è banale

$$d\imath_p : \sum_{i=1}^{n} v^i \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p \mapsto \sum_{i=1}^{n} v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \, .$$

È evidente in questa rappresentazione che l'applicazione $d\imath_p$ è iniettiva. Pertanto l'applicazione $d\imath_p$ identifica T_pN con un sottospazio di T_pM.
Per ogni scelta di carte locali attorno a p, in N ed M rispettivamente, i vettori di base $\frac{\partial}{\partial y^i}|_p \in T_pN$ si identificano quindi, tramite $d\imath_p$, con vettori di T_pM. In questo senso un po' impropriamente si può scrivere:

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p = \sum_{k=1}^{m} \left.\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p \, . \tag{A.37}$$

A.2.11 Fibrato tangente e cotangente, varietà fibrate e sezioni.

Gli esempi più semplici di varietà fibrate sono il *fibrato tangente* ed il *fibrato cotangente* associati alla varietà differenziabile M. Prima di dare la definizione generale definiamo questi due oggetti. Consideriamo la varietà differenziabile M di dimensione n e classe C^k con $k \geq 2$ e consideriamo l'insieme ad essa associato:

$$TM := \{(p, v) \mid p \in M, \, v \in T_pM\} \, .$$

È possibile dotare tale insieme di una struttura naturale di varietà differenziabile di dimensione $2n$ e classe $k-1$; la varietà differenziabile ottenuta in questo modo (che si indica ancora con TM) si chiama **(varietà) fibrato tangente** di M. La struttura di varietà differenziabile è l'unica che ammette come atlante il seguente insieme di carte locali indotte dalla struttura differenziabile di M. Per ogni una carta locale della struttura differenziabile $\mathcal{A}_M$ di M, (U, ϕ), con $\psi : U \ni p \mapsto (x^1(p), \ldots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$, definiamo

$$TU := \{(p, v) \in TM \mid p \in U\}$$

e definiamo l'applicazione iniettiva

$$T\psi : TU \ni (p, v) \mapsto (x^1(p), \ldots, x^n(p), v^1, \ldots, v^n) \in \mathbb{R}^{2n} , \quad \text{dove } v = \sum_k v^k \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p .$$

Dotiamo infine TM della topologia generata dalle controimmagini degli insiemi aperti di $\mathbb{R}^{2n}$ secondo le funzioni $T\psi$. Si osservi che tale topologia rende TM spazio di Hausdorff, a base numerabile, localmente omeomorfo a $\mathbb{R}^{2n}$ (omeomorfismi locali sono proprio le funzioni $T\psi$). È facile verificare che l'insieme delle coppie $T\mathcal{A}_M := \{(TU, T\psi) \mid (U, \psi) \in \mathcal{A}_M\}$ è un atlante su TM di classe C^{k-1}. Spieghiamo l'origine del $k - 1$. Se $(TU, T\psi)$ e $(TV, T\phi)$ sono carte locali nell'atlante detto e $T\psi : (p, v) \mapsto (x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \ldots \dot{x}^n)$ mentre $T\phi : (p, v) \mapsto (y^1, \ldots, y^n, \dot{y}^1, \ldots \dot{y}^n)$, su $TU \cap TV$ (ammesso che non sia vuoto) valgono relazioni di forma (con ovvie notazioni):

$$y^i = y^i(x^1, \ldots, x^n) , \tag{A.38}$$

$$\dot{y}^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \dot{x}^j . \tag{A.39}$$

La presenza della matrice jacobiana nella seconda equazione abbassa di 1 la classe di differenziabilità di TM rispetto a M.
La struttura differenziabile $\mathcal{A}_{TM}$ generata dall'atlante $T\mathcal{A}_M$ rende TM una varietà differenziabile di dimensione n e classe C^{k-1} detta **(varietà) fibrato tangente** di M.
La funzione *suriettiva* $\Pi : TM \ni (p, v) \mapsto p \in M$ risulta essere di classe C^{k-1} e si chiama **proiezione canonica**. Si osservi che se (U, ψ) è una carta locale su M, risulta che $TU = \Pi^{-1}(U)$. La varietà M si dice **base** del fibrato tangente. Per $p \in M$, lo spazio tangente $T_pM = \Pi^{-1}(p)$, che risulta essere una sottovarietà embedded di TM, si dice **fibra** di TM nel punto $p \in M$.

Il **fibrato cotangente** T^*M viene definito in modo del tutto analogo assegnando una struttura naturale di varietà differenziabile di dimensione $2n$ e classe C^{k-1} sull'insieme:

$$T^*M := \{(p, \omega_p) \mid p \in M,\ \omega_p \in T_p^*M\} .$$

Per ogni una carta locale della struttura differenziabile $\mathcal{A}_M$ di M, (U, ϕ), con $\psi : U \ni p \mapsto (x^1(p), \ldots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$, definiamo

$$T^*U := \{(p, \omega_p) \in T^*M \mid p \in U\}$$

e definiamo l'applicazione iniettiva

$$T^*\psi : T^*U \ni (p, \omega_p) \mapsto (x^1(p), \ldots, x^n(p), (\omega_p)_1, \ldots, (\omega_p)_n) \in \mathbb{R}^{2n} , \quad \text{dove } \omega_p = \sum_k (\omega_p)_k \left. dx^k\right|_p .$$

L'atlante su T^*M contenente tutte le carte $(T^*U, T^*\psi)$ con $(U, \psi) \in \mathcal{A}_M$, definisce la struttura di varietà differenziabile di dimensione $2n$ e classe C^{k-1} su T^*M. Consideriamo la coppia di carte locali $(T^*U, T^*\psi)$ e $(T^*V, T^*\phi)$ su T^*M dove $T^*\psi : (p,v) \mapsto (x^1, \ldots, x^n, \tilde{x}_1, \ldots \tilde{x}_n)$ e dove $T^*\phi : (p,v) \mapsto (y^1, \ldots, y^n, \tilde{y}_1, \ldots \tilde{y}_n)$. Su $T^*U \cap T^*V$ (ammesso che non sia vuoto) valgono relazioni di forma (con ovvie notazioni):

$$y^i = y^i(x^1, \ldots, x^n)\,, \tag{A.40}$$

$$\tilde{y}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \tilde{x}_j\,. \tag{A.41}$$

La funzione *suriettiva* $\Pi : T^*M \ni (p,v) \mapsto p \in M$ risulta essere di classe C^{k-1} e si chiama **proiezione canonica**. Si osservi che se (U,ψ) è una carta locale su M, risulta che $T^*U = \Pi^{-1}(U)$. La varietà M si dice **base** del fibrato cotangente. Per $p \in M$, lo spazio cotangente $T_p^*M = \Pi^{-1}(p)$, che risulta essere una sottovarietà embedded di T^*M, si dice **fibra** di T^*M nel punto $p \in M$.

Osservazioni A.9. Riferiamoci a TM anche se quanto diremo vale banalmente anche per T^*M. Prima di tutto notiamo che tutte le fibre T_pM sono diffeomorfe tra di loro essendo tutte spazi vettoriali della stessa dimensione e dato che gli isomorfismi di spazi vettoriali sono diffeomorfismi rispetto alla struttura differenziale delle fibre indotta da quella di TM. Tuttavia ci sono infiniti diffeomorfismi per ogni coppia T_pM, T_qM: nessuno di questi diffeomorfismi è più naturale degli altri. Quindi le fibre sono tutte diffeomorfe ma in modo non canonico e sono di conseguenza diffeomorfe in modo non canonico a $\mathbb{R}^n$ che indicheremo con F e penseremo come la "fibra astratta". Se fissiamo $p \in M$, c'è un intorno U di p e un diffeomorfismo $f_U : U \times F \to \Pi^{-1}(U)$ che soddisfa $\Pi(f_U(q,v)) = q$ per ogni $q \in U$ e $v \in F$. L'intorno U può essere scelto come il dominio della carta locale (U,ψ) di M ed il diffeomorfismo f_U come la funzione $(T\psi)^{-1}$ definita precedentemente. Abbiamo provato che TM è *localmente diffeomorfo* a $M \times F$.

La definizione di varietà fibrata si ottiene astraendo dalle precedenti costruzioni e tenendo conto dell'osservazione fatta sopra.

Definizione A.17. **(Varietà fibrata e sezioni).** Una **varietà fibrata** E (detta anche semplicemente **(spazio) fibrato**) è individuata da: (i) una varietà differenziabile, indicata ancora con E, (ii) una seconda varietà differenziabile M detta **base**, (iii) un'applicazione differenziabile suriettiva $\Pi : E \to M$ detta **proiezione canonica** e (iiv) una terza varietà differenziabile F detta **fibra standard**. Devono essere infine soddisfatte le seguenti due condizioni:
(a) per ogni $p \in M$ l'insieme $F_p := \Pi^{-1}(p)$, detto **fibra in** p, deve essere sottovarietà embedded di E che risulta anche essere diffeomorfa (in modo non canonico in generale) a F;
(b) E deve essere **localmente diffeomorfo** a $M \times F$ nel senso che segue: per ogni $p \in M$ deve esistere un suo intorno aperto U e un diffeomorfismo $f_U : U \times F \to \Pi^{-1}(U)$ con $\Pi(f_U(x,y)) = x$ per ogni $x \in U$ e $y \in F$.
Una **sezione** di E è un'applicazione differenziabile $s : M \to E$ con $\Pi(s(x)) = x$ per ogni $x \in M$.
$\diamondsuit$

N.B. Nella definizione data si suppone che gli ordini di differenziabilità delle funzioni e delle varietà coinvolte siano assegnati in modo coerente.