

Valter Moretti
Dipartimento di Matematica
Facoltà di Scienze M.F.N
Università di Trento

Introduzione alla teoria delle equazioni alle Derivate Parziali del secondo ordine

Corso di *Fondamenti di Fisica Matematica* per la Laurea Triennale in Matematica
Facoltà di Scienze MFN, Università di Trento,
anno accademico 2010-2011

Indice

1	Introduzione alle equazioni differenziali a derivate parziali del secondo ordine quasi lineari.	7
1.1	Notazioni, definizioni, convenzioni e qualche risultato tecnico elementare.	7
1.1.1	Funzioni differenziabili ed operatori differenziali.	7
1.1.2	Insiemi connessi per archi differenziabili a tratti.	9
1.1.3	Norme e seminorme.	10
1.1.4	Risultati elementari sulle serie di funzioni.	12
1.2	Motivazioni fisico matematiche per lo studio delle equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine: le equazioni di Maxwell.	16
1.2.1	Equazioni di Maxwell in forma integrale.	17
1.2.2	Teoremi di Gauss, Stokes ed equazioni di Maxwell in forma differenziale locale.	18
1.3	Equazioni differenziali del secondo ordine quasilineari	23
1.3.1	Trasformazioni di coordinate e struttura delle equazioni quasilineari del secondo ordine	24
1.3.2	Classificazione delle equazioni differenziali quasilineari del secondo ordine	26
1.4	Il problema di Cauchy ed il Teorema di Cauchy-Kovalevskaia.	30
1.4.1	Superfici regolari in \mathbb{R}^n	30
1.4.2	Il problema di Cauchy e la “ben posizione” del problema nel senso di Hadamard.	31
1.4.3	Il Teorema di Cauchy-Kovalevskaia.	33
1.4.4	Il caso di una superficie regolare generica in \mathbb{R}^n descritta in <i>coordinate normali</i>	35
1.4.5	Nozione di superficie caratteristica	37
2	Equazioni Ellittiche e funzioni armoniche in \mathbb{R}^n: risultati elementari.	42
2.1	Il problema fisico dell’elettrostatica e le equazioni di Poisson e Laplace.	42
2.2	Principio del massimo per funzioni armoniche e principio del massimo generalizzato.	44
2.2.1	Funzione armoniche e sub armoniche in \mathbb{R}^n	44
2.2.2	Principio del massimo (in forma debole).	47
2.2.3	Principio del massimo generalizzato.	49

2.2.4	Due teoremi di unicità per il problema di Dirichlet dal principio del massimo.	51
2.3	Le identità di Green e le loro conseguenze elementari.	54
2.3.1	Identità di Green.	54
2.3.2	Conseguenze del teorema di Gauss e delle identità di Green: teorema di unicità per il problema di Neumann.	54
3	Soluzioni fondamentali per l'equazione di Poisson in \mathbb{R}^n e risultati ad esse legati.	60
3.1	Soluzioni fondamentali.	60
3.1.1	Proprietà elementari delle soluzioni fondamentali.	61
3.2	Ulteriori proprietà delle funzioni armoniche in \mathbb{R}^n .	66
3.2.1	Non esistenza di funzioni armoniche con supporto compatto e non nulle.	67
3.2.2	Analiticità delle funzioni armoniche in \mathbb{R}^n .	68
3.2.3	Teorema della media e principio del massimo in forma forte.	71
3.2.4	Teorema di Liouville per le funzioni armoniche in \mathbb{R}^n .	75
4	Funzioni di Green e costruzione di soluzioni del problema di Dirichlet.	78
4.1	Ancora sul problema di Dirichlet.	78
4.1.1	Funzioni di Green e nuclei di Poisson.	79
4.2	Funzioni di Green per domini particolari.	86
4.2.1	Il metodo delle cosiddette <i>cariche immagine</i> .	87
4.2.2	La funzione di Green nella palla in \mathbb{R}^3 .	88
4.2.3	La funzione di Green nel cerchio in \mathbb{R}^2 .	91
4.2.4	La funzione di Green in un semispazio di \mathbb{R}^3 .	92
4.3	Soluzione per il problema di Dirichlet nel cerchio in \mathbb{R}^2 tramite l'analisi di Fourier.	93
5	Equazioni iperboliche: alcuni risultati generali elementari per le equazioni di D'Alembert e di Klein-Gordon in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.	101
5.1	L'equazione di D'Alembert come equazione della corda vibrante e della membrana vibrante.	102
5.1.1	L'equazione per la corda oscillante per piccole deformazioni.	102
5.1.2	L'equazione per la membrana oscillante per piccole deformazioni.	104
5.1.3	*L'equazione per la vibrazione di un tamburo ideale di topologia arbitraria.	105
5.2	Condizioni iniziali ed al contorno.	108
5.3	Bilancio energetico e teoremi di unicità.	109
5.3.1	Densità di energia ed equazione di continuità.	109
5.3.2	Teoremi di unicità.	112
6	Equazione di D'Alembert e di Klein-Gordon in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \times [a, b]$.	116
6.1	Equazione di D'Alembert sulla retta reale senza condizioni al contorno.	116
6.1.1	Assenza di sorgenti, formula di D'Alembert, domini di dipendenza.	117
6.1.2	Equazione di D'Alembert su tutta la retta con sorgente.	123

6.2	Dalla separazione delle variabili alla serie di Fourier.	126
6.3	Alcuni risultati elementari sulla serie di Fourier.	128
6.3.1	La serie di Fourier nello spazio di Hilbert $L^2([-L/2, L/2], dx)$	129
6.3.2	Convergenza uniforme della serie di Fourier e derivazione sotto il simbolo di serie.	133
6.3.3	Serie di Fourier in seni e coseni	139
6.4	Il problema su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$ con condizioni al bordo periodiche.	140
6.4.1	Teorema di unicità.	140
6.4.2	Esistenza delle soluzioni per dati iniziali sufficientemente regolari.	142
6.4.3	Velocità di fase, frequenza, lunghezza d'onda.	147
6.5	Il problema su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$ con condizioni al bordo di annullamento (e di Dirichlet)	148
6.5.1	Teorema di unicità.	148
6.5.2	Esistenza delle soluzioni per dati iniziali sufficientemente regolari.	149
6.5.3	Il caso di condizioni al bordo di Dirichlet	155
7	Introduzione ai metodi dell'analisi spettrale e qualche applicazione all'acustica musicale.	158
7.1	Generalizzazione della procedura di soluzione con la serie di Fourier su domini più generali.	158
7.1.1	Autofunzioni del laplaciano con condizioni di Dirichlet e serie di Fourier generalizzata.	159
7.1.2	*Autofunzioni dell'operatore di Laplace-Beltrami su una varietà riemanniana.	162
7.1.3	Soluzione dell'equazione di D'Alembert con condizioni di Dirichlet tramite l'analisi spettrale: un caso semplificato.	165
7.1.4	Membrana rettangolare e membrana circolare.	168
7.1.5	Fenomeni di smorzamento e risonanza in risuonatori forzati.	172
7.1.6	*Il caso del risuonatore o tamburo ideale forzato di topologia arbitraria.	177
7.2	Onde di pressione.	180
7.2.1	L'equazione di D'Alembert per le onde di pressione.	180
7.2.2	Esistenza del potenziale delle velocità.	184
7.2.3	Suono prodotto da risuonatori forzati.	185
7.2.4	Risuonatore ad aria di Helmholtz.	187
7.3	Un po' di fisica matematica del suono e della musica.	188
7.3.1	Strumenti musicali a corda.	189
7.3.2	Il suono prodotto dagli strumenti musicali a corde.	193
7.3.3	Le note musicali pure e note con timbro.	195
7.3.4	Scale e temperamenti	197
7.3.5	Possiamo udire la forma di un tamburo?	198

8	Equazioni paraboliche: l'equazione del calore e le sue proprietà elementari.	200
8.1	L'equazione del calore dalla termodinamica dei continui.	200
8.2	Condizioni iniziali ed al contorno, frontiera parabolica.	202
8.3	Principio del massimo parabolico e teoremi di unicità.	203
8.3.1	Principio del massimo parabolico in regioni limitate.	203
8.3.2	Teorema di unicità per condizioni al bordo di Dirichlet.	206
8.3.3	Principio del massimo parabolico in regioni spaziali illimitate.	207
8.3.4	Teorema di unicità per condizioni al bordo di Dirichlet con domini spaziali illimitati.	210
A	Un accenno all'approccio moderno per il problema ellittico: soluzioni in senso distribuzionale e teoremi di regolarità ellittica.	211
B	Limite e derivazione sotto il segno integrale e di serie dalla teoria della misura.	216
B.1	Teoremi della convergenza monotona e dominata.	216
B.2	Derivazione sotto il segno di integrale e di serie.	220
C	Relazioni di ortogonalità tra funzioni trigonometriche utili nella teoria della serie di Fourier.	224
C.1	Esponenziali immaginari periodici su $J = [a, a + L]$	224
C.2	Funzioni seni e coseni periodiche su $J = [a, a + L]$	225
C.3	Seni e coseni su $[0, L]$ con condizioni di annullamento, o di annullamento della derivata, ai bordi.	227

Introduzione

Queste dispense sono relative alla seconda parte del corso di Fondamenti di Fisica Matematica, tenuto dall'autore per il corso di Laurea Triennale in Matematica presso Facoltà di Scienze MFN dell'Università di Trento. Lo scopo del corso è di introdurre gli studenti ai primi rudimenti della teoria delle equazioni differenziali a derivate parziali. Quindi, eccetto che per qualche accenno in appendice, non sono introdotti gli spazi funzionali (in particolare di Sobolev) che si adoperano nelle trattazioni più avanzate discutendo l'esistenza delle soluzioni in “senso debole”. Lo sforzo dell'autore è stato quello di dare una trattazione rigorosa, senza però perdere il contatto con alcune motivazioni che portano a scegliere un particolare tipo di equazioni differenziali piuttosto che un altro per formalizzare un certo contesto fisico.

I prerequisiti riguardano l'analisi matematica delle funzioni di più variabili, i risultati elementari della teoria delle equazioni differenziali ordinarie e alcune nozioni elementari di teoria delle funzioni di variabile complessa e di teoria della misura. Altre nozioni, come quella di spazio di Hilbert L^2 , necessario per sviluppare la teoria della serie di Fourier, sono introdotte di volta in volta.

Nota. Alcuni argomenti, quelli le cui sezioni hanno titolo preceduto da un asterisco, riguardano argomenti complementari avanzati rispetto al contenuto standard del corso che richiedono conoscenze di nozioni matematiche superiori. Tali sezioni possono quindi essere omesse in un corso standard del secondo anno della laurea triennale in matematica. Questi argomenti sono indipendenti dal resto delle dispense anche se possono essere collegati tra di loro.

L'autore ringrazia tutti gli studenti, in particolare Massimo Menapace, Adriano Patton, Giovanni Stecca, che hanno segnalato errori di vario genere, i colleghi Fabio Bagagiolo e Augusto Visintin per utili osservazioni e la musicista Sara Coser per l'aiuto nella parte di fisica matematica della musica e degli strumenti musicali.

Capitolo 1

Introduzione alle equazioni differenziali a derivate parziali del secondo ordine quasi lineari.

In questo capitolo introdurremo le idee generali della teoria delle equazioni differenziali del secondo ordine alle derivate parziali partendo da motivazione provenienti dalla fisica. Cominciamo con il fissare le notazioni e le convenzioni che useremo in tutte le dispense e con il richiamare qualche utile risultato generale.

1.1 Notazioni, definizioni, convenzioni e qualche risultato tecnico elementare.

In questa sezione riportiamo notazioni, definizioni e qualche risultato tecnico elementare che useremo in tutte le dispense.

1.1.1 Funzioni differenziabili ed operatori differenziali.

Se f è una funzione definita sullo spazio topologico X , per esempio \mathbb{R}^n oppure un sottoinsieme di \mathbb{R}^n dotato della topologia indotta da \mathbb{R}^n , ed i valori di f sono assunti in \mathbb{R}^n , allora il **supporto di f** è, come ben noto, l'insieme:

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}},$$

dove, 0 indica il vettore nullo (o semplicemente lo zero se $n = 1$) e la chiusura è riferita alla topologia di X .

Definizione 1.1. Siano $n, m = 1, 2, \dots$ e $k = 0, 1, \dots$ fissati e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e non vuoto.

- (a) Una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ o \mathbb{C}^m è detta essere **di classe** C^k , e si scrive in tal caso $f \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$ o $C^k(\Omega; \mathbb{C}^m)$, rispettivamente, se tutte le derivate parziali (incluse quelle miste) delle componenti di f esistono e sono continue fino all'ordine k incluso. Si pone $C^k(\Omega) := C^k(\Omega; \mathbb{R})$.
- (b) $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ o \mathbb{C}^m è detta di **classe** C^∞ se è di classe C^k per ogni $k = 0, 1, \dots$ e si definisce:

$$C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m) := \bigcap_{k=0,1,\dots} C^k(\Omega; \mathbb{R}^m), \quad C^\infty(\Omega; \mathbb{C}^m) := \bigcap_{k=0,1,\dots} C^k(\Omega; \mathbb{C}^m).$$

Useremo la convenzione che $C^\infty(\Omega) := C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ a meno che non sia esplicitamente precisato diversamente.

- (c) In riferimento alle definizioni già date $C_0^k(\Omega; \mathbb{C}^n)$ (rispettivamente $C_0^k(\Omega)$), con $k = 0, 1, \dots, \infty$, indica l'insieme delle funzioni in $C^k(\Omega; \mathbb{C}^n)$ (rispettivamente $C^k(\Omega)$) il cui *supporto*, riferito a Ω , è compatto. \diamond

Diamo separatamente un'altra importante definizione che riguarda le funzioni differenziabili su un insieme ottenuto dalla chiusura di un aperto $\bar{\Omega}$.

Definizione 1.2. Siano $n, m = 1, 2, \dots$ e $k = 0, 1, \dots$ fissati e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto (non vuoto). $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^m$ o \mathbb{C}^m è detta essere **di classe** C^k , con $k = 0, 1, \dots, \infty$ e si scrive in tal caso $f \in C^k(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ ($f \in C^k(\bar{\Omega})$ se $m = 1$) o, rispettivamente $f \in C^k(\bar{\Omega}; \mathbb{C}^m)$, quando $f|_\Omega \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$, rispettivamente $f|_\Omega \in C^k(\Omega; \mathbb{C}^m)$ e tutte le derivate di f fino all'ordine k si estendono con continuità a funzioni su $\bar{\Omega}$. \diamond

Osservazioni 1.1.

(1) Nel caso in cui, per $a, b \in \mathbb{R}$, $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$, si può provare che $f \in C^k([a, b]; \mathbb{R}^n)$ (o $f \in C^k([a, b]; \mathbb{C}^n)$ se la funzione è a valori complessi), se e solo se f è la restrizione ad $[a, b]$ di una funzione di classe C^k definita su un aperto che include il chiuso $[a, b]$. Questa proprietà in generale non vale passando a funzioni definite su sottinsiemi di \mathbb{R}^n con $n > 1$, invece che su $[a, b]$. Tuttavia esistono importanti risultati a riguardo, sotto opportune ipotesi, in particolare due famosi teoremi dovuti rispettivamente a Whitney e Seeley.

(2) È importante osservare che nella definizione 1.2, la condizione $f \in C^1([a, b])$ non richiede automaticamente che esistano la derivata destra in a e la derivata sinistra in b :

$$D^+ f|_a := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad D^- f|_b := \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}, \quad (1.1)$$

ma, tra le altre cose, che esistano finiti i *limiti* delle derivate, calcolate in (a, b) , verso a da destra e b da sinistra:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{df}{dx}|_x \in \mathbb{R}, \quad \exists \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{df}{dx}|_x \in \mathbb{R}.$$

In generale questa seconda condizione non implica la precedente. Si deve tuttavia osservare che, in realtà, l'aggiunta della richiesta che f sia continua in a e b (richiesta inclusa in $f \in C^1([a, b])$), implica che esistano finite le derivate destre e sinistre e coincidano con i rispettivi limiti delle

derivate come banale conseguenza del teorema di Lagrange:

$$\exists D^+ f|_a = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{df}{dx}|_x \in \mathbb{R}, \quad \exists D^- f|_b = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{df}{dx}|_x \in \mathbb{R}.$$

Definizione 1.3. Un'applicazione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (o \mathbb{C}^n) è detta essere C^k **a tratti**, con $k = 1, 2, \dots, \infty$, se esistono un numero finito di punti $a = t_1 < t_2 < \dots < t_N = b$ tali che $f|_{[t_r, t_{r+1}]} \in C^k([t_r, t_{r+1}]; \mathbb{R}^n)$ (rispettivamente $C^k([t_r, t_{r+1}]; \mathbb{C}^n)$) se $r = 1, \dots, N - 1$.

Nel caso $n = 1$, la funzione f di sopra si dice **curva** (o **cammino** o **arco**) C^k **a tratti**. \diamond

Il simbolo ∇ – detto *nabla* – indica il vettore colonna di derivate $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})^t$, dove x^1, \dots, x^n sono le coordinate standard di \mathbb{R}^n . Tale simbolo viene usato come precisiamo di seguito.

Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , ∇f indica il **gradiente** di f , cioè il vettore colonna le cui componenti sono le derivate parziali di f . Il gradiente ∇f viene anche indicato con $grad f$.

Se $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale, $\nabla \cdot V$ indica la **divergenza** di V , cioè il campo scalare:

$$\nabla \cdot V := \sum_{k=1}^n \frac{\partial V^k}{\partial x^k},$$

dove V^k indica la k -esima componente di V . La divergenza $\nabla \cdot V$ viene anche indicata con $div V$.

Se $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale, $\nabla \wedge V$ indica il **rotore** di V , cioè il campo vettoriale:

$$\nabla \wedge V := \left(\frac{\partial V^3}{\partial x^2} - \frac{\partial V^2}{\partial x^3} \right) e_1 - \left(\frac{\partial V^1}{\partial x^3} - \frac{\partial V^3}{\partial x^1} \right) e_2 + \left(\frac{\partial V^1}{\partial x^2} - \frac{\partial V^2}{\partial x^1} \right) e_3,$$

e_1, e_2, e_3 sono i vettori della base canonica di \mathbb{R}^3 . Il rotore $\nabla \wedge V$ viene anche indicato con $rot V$ e anche con $\nabla \times V$.

Infine, se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , $\Delta f := \nabla \cdot \nabla f = div grad f$ indica il **laplaciano** di f , cioè il campo scalare:

$$\Delta f := \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial (x^k)^2}.$$

L'operatore $\Delta := \nabla \cdot \nabla$ è detto **operatore di Laplace** o **laplaciano**.

1.1.2 Insiemi connessi per archi differenziabili a tratti.

Un risultato elementare, che useremo varie volte nel seguito, è il seguente.

Proposizione. *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme aperto non vuoto e connesso, allora è connesso per archi continui e, più fortemente, per archi C^∞ a tratti.*

Dimostrazione. Osserviamo preventivamente che le curve C^k a tratti sono, per definizione, anche continue; per cui è sufficiente provare la tesi nel caso di curve C^∞ a tratti. Se $p \in A$ (aperto di \mathbb{R}^n non vuoto connesso) sia C_p il sottoinsieme dei punti q di A per cui esiste una curva C^∞ a tratti $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ con $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$ e N_p il sottoinsieme dei punti q di A per cui *non* esiste alcuna curva C^∞ a tratti $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ con $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$. C_p è aperto come proviamo ora. Se $q \in C_p$, dato che $q \in A$ aperto, esiste una palla aperta B centrata in q tutta contenuta in A . I punti q' di B sono connettabili a p dal cammino continuo, tutto contenuto in A , che si ottiene prolungando una curva C^∞ tratti γ da p a q tutta inclusa in A in un segmento da q a q' , che giace su un raggio di B , la curva ottenuta è, evidentemente, ancora C^∞ a tratti e quindi $B \subset C_p$. Se N_p è anch'esso aperto: sia $B' \subset A$ una palla aperta centrata in $q' \in N_p$. Dato che B' è connessa per segmenti (essendo convessa), se un punto $q'' \in B'$ fosse connettabile a p da un arco C^∞ a tratti incluso in A , lo sarebbe anche q' , prolungando tale cammino in un segmento da q'' a q' . Quindi $B' \subset N_p$ e, conseguentemente, N_p è aperto. Dato che $A = C_p \cup N_p$ è connesso e gli aperti C_p e N_p sono disgiunti con $C_p \neq \emptyset$, deve essere $N_p = \emptyset$, cioè A è connesso per archi C^∞ a tratti. \square

Osservazioni 1.2. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un arco C^∞ a tratti che congiunge $p, q \in A$, tutto contenuto nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^n$. La curva γ non è infinitamente differenziabile solo per un numero finito di valori $t_k \in (a, b)$, $k = 1, 2, \dots, m$. I corrispondenti punti $\gamma(t_k) \in A$ saranno i centri di palle aperte B_k contenute in A , dato che A è aperto. È allora evidente, ma ciò richiederebbe qualche dettaglio tecnico che non discutiamo, che sia sempre possibile modificare la curva γ in prossimità di ogni $\gamma(t_k)$ dentro B_k ottenendo una curva ovunque C^∞ , tutta contenuta in A , che congiunge p a q . Pertanto l'enunciato della proposizione precedente può essere rinforzato rimuovendo la locuzione "a tratti" dalla tesi.

1.1.3 Norme e seminorme.

Ricordiamo qualche utile nozione, che dovrebbe già essere nota, riguardante gli spazi normati.

Definizione 1.4. Se X è uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} che può essere indifferentemente \mathbb{R} o \mathbb{C} , una **norma**, $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ è un'applicazione che gode delle seguenti proprietà.

stretta positività: $p(v) \geq 0$ e $p(v) = 0$ implica $v = 0$, per ogni $v \in X$,

omogeneità: $p(av) = |a|p(v)$ per ogni $v \in X$ e ogni $a \in \mathbb{K}$,

disuguaglianza triangolare: $p(u + v) \leq p(u) + p(v)$ per ogni $u, v \in X$.

Ogni spazio vettoriale dotato di norma $(X, || \cdot ||)$ si dice **spazio normato**.

Nel caso che, a parità delle rimanenti richieste, la stretta positività venga indebolita in:

positività: $p(v) \geq 0$ per ogni $v \in X$,

allora p è detta **seminorma**. \diamond

Nel seguito useremo la notazione standard $|| \cdot ||$ per le norme e, qualche volta, anche per le seminorme.

Ogni spazio normato è uno spazio topologico metrico, quando la distanza è definita come:

$$d(u, v) := \|u - v\| \quad \text{per ogni } u, v \in X.$$

Si osservi che tale distanza è invariante per traslazioni: $d(u + w, v + w) = d(u, v)$ se $u, v, w \in X$. Una base per la detta topologia è quella data dalle solite **palle (metriche) aperte** di centro $x \in X$ e raggio $r > 0$ arbitrari:

$$B_r(x) := \{u \in X \mid \|u - x\| < r\}.$$

La topologia costruita in questo modo soddisfa la *proprietà di Hausdorff*: per ogni coppia di punti esistono due insiemi aperti disgiunti che contengono rispettivamente i due punti.

Nel caso lo spazio vettoriale X sia dotato di una seminorma p , le palle aperte:

$$B_r(x) := \{u \in X \mid p(u - x) < r\},$$

sono ancora la base di una topologia naturale su X . Tuttavia la proprietà di Hausdorff non è garantita in generale.

Lo spazio vettoriale complesso $C^0(K; \mathbb{C})$ delle funzioni continue a valori complessi sul compatto non vuoto $K \subset \mathbb{R}^n$ è uno spazio normato rispetto alla norma:

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Sullo spazio vettoriale complesso $C^1([a, b]; \mathbb{C})$ delle funzioni derivabili con derivata continua a valori complessi, definite sull'intervallo compatto $[a, b] \subset \mathbb{R}$, la funzione $p : C^1([a, b]; \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$p(f) := \sup_{x \in K} \left| \frac{df(x)}{dx} \right|$$

non è una norma, ma solo una seminorma. Per cui lo spazio non è normato. È invece una norma su $C^1([a, b]; \mathbb{C})$:

$$\|f\| := \|f\|_\infty + p(f).$$

La funzione p sopra definita diventa una norma se, per esempio, la si restringe al sottospazio delle funzioni di $C^1([a, b]; \mathbb{C})$ che si annullano in a .

Ricordiamo infine che in uno spazio metrico (X, d) , e quindi in particolare in uno spazio normato, una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ è detta essere **di Cauchy**, se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N > 0$ per cui $d(x_n, x_m) < \epsilon$ se $n, m > N$. Evidentemente ogni successione convergente a qualche punto di X è automaticamente di Cauchy, ma non vale il viceversa in generale. Uno spazio metrico (ed in particolare uno spazio normato) in cui ogni successione di Cauchy converge a qualche punto dello spazio è detto essere **completo**.

1.1.4 Risultati elementari sulle serie di funzioni.

Per concludere, riportiamo i teoremi classici di scambio del simbolo limite e derivata con quelli di serie ed integrale, preceduti dall'utile teorema di Weierstrass detto *della convergenza totale* e dal teorema sulla continuità del limite della serie di funzioni continue quando la convergenza è uniforme.

Teorema 1.1. (Convergenza totale di Weierstrass.) *Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite sull'insieme S a valori in \mathbb{C} (o \mathbb{R}). Se esiste una successione di costanti $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $0 \leq |f_n(x)| \leq c_n$ per ogni $x \in S$ e tale che:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n < +\infty,$$

allora la serie di funzioni su S :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

soddisfa:

- (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| < +\infty$ per ogni $x \in S$,
- (b) esiste (ed è unica) una funzione f definita su S tale che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in S,$$

- (c) La convergenza della serie in (b) è uniforme su S , cioè:

$$\sup_{x \in S} \left| f(x) - \sum_{n=0}^N f_n(x) \right| \rightarrow 0 \quad \text{per } N \rightarrow +\infty.$$

◇

Osservazioni 1.3. Si noti che, nelle ipotesi del teorema, anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)|$ converge uniformemente: se le ipotesi del teorema sono soddisfatte, anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ con $g_n(x) := |f_n(x)|$ le soddisfa, per cui (c) è valido anche per tale serie.

Dimostrazione del teorema della convergenza totale di Weierstrass. Valendo $|f_n(x)| \leq c_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n < +\infty$, il criterio del confronto assicura che $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| < +\infty$ per ogni $x \in S$ e quindi la successione $\{S_N(x)\}_{N \in \mathbb{N}}$ delle ridotte $S_N(x) := \sum_{n=0}^N |f_n(x)|$ è una successione di Cauchy. Fissato $x \in S$,

$$\left| \sum_{n=0}^M f_n(x) - \sum_{n=0}^N f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^M f_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^M |f_n(x)|$$

$$= |S_M(x) - S_N(x)| \quad \text{per ogni } N, M \in \mathbb{N} \text{ con } M \geq N.$$

Concludiamo che la successione $\{s_N(x)\}_{N \in \mathbb{N}}$ delle ridotte $s_N(x) := \sum_{n=0}^N f_n(x)$ è anch'essa una successione di Cauchy, e quindi la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge per ogni fissato $x \in S$ per la completezza di \mathbb{C} . Viene a definirsi in tal modo una funzione, unicamente determinata da: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Non resta che mostrare che la convergenza della serie ad f è uniforme in x . Dato che la serie delle c_n converge, il resto di tale serie deve tendere a zero: per ogni $\epsilon > 0$ possiamo trovare $N \in \mathbb{N}$ tale che:

$$\left| \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} c_n \right| < \epsilon \quad \text{se } n_0 > N.$$

Di conseguenza, se $n_0 > N$:

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^{n_0} f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f_n(x) \right| \leq \left| \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} c_n \right| < \epsilon \quad \forall x \in S.$$

Abbiamo provato che, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che, se $n > N$:

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^{n_0} f_n(x) \right| < \epsilon \quad \forall x \in S.$$

In altre parole la convergenza della serie è uniforme. Si osservi che, dato che la stima di sopra non dipende da $x \in S$, varrà anche prendendo l'estremo superiore su $x \in S$: per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che, se $n > N$:

$$\sup_{x \in S} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^{n_0} f_n(x) \right| < \epsilon,$$

che è lo stesso che dire:

$$\sup_{x \in S} \left| f(x) - \sum_{n=0}^{n_0} f_n(x) \right| \rightarrow 0 \quad \text{per } n_0 \rightarrow +\infty.$$

□

Osservazioni 1.4. Le serie reali assolutamente convergenti possono essere riordinate a piacimento senza alterarne la somma per il teorema del riordinamento di Riemann [Gi03], il risultato può essere esteso, in forma modificata, al caso di serie di numeri complessi con una versione elementare del teorema di Steinitz.

Teorema 1.2. (Riordinamento delle serie complesse.) *Si consideri una serie di numeri complessi $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$. Vale quanto segue.*

(a) Se la serie converge assolutamente allora esiste un unico $s \in \mathbb{C}$ tale che, per ogni funzione biettiva $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, vale $\sum_{n=0}^{+\infty} c_{f(n)} = s$ dove la convergenza è assoluta.

(b) Se la serie non converge assolutamente, allora l'insieme $S \subset \mathbb{C}$ dei punti c per cui è possibile trovare una funzione biettiva $f_c : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} c_{f_c(n)} = c$ può essere solo di uno dei due seguenti tipi:

(i) $S = \mathbb{R}$,

(ii) $S = \{at + b \mid t \in \mathbb{R}\}$ per $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$ costanti individuati dalla serie data.

◇

Si noti che, di conseguenza, una serie di numeri complessi $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ è assolutamente convergente se e solo se comunque la si riordini converge sempre allo stesso valore $s \in \mathbb{C}$, cioè esiste $s \in \mathbb{C}$ tale che, per ogni $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_{f(n)} = s$.

Procediamo con gli altri teoremi classici sulle serie di funzioni.

Teorema 1.3. Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue definite su $S \subset \mathbb{R}^m$ a valori in \mathbb{C} (o \mathbb{R}). Valgono i fatti seguenti.

(a) Se esiste $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ tale che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in S,$$

dove la convergenza è uniforme, allora f è continua su S .

In tal caso, per ogni compatto $K \subset S$, vale:

$$\int_K f(x) d^m x = \int_K \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) d^m x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_K f_n(x) d^m x.$$

(b) Se esiste $F : S \rightarrow \mathbb{C}$ tale che:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = F(x) \quad \text{per ogni } x \in S,$$

dove la convergenza della serie è uniforme, allora F è continua su S .

In tal caso, per ogni compatto $K \subset S$, vale:

$$\int_K F(x) d^m x = \int_K \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) d^m x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_K f_n(x) d^m x.$$

◇

L'integrale è indifferentemente interpretabile nel senso di Riemann o Lebesgue.

Dimostrazione. È evidente che è sufficiente provare la tesi nel caso di f . Il caso della serie si riduce al precedente considerando la successione delle ridotte $\{F_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, con $F_m(x) := \sum_{n=0}^m f_n(x)$, che è costituita da funzioni continue perchè somme finite di funzioni continue.

Proviamo dunque che, nelle ipotesi del teorema, f è continua nel punto generico $x \in S$.

Per costruzione possiamo sempre scrivere, se $y \in S$ e $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|. \end{aligned}$$

Fissato $\epsilon > 0$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che, se $n > N$ allora $|f(z) - f_n(z)| < \epsilon/3$ per qualsiasi $z \in S$, a causa della convergenza uniforme della successione. Pertanto, per $\epsilon > 0$ fissato, considero $n = N + 1$ trovando, per ogni scelta di $x, y \in S$:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \leq \epsilon/3 + |f_{N+1}(x) - f_{N+1}(y)| + \epsilon/3.$$

Dato che la funzione f_{N+1} è continua, posso anche trovare $\delta > 0$ tale che, se $\|x - y\| < \delta$, allora:

$$|f_{N+1}(x) - f_{N+1}(y)| < \epsilon/3.$$

Mettendo tutto insieme, abbiamo provato quanto segue per ogni fissato $x \in S$. Se $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, se $\|x - y\| < \delta$, allora:

$$|f(x) - f(y)| < 3\epsilon/3 = \epsilon.$$

In altre parole f è continua in x . La seconda affermazione in (a) segue dalle proprietà elementari dell'integrale, tenendo conto del fatto che la misura dei compatti è finita, che le funzioni continue sono limitate sui compatti e che la convergenza della serie delle f_n è uniforme:

$$0 \leq \left| \int_K f d^n x - \int_K f_n d^n x \right| \leq \int_K |f(x) - f_n(x)| d^n x \leq \sup_{x \in K} |f(x) - f_n(x)| \int_K 1 d^n x \rightarrow 0 \quad \text{se } n \rightarrow +\infty.$$

□

Teorema 1.4. Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni $f_n : S \rightarrow \mathbb{C}$ (o \mathbb{R}) con $S \subset \mathbb{R}^m$ aperto tale che, rispetto ad una fissata coordinata x^k , esistano le derivate $\frac{\partial f_n}{\partial x^k}$ e definiscano funzioni continue su S . Vale quanto segue.

(a) Se la successione $\{f_n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente su S e la successione $\left\{ \frac{\partial f_n}{\partial x^k} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente su S , allora si può derivare nella variabile x^k la prima successione sotto il segno di limite:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\partial}{\partial x^k} f_n(x) \quad \forall x \in S.$$

(b) Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge puntualmente su S e la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial f_n}{\partial x^k}$ converge uniformemente su S , allora si può derivare nella variabile x^k la prima serie sotto il segno di serie:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x^k} f_n(x) \quad \forall x \in S.$$

◇

Dimostrazione. Come per il teorema precedente è sufficiente provare (a), dato che (b) è un immediato corollario lavorando con le successioni di ridotte delle serie.

Senza perdere generalità supporremo $k = 1$. Indicheremo con x la variabile x^1 e con y le rimanenti $m - 1$ variabili. Per ipotesi abbiamo che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\partial f_n(x, y)}{\partial x} = g(x, y),$$

dove la funzione $g : S \rightarrow \mathbb{C}$ è continua, per il teorema 1.3, dato che è limite uniforme di funzioni continue. Dato che la successione converge uniformemente, fissando y e lavorando in un intorno sufficientemente piccolo di (x, y) , possiamo scrivere, applicando il teorema 1.3,

$$\int_{x_0}^x g(x', y) dx' = \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\partial f_n(x', y)}{\partial x} dx' = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x \frac{\partial f_n(x', y)}{\partial x} dx'.$$

Applicando il secondo teorema fondamentale del calcolo (essendo le derivate che appaiono nell'ultimo integrale delle funzioni continue) e tenendo conto che la successione delle f_n converge ovunque su S :

$$\int_{x_0}^x g(x', y) dx' = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x, y) - f_n(x_0, y)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x, y) - \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0, y).$$

Dato che la funzione g è continua, possiamo applicare il teorema fondamentale del calcolo, derivando in x i due membri (notando che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0, y)$ non dipende da x), ottenendo:

$$g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x, y).$$

Per definizione di g , abbiamo ottenuto che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\partial f_n(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x, y).$$

Questo è quanto volevamo provare. □

1.2 Motivazioni fisico matematiche per lo studio delle equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine: le equazioni di Maxwell.

In fisica molto spesso le leggi che descrivono la dinamica di un certo sistema fisico, ed in particolare certe grandezze differenziabili dipendenti dal tempo e dal posto, sono date in termini di *equazioni differenziali alle derivate parziali* tra queste grandezze. Una tale equazione è una (o più) relazione tra le derivate (in generale di ordine arbitrario) nello spazio e nel tempo delle

grandezze considerate. Ci si aspetta che, assegnando qualche ulteriore informazione (dati iniziali e/o al contorno), le equazioni considerate ammettano una ed una sola soluzione.

L'importanza in fisica delle equazioni differenziali alle derivate parziali è evidente studiando la storia della fisica. Tale teoria permette di dare una formalizzazione adeguata delle equazioni fondamentali che riguardano i sistemi fisici che hanno un'estensione non puntiforme e sono dunque descritti da funzioni del posto e del tempo (densità, campi di velocità, campi di forze,...). Tali sistemi non puntiformi sono presenti in vari rami della fisica come la meccanica dei mezzi continui, la fluidodinamica, la teoria dei campi classica, relativistica e quantistica-relativistica. Un capitolo importante sia dal punto di vista fisico che da quello matematico è quello che riguarda la teoria classica dell'*elettromagnetismo*.

Nel diciannovesimo secolo la formalizzazione teorica completa della teoria Elettromagnetica fu data da J. C. Maxwell. Le sue quattro equazioni differenziali lineari alle derivate parziali per il campo elettrico $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ ed il campo magnetico $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = 4\pi\rho(t, \mathbf{x}) \\ \nabla \wedge \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \end{cases} \quad (1.2)$$

assieme alle legge di conservazione della carica e alla forza di Lorentz, descrivono completamente (nell'ambito della fisica classica) il sistema fisico dato dal campo elettromagnetico ed dalle sue sorgenti ρ, \mathbf{J} (vedi oltre). L'esempio delle equazioni di Maxwell è interessante dal punto di vista didattico perché permette di introdurre diversi operatori differenziali ed alcuni teoremi generali che vengono adoperati in tutta la teoria classica delle equazioni differenziali alle derivate parziali. Nel seguito riassumeremo alcuni aspetti matematici delle equazioni di Maxwell.

1.2.1 Equazioni di Maxwell in forma integrale.

In presenza di campi elettromagnetici $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ e $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ assegnati in un riferimento \mathcal{S} con coordinate cartesiane solidali $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e coordinata temporale $t \in \mathbb{R}$, una carica puntiforme q è sottoposta ad una forza detta di **forza Lorentz** descritta da, se $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ sono la posizione e la velocità della carica nel riferimento \mathcal{S} al tempo t :

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) = q \mathbf{E}(t, \mathbf{x}(t)) + \frac{q}{c} \mathbf{v}(t) \wedge \mathbf{B}(t, \mathbf{x}(t)). \quad (1.3)$$

Sopra c è la velocità della luce. In riferimento alle coordinate di \mathcal{S} suddette, in ogni regione spaziotemporale aperta nella quale sono definiti i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} , valgono le celeberrime **equazioni**

di Maxwell con sorgenti (nel vuoto):

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{+\partial V} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi \int_V \rho d^3x, \\ \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Sigma_C} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS, \\ \oint_{+\partial V} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \\ \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{x} = \frac{4\pi}{c} \int_{\Sigma_C} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Sigma_C} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS, \end{array} \right. \quad (1.4)$$

dove, V è un volume in quiete in \mathcal{I} il cui bordo ∂V è una superficie chiusa regolare orientabile (cioè il vettore normale è definibile con continuità su tutta la superficie senza che si annulli in alcun punto di essa) ed il versore normale è indicato con \mathbf{n} . L'orientazione di \mathbf{n} è uscente, come indicato dal segno $+$ davanti a ∂V . C è una curva, con vettore tangente non nullo, chiusa, in quiete in \mathcal{I} , che è il bordo della superficie regolare Σ . Il versore normale a Σ è orientato con la legge della mano destra rispetto al vettore tangente a C . $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$ e $\mathbf{J}(t, \mathbf{x})$ sono rispettivamente la densità (volumetrica) di carica elettrica (pertanto la carica complessiva presente, all'istante t , in un fissato volume si ottiene integrando la funzione $\rho(t, \mathbf{x})$ nella variabile \mathbf{x} nel volume detto) ed il vettore densità di corrente elettrica. Quest'ultimo può essere pensato come della forma $\mathbf{J}(t, \mathbf{x}) = \rho(t, \mathbf{x})\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$, dove \mathbf{V} è il campo di velocità delle cariche elettriche con densità di carica ρ . Se sono presenti più tipi di portatori di carica (per esempio elettroni e ioni), questa forma elementare della densità corrente deve essere modificata. La regolarità dei campi e delle densità è supposta tale da dare senso alle equazioni scritte.

Le equazioni di Maxwell scritte sopra sono in forma integrale. Mostriamo tra poco come trascriverle in forma di equazioni differenziali alle derivate parziali. Per fare ciò dobbiamo ricordare qualche teorema di analisi elementare.

1.2.2 Teoremi di Gauss, Stokes ed equazioni di Maxwell in forma differenziale locale.

Ricordiamo che una funzione misurabile $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ (o \mathbb{R}), con $A \subset \mathbb{R}^n$ misurabile, è detta **integrabile secondo Lebesgue**, oppure equivalentemente **assolutamente integrabile secondo Lebesgue** oppure equivalentemente **Lebesgue-integrabile**, se

$$\int_A |f| d^n x < +\infty,$$

dove $d^n x$ denota la misura di Lebesgue su \mathbb{R}^n . L'insieme delle funzioni Lebesgue integrabili si denota con $\mathcal{L}^1(A)$. Supporremo nota la teoria elementare della misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n e le sue relazioni con la teoria dell'integrazione secondo Riemann.

Ricordiamo ora i teoremi di Gauss (noto anche come “teorema della divergenza”) e di Stokes.

Teorema 1.5. (di Gauss). *Sia Ω un aperto non vuoto di \mathbb{R}^n , la cui chiusura $\overline{\Omega}$ è compatta¹ e tale che il suo bordo $\partial\Omega$ sia una superficie regolare orientabile con vettore normale \mathbf{n} orientato in maniera uscente. Se $\mathbf{F} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ è di classe $C^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, allora vale la **formula di Gauss**:*

$$\oint_{+\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d^n x, \quad (1.5)$$

dove il secondo integrale è un integrale di Lebesgue se $\nabla \cdot \mathbf{F}$ è Lebesgue-integrabile su Ω (e ciò accade in particolare se $\mathbf{F} \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$), altrimenti è da intendersi come un integrale improprio nel senso di Riemann. \diamond

Teorema 1.6. (di Stokes). *Sia $C \subset \mathbb{R}^3$ una curva C^1 a tratti, con vettore tangente mai nullo, orientata, bordo della superficie regolare Σ_C con \mathbf{n} vettore normale a Σ_C orientato con la legge della mano destra rispetto al senso di percorrenza di C . Sia $\Omega \supset \Sigma \cup C$ un insieme aperto e limitato. Se $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale di classe $C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, allora vale la **formula di Stokes**:*

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Sigma_C} \nabla \wedge \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (1.6)$$

\diamond

Osservazioni 1.5.

(1) La procedura per provare il teorema di Gauss nelle ipotesi indebolite data sopra è la seguente [V184]. Il teorema di Gauss viene inizialmente provato nel caso in cui entrambi gli integrali esistono e sono ben definiti, cioè quando $\mathbf{F} \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. L'insieme Ω è misurabile secondo Lebesgue, con misura finita essendo aperto e limitato. La chiusura è anch'essa Lebesgue-misurabile ed ha la stessa misura di Ω , in quando il bordo di Ω ha misura nulla (essendo una superficie $n - 1$ dimensionale regolare). La misura di Peano-Jordan-Riemann di $\overline{\Omega}$ coincide con la misure di Lebesgue di Ω . In questo caso l'identità (1.5) è verificata interpretando il secondo membro come integrale di Riemann su $\overline{\Omega}$ oppure, equivalentemente, come integrale di Lebesgue su Ω : essendo $\nabla \cdot \mathbf{F}$ continuo su $\overline{\Omega}$, i due tipi di integrali sono ben definiti e coincidono.

Quindi si passa ad indebolire l'ipotesi di regolarità di \mathbf{F} sul bordo di Ω . In questa ipotesi più debole si considera una successione di aperti $\{\Omega_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, a chiusura compatta e bordo regolare orientabile, che soddisfino: $\overline{\Omega}_m \subset \Omega_{m+1} \subset \Omega$ e con $\partial\Omega_m$ incluso in un intorno aperto² di $\partial\Omega$ di raggio ϵ_m con $\epsilon_m \rightarrow 0$ se $m \rightarrow +\infty$. Evidentemente $\cup_{m \in \mathbb{N}} \Omega_m = \Omega$.

Per ogni Ω_m , l'identità (1.5) è verificata interpretando il secondo membro come integrale di Riemann su $\overline{\Omega}_m$ oppure, equivalentemente, come integrale di Lebesgue su Ω_m dato che $\mathbf{F} \in C^1(\overline{\Omega}_m, \mathbb{R}^n)$. Quindi si considerano i limiti:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \oint_{+\partial\Omega_m} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_m} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d^n x.$$

¹Questo equivale a richiedere che l'insieme aperto non vuoto Ω sia limitato.

²Se $A \subset \mathbb{R}^n$, un intorno aperto di raggio $\epsilon > 0$ di A è l'insieme dato dall'unione di tutte le palle aperte di raggio ϵ , $B_\epsilon(x)$ centrate in $x \in A$.

Dato che \mathbf{F} è continua su $\overline{\Omega}$, si prova che il limite di sinistra esiste e coincide con

$$\oint_{+\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS .$$

In questo l'interpretazione di (1.5) è:

$$\oint_{+\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_m} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d^n x . \quad (1.7)$$

Notare che il limite del secondo membro non dipende dalla classe degli Ω_m scelti, purché soddisfino le ipotesi dette sopra. In questo caso il secondo membro dell'identità di Gauss è interpretato come integrale di Riemann improprio.

Nel caso in cui $\nabla \cdot \mathbf{F}$ sia anche (assolutamente) integrabile nel senso di Lebesgue su Ω , possiamo dire di più. Definiamo $\chi_{\Omega_m} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ come: $\chi_{\Omega_m}(x) = 1$ per $x \in \Omega_m$ e $\chi_{\Omega_m}(x) = 0$ altrimenti. Dato che su Ω vale:

$$|\chi_{\Omega_m}(x) \nabla \cdot \mathbf{F}(x)| \leq |\nabla \cdot \mathbf{F}(x)| ,$$

il *teorema della convergenza dominata* (vedi la sezione B.2 in Appendice) permette di concludere che:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \chi_{\Omega_m} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d^n x = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_m} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d^n x = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d^n x .$$

In riferimento a (1.7), possiamo ora dire che vale la (1.5) dove il secondo membro dell'identità di Gauss è interpretato come integrale di Lebesgue.

(2) Il teorema di Stokes si potrebbe enunciare con i potesi molto più deboli, ma non ce ne occuparemo in questa sede.

Usando questi teoremi nelle equazioni di Maxwell in forma integrale, si arriva facilmente a provare che, assumendo i campi di classe C^1 nelle 4 variabili congiuntamente, essi soddisfano le *equazioni di Maxwell in forma differenziale locale*, per ogni punto ed istante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = 4\pi\rho(t, \mathbf{x}) \\ \nabla \wedge \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \end{array} \right. \quad (1.8)$$

A titolo di esempio, usando il teorema di Gauss, la prima equazione di Maxwell in forma integrale può essere riscritta:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, d^3 x = 4\pi \int_V \rho \, d^3 x ,$$

da cui

$$\int_{V_r} (\nabla \cdot \mathbf{E} - 4\pi\rho) \, d^3 x = 0 , \quad (1.9)$$

per ogni palla aperta V_r di raggio finito $r > 0$ centrata in \mathbf{x}_0 . Se valesse

$$(\nabla \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{x}_0) - 4\pi\rho(t, \mathbf{x}_0)) = I > 0,$$

troveremmo una contraddizione. Infatti, per continuità, scegliendo r sufficientemente piccolo, l'integrando assumerebbe in V_r valori in $(I - \epsilon, I + \epsilon)$ con $I - \epsilon > 0$, e pertanto

$$\int_{V_r} (\nabla \cdot \mathbf{E} - 4\pi\rho) d^3x > (I - \epsilon) \frac{4\pi r^3}{3} > 0,$$

che contraddirebbe l'ipotesi (1.9). Si ottiene la stessa contraddizione assumendo $I < 0$. Concludiamo che, per ogni punto $(t, \mathbf{x}) \in I \times \Omega$ in cui vale la prima equazione di Maxwell in forma integrale, deve valere anche la prima equazione di Maxwell in forma differenziale. Viceversa, se vale la prima equazione in forma differenziale, integrandola su un qualunque insieme V con frontiera ∂V sufficientemente regolare contenuto nel dominio spaziale di validità delle equazioni, ed usando il teorema di Gauss, si ottiene subito la prima equazione di Maxwell in forma integrale su tale volume V . La terza equazione di Maxwell in forma differenziale si ottiene dalla terza equazione in forma integrale con la stessa procedura. Le rimanenti due si ricavano dalle corrispondenti equazioni integrali, con una analoga procedura, ma usando il teorema di Stokes in luogo del teorema della divergenza. A titolo di esempio consideriamo la seconda equazione in forma integrale:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Sigma_C} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS.$$

se il campo \mathbf{B} è C^1 (congiuntamente in tutte le variabili), tale equazione si riscrive, passando sotto il segno di integrale la derivata nel tempo:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} + \int_{\Sigma_C} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Usando il teorema di Stokes, dopo aver assunto anche il campo \mathbf{E} di classe C^1 , si arriva quindi all'identità:

$$\int_{\Sigma_C} \left(\nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Ammettiamo per assurdo che, al fissato tempo t_0 e nel punto \mathbf{x}_0 , valga:

$$\nabla \wedge \mathbf{E}|_{(t_0, \mathbf{x}_0)} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Big|_{(t_0, \mathbf{x}_0)} = \mathbf{c} \neq 0.$$

Scegliamo C come una circonferenza centrata in \mathbf{x}_0 nel piano normale a \mathbf{c} , e come Σ_C il cerchio associato a tale circonferenza, in modo tale che $\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} = I > 0$. Con queste ipotesi deve essere

$$\int_{\Sigma_C} \left(\nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (1.10)$$

malgrado, esattamente al centro del cerchio, l'integrando sia strettamente positivo per ipotesi. Lo stesso ragionamento che abbiamo usato per il teorema della divergenza, basato sulla permanenza

del segno di una funzione continua, produce una contraddizione. Infatti, dato che l'integrando in (1.10) è continuo, il suo segno rimarrà costante in un intorno di \mathbf{x}_0 , quindi scegliendo il raggio $R > 0$ del cerchio Σ_C sufficientemente piccolo, in modo che su ogni punto del cerchio:

$$\int_{\Sigma_C} \left(\nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS > \pi R^2 (I - \epsilon) > 0,$$

in contraddizione con la seconda equazione di Maxwell in forma integrale. Pertanto per ogni (t_0, \mathbf{x}_0) deve valere la seconda equazione di Maxwell in forma differenziale:

$$\nabla \wedge \mathbf{E}|_{(t_0, \mathbf{x}_0)} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Big|_{(t_0, \mathbf{x}_0)} = 0.$$

Per ottenere la quarta ed ultima equazione di Maxwell in forma differenziale dalla corrispondente in forma integrale si procede nello stesso modo. È evidente che procedendo in senso inverso nei ragionamenti, lavorando in tutto lo spazio \mathbb{R}^3 , le equazioni in forma differenziale implicano quelle in forma integrale. Tuttavia le equazioni in forma differenziale richiedono ipotesi più forti sulla regolarità dei campi.

Osservazioni 1.6.

(1) Se $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto e $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un aperto, per campi \mathbf{E} e \mathbf{B} di classe $C^1(I \times \Omega; \mathbb{R}^3)$ e sorgenti $\rho \in C^0(I \times \Omega)$, $\mathbf{J} \in C^0(I \times \Omega; \mathbb{R}^3)$, le equazioni di Maxwell in forma differenziale sono *conseguenza* di quelle integrali assunte valide nello stesso insieme $I \times \Omega$. Nel caso $\Omega = \mathbb{R}^3$ i due set di equazioni sono *equivalenti*. Nel caso generale, l'equivalenza dei due set di equazioni si ha solo se Ω ha una struttura topologica opportuna (vedi osservazione 2.1 più avanti).

(2) Le equazioni di Maxwell in forma differenziale, se si assumono i campi elettrico e magnetico di classe C^2 e le sorgenti ρ e \mathbf{J} di classe C^1 , implicano facilmente la validità dell'equazione che vincola le sorgenti dei campi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (1.11)$$

(Per ottenere tale equazione è sufficiente calcolare la divergenza dei due membri dell'ultima equazione di Maxwell in forma differenziale, tenere conto del fatto che $\nabla \cdot \nabla \wedge = 0$ ed infine usare nel risultato ottenuto l'identità data dalla prima equazione di Maxwell differenziale.) Questa equazione è detta **equazione di continuità della carica elettrica** ed esprime matematicamente la legge di conservazione locale della carica elettrica. Essa ha un'equivalente forma integrale che si ottiene integrando i due membri dell'equazione su un volume $V \subset \mathbb{R}^3$ dato da un aperto a chiusura compatta dal bordo dato dalla superficie chiusa regolare ed orientabile ∂V , applicando il teorema della divergenza ed, infine, portando la derivata nel tempo fuori dal segno di integrazione spaziale:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(t, \mathbf{x}) d^3x = - \oint_{+\partial V} \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Questa equazione dice che la variazione per unità di tempo della carica totale nel volume V è pari al flusso uscente della densità di corrente attraverso la frontiera di V , all'istante considerato.

Procedendo in senso contrario nelle implicazioni e tenendo conto dell'arbitrarietà del volume V si verifica che l'identità di sopra equivale alla (1.11) se i campi ρ e \mathbf{J} sono di classe C^1 .

(3) Nelle ipotesi di campi elettrico e magnetico di classe C^2 , le quattro equazioni di Maxwell in forma differenziale, nelle regioni spaziotemporali in cui le sorgenti sono nulle, implicano la validità dell'*equazione delle onde di D'Alembert* per ogni componente del campo elettromagnetico:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E^i}{\partial t^2} + \Delta E^i = 0, \quad \text{per } i = 1, 2, 3$$

e

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B^i}{\partial t^2} + \Delta B^i = 0, \quad \text{per } i = 1, 2, 3.$$

Per ottenere tali equazioni, in assenza delle sorgenti ρ e \mathbf{J} , è sufficiente partire, rispettivamente dalla quarta e dalla seconda equazione di Maxwell differenziale, derivarne i due membri rispetto a t e quindi usare nel primo membro le identità date, rispettivamente dalla seconda e dalla terza equazione. Si deve quindi usare l'identità operatoriale:

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = -\Delta \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}),$$

usando infine il fatto, dato dalla prima e terza equazione di Maxwell, che $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Queste equazioni implicano che, in assenza di sorgenti e nel vuoto, i campi descrivano propagazioni ondose che si propagano alla velocità della luce c (la luce è un'onda elettromagnetica!).

(4) Nel ventesimo secolo la teoria di Maxwell ha avuto ulteriori sorprendenti sviluppi, infatti nel 1905 l'articolo di Einstein sulla relatività ristretta ha sottolineato la covarianza relativistica delle equazioni di Maxwell, ovvero il fatto che queste sono valide in un qualsiasi sistema di riferimento inerziale pur di cambiare profondamente la struttura geometrica dello spaziotempo ed entrando nella teoria della relatività speciale. Lo sviluppo della teoria da un punto di vista quantistico inizia negli anni venti con l'equazione di Dirac e culmina qualche decennio più tardi con quella parte della teoria dei campi quantizzati nota come elettrodinamica quantistica. Non bisogna assolutamente pensare però che tutto ciò che c'era da scoprire è stato ormai compreso: l'elettrodinamica quantistica è una teoria che, pur avendo ottenuto dei successi sperimentali sorprendenti, manca ancora di una formalizzazione matematica rigorosa che vada oltre la teoria perturbativa.

1.3 Equazioni differenziali del secondo ordine quasilineari

In questo corso ci concentreremo essenzialmente su una classe di equazioni differenziali che andiamo a descrivere. Un'equazione differenziale su $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto e connesso, a derivate parziali (PDE) del secondo ordine ed in forma **quasi lineare**, è un'equazione della forma:

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \Phi(x, u(x), \nabla_x u) = 0, \quad (1.12)$$

dove $u = u(x)$, con $x := (x^1, \dots, x^n)$, è la funzione reale incognita da determinarsi. Si suppone $u \in C^2(\Omega)$ mentre le funzioni reali *assegnate* a^{ij} e Φ sono (almeno) di classe C^0 rispettivamente su Ω su $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Infine $\nabla_x u$ denota in gradiente della funzione u .

Ovviamente è supposto che le funzioni a^{ij} non siano tutte identicamente nulle su Ω (in tal caso non avrebbe senso chiamare l'equazione di sopra "del secondo ordine"). La matrice $A(x)$ i cui coefficienti sono i numeri $a^{ij}(x)$ si dice **matrice caratteristica**, nel punto x , dell'equazione (1.12).

L'equazione (1.12) è detta **lineare** quando ha la forma specifica:

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{k=1}^n b^k(x) \frac{\partial u}{\partial x^k} + c(x)u(x) = f(x), \quad (1.13)$$

dove, a parità delle altre condizioni, le funzioni *assegnate* b^k , c e f sono (almeno) di classe C^0 su Ω . Nel caso in cui la funzione f è identicamente nulla su Ω , l'equazione lineare si dice **omogenea**.

Di particolare interesse è il caso bidimensionale in cui $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, useremo in questo caso le coordinate (x, y) in luogo di (x^1, x^2) . In questa situazione l'equazione (1.12) si riscrive:

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + \Phi(x, y, u(x, y), u_x, u_y) = 0,$$

dove con u_x e u_y sono rispettivamente $\partial u / \partial x$ e $\partial u / \partial y$ mentre con u_{xx} abbiamo indicato la derivata seconda in x di u , con u_{xy} abbiamo indicato la derivata seconda mista (in x e y) di u e con u_{yy} abbiamo indicato la derivata seconda in y di u . Le funzioni a^{ij} che determinano la matrice caratteristica dell'equazione, si possono ora scrivere come:

$$a^{xx} = a, \quad a^{xy} = a^{yx} = b, \quad a^{yy} = c.$$

Osservazioni 1.7. Le equazioni di Maxwell prima descritte, non sono equazioni differenziali del secondo ordine, ma possono essere riscritte in modo che lo diventino, introducendo delle grandezze ausiliarie dette *potenziali elettromagnetici*, dei quali non ci occuperemo in questa sede se non in una versione ridotta, discutendo le equazioni del secondo ordine di tipo ellittico. Tratteremo invece altre equazioni che discendono dalle equazioni di Maxwell, come quella di D'Alembert precedentemente introdotta.

Vogliamo arrivare a discutere un'importante classificazione delle PDE del secondo ordine quasi lineari [V184]. La classificazione è dovuta alle proprietà della forma quadratica indotta dalla matrice di coefficienti $a^{ij}(x)$ e dipende dal punto considerato. Per arrivare ad enunciare tale classificazione, ma anche per motivi più generali studiamo come l'equazione (1.12) cambia al variare delle coordinate utilizzate, cosa che discuteremo nel prossimo paragrafo.

1.3.1 Trasformazioni di coordinate e struttura delle equazioni quasilineari del secondo ordine

Consideriamo una trasformazione di coordinate $y = y(x)$ dove $x \in \Omega$. Assumiamo che la trasformazione sia (almeno) di classe $C^2(\Omega)$, che sia invertibile e che la sua inversa sia una

funzione di classe $C^2(\Omega')$, dove $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ è, per ipotesi, un insieme aperto connesso su cui variano le coordinate y . Di conseguenza avremo che la matrice Jacobiana della trasformazione è non nulla in ogni punto $x \in \Omega$. Infatti, nelle ipotesi fatte possiamo scrivere:

$$y^i = y^i(x(y)),$$

ed, applicando la regola di derivazione di funzioni di funzioni abbiamo che

$$\delta_j^i = \frac{\partial y^i}{\partial y^j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial y^j}.$$

Equivalentemente, se J è la matrice jacobiana della trasformazione $y = y(x)$ e J' quella della trasformazione inversa $x = x(y)$, l'identità di sopra si scrive

$$I = JJ'.$$

In particolare quindi: $1 = \det J \det J'$ e pertanto $\det J \neq 0$. Faremo uso tra poco di questo risultato.

Osservazioni 1.8. Prima di procedere oltre, è interessante notare come invece di richiedere dall'inizio che l'inversa di $y = y(x)$ esista e sia di classe C^2 su qualche aperto Ω' , avremmo potuto chiedere, con lo stesso risultato finale, che la funzione $y = y(x)$ fosse in $C^2(\Omega)$, invertibile e con matrice jacobiana J ovunque non singolare. Infatti, sotto tali ipotesi, per il teorema del Dini, (1) la funzione $y = y(x)$ è funzione aperta e pertanto l'immagine Ω' di Ω secondo $y = y(x)$ è aperto (e connesso visto che la funzione considerata è continua e Ω è connesso); (2) la funzione inversa $x = x(y)$ è in $C^2(\Omega')$.

La funzione u potrà essere espressa in funzione delle nuove coordinate y^1, \dots, y^n sull'insieme Ω' :

$$u'(y) := u(x(y)).$$

L'equazione differenziale (1.12) può essere trascritta per la funzione u' preservando la sua forma, ma cambiando le funzioni che in essa appaiono. Vediamo come procedere. Intanto osserviamo che, nelle ipotesi fatte:

$$\frac{\partial u}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial u'}{\partial y^k},$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^h \partial x^i} = \sum_{k,r=1}^n \frac{\partial y^r}{\partial x^h} \frac{\partial^2 u'}{\partial y^r \partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 y^k}{\partial x^h \partial x^i} \frac{\partial u'}{\partial y^k}.$$

Inserendo queste identità nella (1.12), otteniamo che la stessa equazione differenziale può essere riscritta per la funzione u' , come:

$$\sum_{p,q=1}^n a^{pq}(y) \frac{\partial^2 u'}{\partial y^p \partial y^q} + \Phi'(y, u'(y), \nabla_y u') = 0, \quad (1.14)$$

dove, per $k, r = 1, \dots, n$:

$$a'^{kr}(y(x)) := \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^i} a^{ij}(x) \frac{\partial y^r}{\partial x^j}, \quad (1.15)$$

mentre:

$$\Phi'(y, u'(y), \nabla_y u') := \Phi(x(y), u(x(y)), J^{-1}(y)(\nabla_x u(x))_{x=x(y)}) + \sum_{i,j,p=1}^n a^{ij}(x(y)) \frac{\partial^2 y^p}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_{x=x(y)} \frac{\partial u'}{\partial y^p}.$$

Per costruzione, l'equazione (1.12) è completamente equivalente all'equazione (1.14): $u = u(x)$ soddisfa la prima su Ω se e solo se $u'(y) := u(x(y))$ soddisfa la seconda su Ω' .

1.3.2 Classificazione delle equazioni differenziali quasilineari del secondo ordine

Fissando un punto $x_0 \in \Omega$, consideriamo una trasformazione lineare di coordinate

$$y^i = \sum_{k=1}^n J_k^i x^k,$$

dove, se J è la matrice di coefficienti dati dalle *costanti* J_k^i , vale $\det J \neq 0$. In tal caso J è proprio la matrice Jacobiana della trasformazione considerata e sono soddisfatte le ipotesi sopra richieste dalle trasformazioni $y = y(x)$. La (1.15) valutata nel punto x_0 si può ora trascrivere come:

$$A'(y_0) = JA(x_0)J^t, \quad (1.16)$$

dove $A'(y_0)$ è la matrice di coefficienti $a'^{pq}(y_0)$ mentre $A(x_0)$ è la matrice di coefficienti $a^{ij}(x_0)$ ed infine $y_0 = y(x_0)$. Per il teorema di Sylvester, possiamo sempre scegliere la matrice non singolare J in modo tale che $A'(y_0)$ abbia *forma canonica di Sylvester*, cioè sia una matrice diagonale del tipo:

$$A'(y_0) = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0),$$

in cui i numeri 1 compaiono r volte, i numeri -1 compaiono s volte ed i numeri 0 compaiono t volte. È noto, dalla teoria delle forme quadratiche, che la terna (r, s, t) , detta *segnatura*, è una proprietà della forma quadratica associata alla matrice $A(x_0)$, e quindi una proprietà dell'equazione differenziale in riferimento al punto x_0 . In altre parole, se esiste un'altra scelta della matrice non singolare J che riduce la matrice $A(x_0)$ tramite la (1.16) a forma canonica di Sylvester, il numero di volte in cui appariranno i numeri 1, -1 , 0 sulla diagonale principale saranno sempre, rispettivamente, i numeri r, s, t trovati sopra. Ovviamente $r + s + t = n$.

In modo del tutto analogo alla classificazione delle coniche tramite lo studio della forma quadratica associata si ha la seguente classificazione.

Definizione 1.5. Se $\Omega \in \mathbb{R}^n$ è un insieme aperto non vuoto e connesso, si consideri l'equazione quasi lineare del secondo ordine nella funzione a valori reali u :

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \Phi(x, u(x), \nabla_x u) = 0, \quad (1.17)$$

dove $u \in C^2(\Omega)$ e $a^{ij} \in C^0(\Omega)$ e $\Phi \in C^0(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ sono funzioni a valori reali assegnate. In riferimento alla matrice caratteristica $A(x_0)$ di coefficienti $a^{ij}(x_0)$, valutata nel punto $x_0 \in \Omega$, si dice che:

(a) l'equazione differenziale è di **tipo ellittico** in x_0 se la segnatura di $A(x_0)$ è $(n, 0, 0)$ oppure $(0, n, 0)$;

(b) l'equazione differenziale è di **tipo iperbolico** in x_0 se la segnatura di $A(x_0)$ è $(r, s, 0)$ con $r \neq 0$ e $s \neq 0$, in particolare si dice che l'equazione differenziale è di **tipo iperbolico normale** in x_0 se la segnatura di $A(x_0)$ è $(1, n-1, 0)$ con $n > 1$ oppure $(n-1, 1, 0)$ con $n > 1$;

(c) l'equazione differenziale è di **tipo parabolico** in x_0 se la segnatura di $A(x_0)$ è (r, s, t) con $t \neq 0$, in particolare si dice che l'equazione differenziale è di **tipo parabolico normale** in x_0 se la segnatura di $A(x_0)$ è $(n-1, 0, 1)$ con $n > 1$ oppure $(0, n-1, 1)$ con $n > 1$. \diamond

Osservazioni 1.9. Ai fini della classificazione di una PDE quasilineare del secondo ordine, la matrice caratteristica può essere ridefinita moltiplicandola per una costante (più in generale una funzione del punto in cui si valuta la matrice) diversa da zero (in ogni punto). Tale trasformazione non altera la classe di appartenenza dell'equazione differenziale come segue immediatamente dalle definizioni date sopra.

Esempi 1.1.

(1) L'equazione di **Tricomi** in \mathbb{R}^2 si scrive:

$$y u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

La forma quadratica associata è data dalla matrice non costante:

$$A(x, y) = \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Notiamo subito che, sull'asse delle ascisse, cioè $y = 0$, l'equazione differenziale è di *tipo parabolico normale*.

Consideriamo ora un punto (x_0, y_0) con $y_0 > 0$. Definiamo il nuovo sistema di coordinate cartesiane (x', y') su \mathbb{R}^2 dove $y' := y$ mentre $x' = x/\sqrt{y_0}$. In queste coordinate, l'equazione prende forma:

$$\frac{y'}{y_0} u_{x'x'} + u_{y'y'} = 0.$$

Pertanto, esattamente in $(x, y) = (x_0, y_0)$, la matrice associata all'equazione, nelle nuove coordinate diventa:

$$A'(x', y') = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Concludiamo che, nel semipiano $y > 0$, l'equazione di Tricomi è di *tipo ellittico*.

Consideriamo infine un punto (x_0, y_0) con $y_0 < 0$. Definiamo il nuovo sistema di coordinate cartesiane (x', y') su \mathbb{R}^2 dove $y' := y$ mentre $x' = x/\sqrt{-y_0}$. In queste coordinate, l'equazione prende forma:

$$-\frac{y'}{y_0}u_{x'x'} + u_{y'y'} = 0.$$

Pertanto, esattamente in $(x, y) = (x_0, y_0)$, la matrice associata all'equazione, nelle nuove coordinate diventa:

$$A'(x', y') = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Concludiamo che, nel semipiano $y < 0$, l'equazione di Tricomi è di *tipo iperbolico normale*.

(2) L'equazione di Poisson su $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si scrive:

$$\Delta u = \rho$$

dove $\rho = \rho(x)$ è una funzione almeno C^0 assegnata e l'*operatore di Laplace*, detto anche **laplaciano**, Δ è definito in coordinate cartesiane ortonormali come:

$$\Delta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Nel caso la funzione ρ sia identicamente nulla su Ω , l'equazione suddetta si riduce all'**equazione di Laplace** su Ω :

$$\Delta u = 0,$$

le cui soluzioni sono dette **funzioni armoniche** su Ω .

In entrambi i casi, la matrice $A(x_0)$, per ogni $x_0 \in \Omega$ è individuata dalla matrice identità. In base alla classificazione suddetta, le equazioni di Poisson e di Laplace sono equazioni di *tipo ellittico* in ogni punto. Dal punto di vista fisico, se $n = 3$, $-u$ può essere pensato come il *potenziale elettrostatico* e, nel caso dell'equazione di Poisson, ρ corrisponde alla densità di carica elettrica presente nel volume Ω .

(3) Se $\Omega := \mathbb{R}^n$, l'**equazione delle onde** o **equazione di D'Alembert** si scrive:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta u = 0.$$

Sopra le coordinate su \mathbb{R}^n sono state decomposte come: $x = (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. La costante $c > 0$ si interpreta fisicamente come la velocità di propagazione della perturbazione ondosa descritta dalla funzione $u = u(t, \mathbf{x})$, dove t è il tempo e \mathbf{x} lo spazio (almeno nel caso di $n = 3$) di un riferimento. L'equazione di D'Alembert descrive tutti i fenomeni di propagazione ondosa (armonica) conosciuti: dalla propagazione della luce a quella del suono, ma anche la propagazione di una deformazione in un mezzo continuo elastico, fino ad arrivare alla propagazione delle onde gravitazionali nella teoria della relatività generale. La matrice $A(x_0)$, per ogni $x_0 \in \Omega$, ha

la forma $\text{diag}(-1/c^2, 1, \dots, 1)$. Passando a coordinate $y^1 := ct$, $\mathbf{y} := \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, si ottiene che la matrice $A'(y_0)$ ha forma canonica di Sylvester in ogni punto y_0 , con segnatura $(n-1, 1, 0)$. Pertanto l'equazione di D'Alembert è, ovunque, di *tipo iperbolico normale*.

Un caso particolare dell'equazione di D'Alembert è dato, per $n = 4$, quando si lavora con il *campo elettrico* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ e con il *campo magnetico* $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ che descrivono i fenomeni elettromagnetici. L'equazione di D'Alembert per questi due campi (nel vuoto) descrive la propagazione delle onde elettromagnetiche (e quindi della luce in particolare)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{E} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{B} = 0,$$

c è la velocità della luce nel vuoto. Le due equazioni di sopra, che seguono dalle più generali *equazioni di Maxwell*, si devono interpretare componente per componente e significano che *ogni componente* del campo \mathbf{E} e del campo \mathbf{B} soddisfa separatamente l'equazione di D'Alembert.

(4) Se $\Omega := \mathbb{R}^4$, l'**equazione di Klein-Gordon** si scrive:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \Delta \phi - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \phi = 0.$$

Come prima, le coordinate su \mathbb{R}^4 sono state decomposte come: $x = (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. La costante $c > 0$ si interpreta fisicamente come la velocità della luce nel vuoto, $\hbar = h/2\pi$ dove h è la *costante di Planck* t è il tempo e \mathbf{x} lo spazio di un sistema di riferimento (Minkowskiano della teoria della Relatività Speciale). L'equazione di Klein-Gordon descrive una campo scalare ϕ a valori in \mathbb{R} associato a particelle quantistiche di massa $m > 0$ senza spin ed elettricamente neutre (in realtà ϕ descrive sia la particella che l'anti particella). La matrice $A(x_0)$, per ogni $x_0 \in \Omega$, ha la forma $\text{diag}(-1/c^2, 1, 1, 1)$. Passando a coordinate $y^1 := ct$, $\mathbf{y} := \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, si ottiene che la matrice $A'(y_0)$ ha forma canonica di Sylvester in ogni punto y_0 , con segnatura $(3, 1, 0)$. Pertanto l'equazione di Klein-Gordon è, ovunque, di *tipo iperbolico normale*.

(5) Se $\Omega := \mathbb{R}^n$, l'**equazione del calore** si scrive:

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + a^2 \Delta u = q.$$

dove $a > 0$ è una costante e $q = q(t, \mathbf{x})$ una funzione assegnata. Sopra le coordinate su \mathbb{R}^n sono ancora state decomposte come: $x = (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Almeno per $n = 3$, u si interpreta fisicamente come la temperatura in un mezzo continuo le cui caratteristiche termodinamiche sono riassunte dai parametri a e dalla funzione q che corrisponde ad una sorgente di calore.

La matrice $A(x_0)$, per ogni $x_0 \in \Omega$, ha la forma $\text{diag}(0, a^2, \dots, a^2)$. Passando a definire coordinate $y^1 := t$, $\mathbf{y} := a^{-1} \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, si ottiene in tali coordinate che la matrice $A'(y_0)$ ha forma canonica di Sylvester in ogni punto y_0 , con segnatura $(0, n-1, 1)$: si osservi infatti che nell'equazione del calore *non* compare la derivata seconda nella prima variabile, questo spiega l'ultimo 1 e l' $n-1$ nella segnatura. Pertanto l'equazione del calore è, ovunque, di *tipo parabolico normale*.

(6) L'**equazione di Schrödinger** per la *funzione d'onda* $\psi = \psi(t, \mathbf{x})$, con $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(\mathbf{x})\psi,$$

non ricade nella classificazione suddetta in quanto: (1) $\psi = \psi(t, \mathbf{x})$ è una funzione a valori complessi e (2) il coefficiente della derivata temporale è immaginario puro. Tuttavia tale equazione ha caratteristiche simili all'equazione del calore.

(7) **L'equazione di Dirac** per il *il campo fermionico* $\Psi = \Psi(x) \in \mathbb{C}^4$, con $x \equiv (x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$:

$$i\hbar \sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} - mc\Psi = 0$$

che descrive il campo quantistico associato agli elettroni ed i positroni, non ricade nella classificazione suddetta in quanto: (1) $\Psi = \Psi(t, \mathbf{x})$ è una funzione a valori in \mathbb{C}^4 e (2) i coefficienti delle derivate sono matrici complesse. Tuttavia tale equazione, per taluni aspetti, ha caratteristiche simili all'equazione di Klein-Gordon. Le 4 matrici complesse γ^μ , per $\mu = 0, 1, 2, 3$ sono dette *matrici di Dirac* e soddisfano le relazioni di Dirac (o Clifford)

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = -2g^{\mu\nu} I,$$

dove la matrice dei coefficienti $g^{\mu\nu}$ è quella della metrica di Lorentz $diag(-1, 1, 1, 1)$.

(8) **L'equazione di Navier-Stokes** per un fluido incompressibile con densità ρ_0 :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\text{rot} \mathbf{V}) \wedge \mathbf{V} = \mathbf{f} - \frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \Delta \mathbf{V} - \nabla \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right), \quad (1.18)$$

dove le funzioni incognite $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ e $p = p(t, \mathbf{x})$ sono, rispettivamente il campo di velocità e la pressione del fluido viscoso. La costante ν è la *coefficiente di viscosità cinematica* del fluido e \mathbf{f} è una densità di forza assegnata (per esempio quella gravitazionale). Questa equazione, non lineare nelle derivate prime, non ricade nella classificazione dato che lavora con un campo vettoriale \mathbf{V} invece che con un campo scalare e le componenti del campo non soddisfano equazioni disaccoppiate come accadeva, per esempio, per l'equazione di D'Alembert per il campo elettrico o magnetico. Si tratta di una delle equazioni più difficili da studiare che esistano. Si conoscono pochissimi risultati rigorosi riguardanti esistenza ed unicità delle soluzioni dell'equazione di Navier-Stokes quando sono assegnati dati iniziali ed al contorno (insieme ad un'ulteriore equazione costitutiva che legni p e ρ_0).

1.4 Il problema di Cauchy ed il Teorema di Cauchy-Kovalevskaja.

1.4.1 Superfici regolari in \mathbb{R}^n .

Una $(n - 1)$ -**superficie** Σ in \mathbb{R}^n **di classe** C^k (equivalentemente detta sottovarietà embedded di \mathbb{R}^n di dimensione $n - 1$ e classe di differenziabilità C^k con $k \geq 1$) è un sottoinsieme di \mathbb{R}^n tale che in un intorno (in \mathbb{R}^n) aperto A_p di ogni suo punto $p \in \Sigma$ può essere espressa come luogo dei punti che annullano una funzione S di classe C^k , con $k \geq 1$, con $dS \neq 0$ su Σ . In altre parole, per ogni $p \in \Sigma$, esiste un suo intorno aperto $A_p \in \Omega$ ed una funzione $S : A_p \rightarrow \mathbb{R}$, $S \in C^k(A_p)$, tale che:

$$\Sigma \cap A_p = \{x \in A_p \mid S(x) = 0\},$$

unitamente a:

$$dS(x) \neq 0, \quad \text{per } S(x) = 0.$$

Nel seguito **superficie regolare**, senza altre specificazioni, indicherà una $(n - 1)$ -superficie di \mathbb{R}^n di classe C^k con $k \geq 1$.

Con le definizioni poste, dS si identifica con ∇S (ne ha le stesse componenti lavorando in basi ortonormali) ∇S (cioè dS) è un vettore normale a Σ , nel senso che, se \mathbf{e}_i è il versore i -esimo della base canonica di \mathbb{R}^n , il vettore mai nullo per $x \in \Sigma \cap A_p$:

$$\nabla S(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x^i} \Big|_x \mathbf{e}_i$$

è normale a $\Sigma \cap A_p$ in ogni punto.

Esistono diverse definizioni equivalenti di superfici regolari in \mathbb{R}^n . Si osservi che ogni funzione di classe C^k ($k \geq 1$), $x^1 = f(x^2, \dots, x^n)$ individua una superficie regolare. In tal caso la funzione S può essere scelta come:

$$S(x^1, x^2, \dots, x^n) := x^1 - f(x^2, \dots, x^n).$$

La definizione di superficie regolare Σ implica il seguente risultato che mostra che in realtà quanto appena detto è del tutto generale. Se $p \in \Sigma$, in un intorno aperto $O_p \subset \mathbb{R}^n$ di p , possiamo sempre *risolvere* l'equazione che determina Σ : $S(x^1, \dots, x^n) = 0$, in funzione di $n - 1$ variabili tra n le x^1, \dots, x^n che indicheremo con ξ^2, \dots, ξ^n , ottenendo una funzione di classe C^k $\xi^1 = \xi^1(\xi^2, \dots, \xi^n)$, dove ξ^1 è la variabile rimanente tra le x^1, \dots, x^n . In questo caso (ξ^2, \dots, ξ^n) varia in un aperto di $A_p \subset \mathbb{R}^{n-1}$. In questo modo la porzione $\Sigma \cap O_p$ della superficie regolare risulta essere descritta biunivocamente dalle coordinate locali $(\xi^2, \dots, \xi^n) \in A_p$.

Un esempio ovvio è la superficie sferica $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ descritta dagli zeri della funzione $S(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (notare che dS non si annulla mai su Σ come si verifica subito). Se $p \in \Sigma$, possiamo sempre risolvere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *localmente*, ottenendo una variabile in funzione delle rimanenti due. Per esempio, se p ha coordinata $z > 0$, possiamo sempre descrivere Σ nell'intorno di p (in realtà in questo modo descriviamo tutto l'emisfero con $z > 0$) tramite l'equazione $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. In questo caso $\xi^1 = z$ e $\xi^2 = x, \xi^3 = y$.

1.4.2 Il problema di Cauchy e la “ben posizione” del problema nel senso di Hadamard.

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto connesso non vuoto e $\Sigma \subset \Omega$ è una superficie regolare (con qualche ordine di differenziabilità $k \geq 1$) di dimensione $n - 1$ che divide Ω in due parti connesse³, il **problema di Cauchy** del secondo ordine riferito a Σ consiste nel sistema:

$$\begin{cases} F\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x^n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^n \partial x^n}\right) = 0, \\ u|_{\Sigma} = u_0, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\Sigma} = u_1, \end{cases} \quad (1.19)$$

³Questa richiesta è in realtà inessenziale a questo punto della teoria.

in cui u_0 e u_1 sono funzioni assegnate su Σ di qualche ordine di differenziabilità da definirsi, $u \in C^2(\Omega)$ è la funzione incognita da determinare, F è una funzione nota che determina l'equazione differenziale ed abbiamo usato la notazione standard:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} := \sum_{i=1}^n n^i \frac{\partial u}{\partial x^i}$$

dove $\mathbf{n} = (n^1, \dots, n^n)$ è il *versore* normale a Σ .

Secondo l'impostazione data da Hadamard, un problema di Cauchy (1.19) è **ben posto** se sono verificate le seguenti tre richieste.

- (a) Una soluzione del problema, in una fissata classe di funzioni esiste.
- (b) La soluzione in (a) è l'unica soluzione nella classe di funzioni suddetta.
- (c) La soluzione dipende *con continuità* dai dati di Cauchy in qualche topologia di spazi di funzioni definita negli spazi di funzioni considerate.

La condizione (c) deriva dal fatto che, nella pratica, i dati di Cauchy sono sempre noti con una certa approssimazione e si richiede che, pertanto, le soluzioni varino di poco se le condizioni di Cauchy variano di poco.

Nel caso una delle tre condizioni di sopra sia violata, si dice che il problema di Cauchy è *mal posto nel senso di Hadamard*. Mostriamo che il problema di Cauchy ellittico può essere mal posto perché viola la condizione (c), mettendo nello spazio dei dati di Cauchy limitati la topologia naturale dell'estremo superiore indotta dalla norma $\|\cdot\|_\infty$ (vedi la sezione 1.1.3).

Cosideriamo in \mathbb{R}^2 , con coordinate (x, y) , il problema di Laplace:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{1}{k} \sin(kx), \end{array} \right. ,$$

dove $k > 0$ è fissata e si cercano soluzioni $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Si dimostra che l'unica soluzione del problema posto è:

$$u^{(k)}(x, y) := \frac{1}{k^2} \sin(kx) \sinh(ky) .$$

Si noti che, nel limite $k \rightarrow +\infty$ il dato di Cauchy:

$$u_1^{(k)}(x) = \frac{1}{k} \sin(kx)$$

soddisfa $\|u_1^{(k)}\|_\infty \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$, mentre l'altro dato è nullo per ipotesi e pertanto $\|u_0^{(k)}\|_\infty = 0$. Tuttavia la soluzione $u^{(k)}(x, y)$ non tende, puntualmente, ad alcun limite se $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

Si può mostrare che, le patologie del problema di Cauchy per equazioni ellittiche riguardano anche l'esistenza e l'unicità della soluzione, in particolare quando il problema di Cauchy è imposto

in regioni limitate. Vedremo ciò nel prossimo capitolo. In realtà per problemi di Cauchy di carattere ellittico, si ha anche la perdita di validità della richiesta (a) almeno quando la superficie Σ è una superficie chiusa che contorna Ω . In tal caso, lavorando per esempio con l'equazione di Laplace ed assegnando dati di Cauchy analitici su Σ , per ogni punto di Σ c'è un intorno in cui esiste una soluzione⁴ del problema. La parte dell'intorno che interseca Ω produce localmente una soluzione del problema di Cauchy. Quello che però accade è che le diverse soluzioni ottenute localmente in questo modo non si “saldano” tra di loro per determinare un'unica soluzione su Ω : su un punto p interno a Ω coperto da due intorni suddetti si trovano generalmente valori distinti per $u(p)$ a seconda dell'intorno scelto, in modo tale che risulta essere impossibile definire la funzione u sull'unione dei due intorni.

1.4.3 Il Teorema di Cauchy-Kovalevskaja.

Ci occuperemo ora di studiare il problema della risolubilità del problema di Cauchy sopra scritto nel caso in cui l'equazione differenziale che compare in esso sia del tipo (1.12), introducendo il *teorema di Cauchy-Kovalevskaja*. A tal fine consideriamo il caso più semplice nel quale $\Omega = \mathbb{R}^n$ e Σ è il piano $x^1 = 0$.

Un'equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine, nella funzione incognita $u = u(x)$, si dice che è scritta **in forma normale rispetto alla variabile t** , se $x = (t, \mathbf{x}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ (con $\mathbf{x} = (x^2, \dots, x^n)$) se è rappresentata nella forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F \left(t, \mathbf{x}, u(t, \mathbf{x}), \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x^n}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^n \partial x^n} \right). \quad (1.20)$$

Si noti che il secondo membro è funzione delle derivate al più del secondo ordine in cui la derivata in t appare al più al primo ordine. Si può dare un'analogia definizione di equazione in forma normale rispetto ad una coordinata, anche per equazioni di ordine superiore al secondo.

Consideriamo il **Problema di Cauchy** per la funzione $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ con dati di Cauchy sulla superficie Σ individuata da $t = 0$ e con equazione in forma normale nella variabile t :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F \left(t, \mathbf{x}, u(t, \mathbf{x}), \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x^n}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^n \partial x^n} \right), \\ u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, \mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}), \end{cases}$$

in cui $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$ e $u_1 \in C^0(\mathbb{R}^{n-1})$ sono funzioni assegnate su Σ .

Esistono vari teoremi che assicurano l'esistenza e l'unicità della soluzione. Il primo di tutti questi teoremi è quello dovuto a Cauchy e Kovalevskaja. Tale teorema non ha grande utilità nelle applicazioni moderne, in quanto richiede ipotesi estremamente forti per funzionare, ma è comunque di grande utilità teorica, in quanto serve come lemma intermedio per provare teoremi più moderni

⁴Questa è l'unica soluzione in tale intorno per il teorema di Cauchy-Kovalevskaja che stiamo per discutere, visto che le funzioni che soddisfano l'equazione di Laplace sono analitiche come proveremo più avanti.

basati su ipotesi molto deboli. Enunciamo il teorema per equazioni del secondo ordine, anche se l'ordine dell'equazione non è essenziale.

Ricordiamo che una funzione a valori reali $f = f(x)$ è detta **analitica (reale) nell'insieme aperto** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, se per ogni $x_0 \in \Omega$, in un intorno aperto di x_0 incluso in Ω , la funzione f si può scrivere come serie di Taylor centrata in x_0 :

$$f(x) = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=N} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \Big|_{x_0} (x^1 - x_0^1)^{\alpha_1} \dots (x^n - x_0^n)^{\alpha_n} .$$

Teorema 1.7. (Cauchy-Kovalevskaja). *Si consideri il problema di Cauchy del secondo ordine nella funzione incognita $u = u(t, \mathbf{x})$ con $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, con dati di Cauchy assegnati sulla superficie determinata da $t = 0$ e con equazione differenziale scritta in forma normale nella variabile t :*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\left(t, \mathbf{x}, u(t, \mathbf{x}), \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x^n}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^n \partial x^n}\right), \\ u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, \mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (1.21)$$

Se, per un punto $(0, \mathbf{x}_0)$, le funzioni u_0 e u_1 sono analitiche nell'intorno di \mathbf{x}_0 e la funzione F è analitica nell'intorno del punto:

$$\left(0, \mathbf{x}_0, u_0(\mathbf{x}_0), u_1(\mathbf{x}_0), \frac{\partial u_0}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial u_0}{\partial x^n}(\mathbf{x}_0), \frac{\partial u_1}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial u_1}{\partial x^n}(\mathbf{x}_0), \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2 \partial x^2}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^n \partial x^n}(\mathbf{x}_0)\right)$$

allora in un intorno di $(0, \mathbf{x}_0)$ esiste una soluzione del sistema (1.21). Tale soluzione è l'unica soluzione analitica nell'intorno considerato. \diamond

Idea della dimostrazione. Se esiste una soluzione u deve valere:

$$u(0, \mathbf{x}_0) = u_0(\mathbf{x}_0),$$

inoltre, se $i = 2, \dots, n$:

$$\frac{\partial u}{\partial x^i}(0, \mathbf{x}_0) = \frac{\partial u_0}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, \mathbf{x}_0) = u_1(\mathbf{x}_0).$$

Consideriamo poi l'equazione differenziale con entrambi i membri valutati in $(0, \mathbf{x}_0)$. In tale situazione, il secondo membro dell'equazione differenziale è funzione dei dati di Cauchy unicamente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{(0, \mathbf{x}_0)} =$$

$$F \left(0, \mathbf{x}_0, u_0(\mathbf{x}_0), u_1(\mathbf{x}_0), \frac{\partial u_0}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial u_0}{\partial x^n}(\mathbf{x}_0), \frac{\partial u_1}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial u_1}{\partial x^n}(\mathbf{x}_0), \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2 \partial x^2}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^n \partial x^n}(\mathbf{x}_0) \right).$$

In questo modo abbiamo ottenuto la derivata seconda nel tempo della soluzione, ammesso che esista, nel punto $(0, \mathbf{x}_0)$, in funzione dei dati di Cauchy. Le rimanenti derivate seconde della soluzione sono invece note direttamente dai dati di Cauchy $(i, k = 2, \dots, n)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x^i} \Big|_{(0, \mathbf{x}_0)} = \frac{\partial u_1}{\partial x^i} \Big|_{\mathbf{x}_0}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial x^i} \Big|_{(0, \mathbf{x}_0)} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^k \partial x^i} \Big|_{\mathbf{x}_0}$$

In definitiva abbiamo ottenuto tutte le derivate fino all'ordine 2 incluso, della eventuale soluzione, valutate in $(0, \mathbf{x}_0)$, in funzione dei dati di Cauchy. Nell'ipotesi di F analitica, e quindi infinitamente differenziabile, possiamo ottenere *tutte* le derivate di ogni ordine della eventuale soluzione, valutate in $(0, \mathbf{x}_0)$, in funzione dei dati di Cauchy. Per fare ciò è sufficiente derivare entrambi i membri dell'equazione differenziale e iterare la procedura seguita sopra per l'identità che si è ottenuta. Si osservi che in tutta la procedura, il fatto che l'equazione sia scritta in forma normale è di centrale importanza. In questo modo si può scrivere una serie di Taylor formale della eventuale soluzione, sviluppata nel punto $(0, \mathbf{x}_0)$. Si vede che, nelle ipotesi fatte (in particolare, tenendo conto dell'analiticità di F) tale serie converge effettivamente e, per costruzione, converge ad una soluzione del problema di Cauchy considerato. L'unicità è conseguenza di teoremi di unicità validi per funzioni analitiche. \square

1.4.4 Il caso di una superficie regolare generica in \mathbb{R}^n descritta in *coordinate normali*

Torniamo ora al problema di Cauchy (1.19) specializzato al caso di un'equazione del secondo ordine in forma quasi lineare (1.12) e riferito ad una superficie regolare $\Sigma \subset \Omega$ di dimensione $n - 1$ che divide $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ in due parti connesse:

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \Phi(x, u(x), \nabla_x u) = 0, \\ u|_{\Sigma} = u_0, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Sigma} = u_1, \end{cases} \quad (1.22)$$

\mathbf{n} come già detto, è il versore normale a Σ .

Vogliamo ridurci alla situazione in cui Σ appare come il piano $t = 0$, per poter cercare di applicare il teorema di Cauchy-Kovalevskaja, almeno nell'intorno di $p \in \Sigma$. Per far ciò usiamo un opportuno sistema di coordinate dette *coordinate normali Riemanniane*. Sia ξ^2, \dots, ξ^n un qualsiasi sistema di coordinate su Σ (di classe C^k come S) definito nell'intorno di $p \in \Sigma$. Per ogni punto $q \in \Sigma$ nell'intorno considerato, tracciamo la retta normale a Σ e passante per q . Sia $t \in \mathbb{R}$ la lunghezza d'arco su tale retta ponendo come origine di essa il punto q in cui la retta interseca Σ . Si dimostra che viene a definirsi in questo modo un sistema di coordinate (t, ξ^2, \dots, ξ^n) , di classe C^k , in un intorno aperto $B_p \subset \Omega$ di p . Un punto $r \in B_p$ è individuato in questo modo: si considera l'unica retta γ_r perpendicolare a Σ che passa per r , la lunghezza del segmento tra r e l'intersezione $q_r = \gamma_r \cap \Sigma$ è la coordinata t_r di r , le rimanenti coordinate ξ_r^2, \dots, ξ_r^n non sono

altro che le coordinate di q_r su Σ . Questo sistema di coordinate ha la particolarità che, data la natura di t , vale:

$$\Sigma \cap B_p = \{(t, \xi^2, \dots, \xi^n) \mid t = 0\}.$$

Ulteriormente, se (ξ^2, \dots, ξ^n) sono fissate, la curva $t \mapsto x^i(t, \xi^2, \dots, \xi^n)$ risulta essere normale a Σ per costruzione ed il suo vettore tangente

$$\mathbf{n} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial t} \Big|_{t=0} \mathbf{e}_i$$

non è altro che il *versore* normale a Σ nel punto di coordinate normali riemanniane $(0, \xi^2, \dots, \xi^n)$. Di conseguenza

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} := \sum_{i=1}^n n_i \frac{\partial u}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{\partial u}{\partial x^i} = \frac{\partial u'}{\partial t} \Big|_{t=0}, \quad (1.23)$$

dove $u = u(x)$ è una funzione arbitraria definita nell'intorno di p che indichiamo con $u'(t, \xi^2, \dots, \xi^n) = u(x(t, \xi^2, \dots, \xi^n))$ quando la esprimiamo in coordinate normali riemanniane. Lavorando nell'intorno di p in coordinate normali riemanniane, il problema di Cauchy (1.22) diventa della forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} a^{tt}(t, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = - \sum_{i=2}^n 2a^{it}(t, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^2 u'}{\partial t \partial \xi^i} - \sum_{i,j=2}^n a^{ij}(t, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^2 u'}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \\ \quad - \Phi' \left(t, \boldsymbol{\xi}, u'(t, \boldsymbol{\xi}), \frac{\partial u'}{\partial t}, \frac{\partial u'}{\partial \xi^2}, \dots, \frac{\partial u'}{\partial \xi^n} \right), \\ \quad u'(0, \boldsymbol{\xi}) = u'_0(\boldsymbol{\xi}), \\ \quad \frac{\partial u'}{\partial t} \Big|_{\Sigma} = u'_1(\boldsymbol{\xi}), \end{array} \right. \quad (1.24)$$

Notiamo che se $a^{tt}(t, \boldsymbol{\xi}) \neq 0$ in un intorno di p , allora possiamo dividere entrambi i membri dell'equazione differenziale per $a^{tt}(t, \boldsymbol{\xi})$ ottenendo un'equazione differenziale in forma normale nella variabile t . Il problema di Cauchy risultante in questa situazione è un caso particolare del problema che appare nelle ipotesi del teorema di Cauchy-Kovalevskaja. Per poter applicare il teorema detto sono comunque ancora necessarie ipotesi di analiticità della quali non ci occuperemo. Tornando in coordinate cartesiane e facendo uso della (1.15), la condizione $a^{tt}(0, \boldsymbol{\xi}) \neq 0$, tenendo conto che è:

$$a^{tt}(t, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial t}{\partial x^i} \frac{\partial t}{\partial x^j},$$

può essere riscritta, per $x \in \Sigma$:

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial t}{\partial x^i} \frac{\partial t}{\partial x^j} \neq 0, \quad (1.25)$$

Concludiamo che, se in un punto $x \in \Sigma$ vale la (1.25), allora possiamo applicare il teorema di Cauchy-Kovalevskaja nell'intorno di quel punto riducendosi a lavorare in coordinate normali riemanniane purché siano soddisfatte le necessarie ipotesi di analiticità.

1.4.5 Nozione di superficie caratteristica

Ci interessa ora approfondire la situazione in cui, in riferimento al problema di Cauchy (1.22), valga

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial t}{\partial x^i} \frac{\partial t}{\partial x^j} = 0. \quad (1.26)$$

ovunque sulla superficie Σ . Questo significa che, passando in coordinate normali riemanniane, $a^{tt}(0, \boldsymbol{\xi}) = 0$. In tal caso il teorema di Cauchy-Kovalevskaia non può essere applicato e non ci sono garanzie, per tale via, sull'esistenza e l'unicità di una soluzione nell'intorno del punto singolare detto. Si osservi che la funzione $t = t(x)$ individua la superficie regolare Σ su cui diamo le condizioni di Cauchy, tramite la richiesta $t(x) = 0$, di cui $dt = \sum_i \frac{\partial t}{\partial x^i} \mathbf{e}_i$ è vettore normale mai nullo. Nel caso in cui valga (1.26), non possiamo applicare il teorema di Cauchy-Kovalevskaia per dati di Cauchy assegnati la superficie individuata da $t = 0$. Ora focalizzeremo l'attenzione su questa classe di superfici. Tuttavia, per definire tale classe di superfici, l'uso delle coordinate Riemanniane e della coordinata t è scomodo per vari motivi e pertanto vogliamo individuare tali superfici senza fare esplicito riferimento a tali coordinate. Diamo a tal fine la seguente definizione in cui rimpiazziamo la coordinata riemanniana t con una generica funzione S .

Definizione 1.6. Se $\Omega \in \mathbb{R}^n$ è un insieme aperto non vuoto e connesso, si consideri l'equazione quasi lineare del secondo ordine nella funzione a valori reali u :

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \Phi(x, u(x), \nabla_x u) = 0, \quad (1.27)$$

dove $u \in C^2(\Omega)$ e $a^{ij} \in C^0(\Omega)$ e $\Phi \in C^0(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ sono funzioni a valori reali assegnate. Una superficie regolare $\Sigma \subset \Omega$ di dimensione $n - 1$ è detta **superficie caratteristica** per l'equazione differenziale (1.27), se nell'intorno di ogni $p \in \Sigma$ può essere espressa come il luogo dei punti x in cui $S(x) = 0$ dove S è una funzione almeno C^1 definita nell'intorno di p , soddisfacente $dS \neq 0$ su Σ e

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^j} = 0, \quad \text{per } x \in \Sigma. \quad (1.28)$$

◇

Mostriamo ora che, effettivamente, le superfici caratteristiche non permettono di applicare il teorema di Cauchy-Kovalevskaia quando i dati di Cauchy sono assegnati su di esse. Successivamente, nelle osservazioni, mostreremo che il problema di Cauchy con dati iniziali su una superficie caratteristica è, in generale, affetto da varie patologie.

Se Σ è una superficie caratteristica individuata dal luogo degli zeri della funzione S , possiamo usare su Σ le coordinate normali Riemanniane t, ξ^2, \dots, ξ^n . In questo caso abbiamo che $S'(0, \xi^2, \dots, \xi^n) = 0$ per ogni scelta delle ξ^k , dato che il luogo dei punti a $S = 0$ coincide con il

luogo dei punti a $t = 0$ e coincide con Σ per costruzione. Di conseguenza

$$\left. \frac{\partial S'}{\partial \xi^k} \right|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial S'}{\partial t} \right|_{t=0} \neq 0.$$

La seconda condizione deriva dal fatto che, se non fosse vera, avremmo che tutte le derivate di S sono nulle su Σ e questo è impossibile per la richiesta $dS \neq 0$ su Σ . Di conseguenza abbiamo in particolare che, esattamente su Σ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^j} \Big|_{\Sigma} &= \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \left(\frac{\partial S'}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x^i} + \sum_{k=2}^n \frac{\partial S'}{\partial \xi^k} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial S'}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x^j} + \sum_{h=2}^n \frac{\partial S'}{\partial \xi^h} \frac{\partial \xi^h}{\partial x^j} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \left(\frac{\partial S'}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x^i} + 0 \right) \left(\frac{\partial S'}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x^j} + 0 \right) = \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \frac{\partial t}{\partial x^i} \frac{\partial t}{\partial x^j} \Big|_{\Sigma} \left(\frac{\partial S'}{\partial t} \right)^2 = \left(\frac{\partial S'}{\partial t} \right)^2 a^{tt}, \end{aligned}$$

dove $\frac{\partial S'}{\partial t} \neq 0$ nelle nostre ipotesi, e quindi:

$$a^{tt}(0, \boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{\partial S'}{\partial t} \right)^{-2} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^j}$$

dove il coefficiente davanti alla somma a secondo membro è ben definito. Concludiamo che, come preannunciato, la richiesta che Σ sia una superficie caratteristica (ed in particolare la (1.28)) implica che, lavorando in coordinate riemanniane normali attorno a Σ , il coefficiente a^{tt} in (1.24) si annulli su Σ (cioè per $t = 0$) e quindi non si possa applicare il teorema di Cauchy-Kovalevskaia. Si deve notare che noi abbiamo assunto che $a^{tt}(0, \boldsymbol{\xi}) = 0$ su tutta Σ . In realtà, perché si annulli $a^{tt}(0, \boldsymbol{\xi})$ in un punto $p = (0, \boldsymbol{\xi}) \in \Sigma$, è sufficiente che Σ che compare in (1.22) sia *tangente* in p ad una superficie caratteristica.

Osservazioni 1.10.

(1) Lavorando su superfici caratteristiche il teorema di Cauchy-Kovalevskaia non può essere applicato. Questo però non significa automaticamente che il problema di Cauchy sia mal posto. Tuttavia, *indipendentemente dall'applicabilità o meno del teorema detto*, possiamo concludere dai risultati appena ottenuti che il problema di Cauchy (1.22) *non ha alcuna soluzione* quando i dati di Cauchy sono assegnati su una superficie caratteristica Σ , se essi non soddisfano una certa equazione suppletiva. Infatti, passando a coordinate Riemanniane in modo che l'equazione differenziale si possa scrivere come in (1.24), il fatto che Σ sia caratteristica e che quindi $a^{tt}(0, \boldsymbol{\xi}) = 0$, implica che l'equazione in (1.24) si riduca, per $t = 0$, a:

$$\sum_{i=2}^n 2a^{it}(0, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial u'_1}{\partial \xi^i} + \sum_{i,j=2}^n a^{ij}(0, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^2 u'_0}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \Phi' \left(0, \boldsymbol{\xi}, u'_0(\boldsymbol{\xi}), u'_1(\boldsymbol{\xi}), \frac{\partial u'_0}{\partial \xi^2}, \dots, \frac{\partial u'_0}{\partial \xi^n} \right) = 0.$$

Si osservi che questa condizione coinvolge unicamente quantità assegnate e non la soluzione, incognita, dell'equazione. Se questa equazione non è soddisfatta dalle condizioni di Cauchy non

può, evidentemente, esserci alcuna soluzione del problema di Cauchy.

(2) Mostriamo ora, con un esempio elementare, che viceversa vi sono casi in cui assegnare dati di Cauchy su superfici caratteristiche per un'equazione iperbolica comporta che esistano *infinite soluzioni* al problema posto. Consideriamo il problema di Cauchy per $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ dove \mathbb{R}^2 ha coordinate standard (x, y) :

$$\begin{cases} u_{xy} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u_y(x, 0) = u_1(x), \end{cases} \quad (1.29)$$

dove $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ e $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ sono assegnate.

La matrice caratteristica A dell'equazione considerata è simmetrica, costante e vale a meno di un fattore moltiplicativo inessenziale:

$$A(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di A sono ± 1 . Questo significa che esiste una matrice ortogonale R , 2×2 , reale tale che:

$$RAR^t = \text{diag}(1, -1).$$

Di conseguenza l'equazione è ovunque di tipo iperbolico normale. Le superfici caratteristiche sono ora *curve caratteristiche*. Determiniamole. Consideriamo la solita funzione $S = S(x, y)$ i cui zeri determinano le curve caratteristiche. L'equazione (1.28) si riduce ora a:

$$\frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial y} = 0.$$

La soluzione $S = \text{costante}$ non determina alcuna caratteristica in quanto l'insieme $S(x, y) = 0$ è vuoto se la costante è non nulla, oppure è tutto \mathbb{R}^2 se la costante è nulla, ma in tale caso $dS = 0$ ovunque. Pertanto deve essere $S = S_1(x)$ con $dS_1/dx \neq 0$ sull'insieme:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid S_1(x) = 0\},$$

oppure $S = S_2(y)$ con $dS_2/dy \neq 0$ sull'insieme:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid S_2(y) = 0\}.$$

In particolare, per ogni coppia di costanti $c, d \in \mathbb{R}$, le funzioni $S_1(x) = x - c$ e $S_2(y) = y - d$ soddisfano le condizioni poste. In definitiva le rette $x = \text{costante}$ e $y = \text{costante}$ sono curve caratteristiche.

In particolare la retta $y = 0$ è una curva caratteristica e pertanto le condizioni di Cauchy del problema (1.29) sono assegnate su una superficie caratteristica.

La soluzione generale dell'equazione $u_{xy} = 0$ in \mathbb{R}^2 con $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ è (provarlo per esercizio):

$$u(x, y) = f(x) + g(y),$$

dove $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ sono funzioni arbitrarie. Pertanto ogni eventuale soluzione di (1.29) si deve ricondurre a questa forma. In particolare dovrà essere:

$$u(x, 0) = f(x) + g(0) = u_0(x), \quad (1.30)$$

$$u_y(x, 0) = g'(0) = u_1(x). \quad (1.31)$$

Concludiamo immediatamente da (1.31) che: *se u_1 non è una funzione costante, allora il problema di Cauchy (1.29) non ha soluzioni.*

Tuttavia, nel caso in cui u_1 sia una funzione costante, il problema (1.29) ha *infinite* soluzioni. Infatti ogni funzione della forma:

$$u(x, y) = u_1 y + h(y) + u_0(x),$$

per $h \in C^2(\mathbb{R})$ *arbitrariamente* scelta purché $h(0) = 0$ e $h'(0) = 0$, risolve il problema di Cauchy (1.29).

Esempi 1.2.

(1) Consideriamo l'equazione delle onde su \mathbb{R}^n , con velocità di propagazione delle onde data dalla costante $c > 0$:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta u = 0.$$

Le coordinate su \mathbb{R}^n sono state decomposte come: $x = (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. L'equazione è scritta in forma normale rispetto alla variabile t nel modo seguente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u.$$

Ci si aspetta pertanto, che assegnando come dati di Cauchy $u(0, \mathbf{x})$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(0, \mathbf{x})$ esista una soluzione (ed una sola) del problema. Questo accade effettivamente, quando i dati di Cauchy sono in una determinata classe di funzioni. Passiamo a studiare le superfici caratteristiche sulle quali il problema di Cauchy è, in generale, mal posto. Per $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^n$ fissato, si consideri la superficie conica di vertice (t_0, \mathbf{x}_0) :

$$\Gamma_{(t_0, \mathbf{x}_0)} := \{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n \mid c^2(t - t_0)^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2\}.$$

Posto $S(t, x) = c^2(t - t_0)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2$, abbiamo che il luogo dei punti (t, \mathbf{x}) per cui $S(t, \mathbf{x}) = 0$ coincide con $\Gamma_{(t_0, \mathbf{x}_0)}$, inoltre

$$dS = 2c^2(t - t_0)dt + 2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{x}$$

non si annulla su $\Gamma_{(t_0, \mathbf{x}_0)} \setminus \{(t_0, \mathbf{x}_0)\}$. Infine, se a^{ij} definiscono la matrice caratteristica dell'equazione delle onde, si ha che:

$$\sum_{ij=1}^n a^{ij} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^j} = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + \sum_{i=2}^n \left(\frac{\partial S}{\partial x^i} \right)^2 = -4c^2(t - t_0)^2 + 4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2,$$

si annulla esattamente su $\Gamma_{(t_0, \mathbf{x}_0)}$. Concludiamo che $\Gamma_{(t_0, \mathbf{x}_0)} \setminus \{(t_0, \mathbf{x}_0)\}$ è una superficie caratteristica dell'equazione delle onde. Tale superficie è detta *cono di luce* di vertice (t_0, \mathbf{x}_0) .

È importante precisare che i coni di luce non sono le sole superfici caratteristiche dell'equazione delle onde. Altre semplici superfici caratteristiche sono date dai piani di equazione

$$ct + \mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = d,$$

dove il vettore costante $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n-1}$ soddisfa $\|\mathbf{b}\| = 1$ e $d \in \mathbb{R}$ è arbitrario. La funzione S in questo caso è banalmente:

$$S(t, \mathbf{x}) := ct + \mathbf{x} \cdot \mathbf{b} - d.$$

(2) Le equazioni ovunque di tipo ellittico in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ed in particolare l'equazione di Poisson e quella di Laplace *non ammettono superfici caratteristiche*. Infatti, essendo la matrice dei coefficienti a^{ij} definita positiva, l'equazione (1.28) ammette come unica soluzione:

$$\frac{\partial S}{\partial x^i} = 0, \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, n,$$

per cui, di conseguenza $dS = 0$ ovunque sul dominio di S . La non esistenza di superfici caratteristiche non significa, come già sottolineato, che i problemi di Cauchy siano sempre ben posti.

(3) Se $\Omega := \mathbb{R}^n$, consideriamo infine l'equazione del calore:

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + a^2 \Delta u = q.$$

dove $a > 0$ è una costante e $q = q(t, \mathbf{x})$ una funzione assegnata. Sopra le coordinate su \mathbb{R}^n sono ancora state decomposte come: $x = (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. In questo caso, la (1.28) si riduce a:

$$\sum_{i=2}^n \left(\frac{\partial S}{\partial x^i} \right)^2 = 0,$$

che ammette come soluzione ogni funzione regolare $S = S(t)$. In particolare, per ogni fissata costante $c \in \mathbb{R}$, la funzione $S(t, \mathbf{x}) = t - c$ soddisfa tutti i requisiti per definire superfici caratteristiche. Concludiamo che i piani $t = \text{costante}$ sono superfici caratteristiche dell'equazione del calore.

Considerando equazioni di tipo iperbolico, si può formulare il problema analogo a quello di Cauchy, ma con una sola condizione iniziale (tipicamente la restrizione della funzione incognita ad una superficie) ed assegnata su una superficie caratteristica. Questo problema viene detto *problema di Cauchy caratteristico* oppure *problema di Goursat*. Si tratta di un problema il cui studio è piuttosto difficile e sul quale esistono pochi risultati generali.

Capitolo 2

Equazioni Ellittiche e funzioni armoniche in \mathbb{R}^n : risultati elementari.

In questo capitolo affronteremo il problema della ricerca delle soluzioni di una certa classe di equazioni differenziali alle derivate parziali ellittiche e dello studio di alcune delle loro proprietà.

2.1 Il problema fisico dell'elettrostatica e le equazioni di Poisson e Laplace.

Noi ci occuperemo dell'analisi matematica del problema fondamentale dell'elettrostatica. Il *regime elettrostatico* si ottiene studiando il campo \mathbf{E} unicamente tramite le prime due equazioni di Maxwell. In tale ambito si assume che \mathbf{E} unitamente a ρ , pensata come funzione assegnata, ed al campo \mathbf{B} (che in tal modo sparisce dalle equazioni suddette) siano funzioni *indipendenti dal tempo*.

Consideriamo un insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ non vuoto e connesso (anche se alcuni teoremi che dimostreremo in seguito sono validi anche se Ω non è connesso). La seconda equazione di Maxwell in forma integrale, se si assume $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x})$ di classe $C^0(\Omega)$, assicura che \mathbf{E} sia conservativo. Pertanto, in queste ipotesi esisterà una funzione $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^1(\Omega)$, determinata a meno di costanti additive, tale che:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla_{\mathbf{x}}\varphi . \quad (2.1)$$

Osservazioni 2.1. La seconda equazione in forma differenziale porta allo stesso risultato se si assume che \mathbf{E} sia $C^1(\Omega)$ e che Ω sia *semplicemente connesso* (per esempio $\Omega = \mathbb{R}$). Questo fatto mostra che le equazioni di Maxwell differenziali implicano la validità di quelle integrali solo sotto opportune ipotesi topologiche sul dominio spaziale Ω .

La funzione φ è detta **potenziale elettrostatico**. Determinare φ significa determinare \mathbf{E} , pertanto passiamo a studiare φ che, essendo un campo scalare, è più facile da maneggiare di un campo vettoriale quale è \mathbf{E} . Supponiamo di conoscere la densità di carica elettrica in Ω , descritta da una funzione $\rho \in C^0(\Omega)$. Se assumiamo che φ sia di classe $C^2(\Omega)$ (cioè \mathbf{E} di classe $C^1(\Omega)$), la prima equazione di Maxwell in forma differenziale, tenuto conto della (2.1) ed del fatto che

$$\nabla \cdot \nabla = \Delta,$$

implica immediatamente che φ soddisfi su Ω l'**equazione di Poisson**

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \quad \text{ossia} \quad \sum_{i,j=1}^3 \delta^{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x^i \partial x^j} = -4\pi\rho. \quad (2.2)$$

Tale equazione è un tipico esempio di equazione ellittica, infatti la forma quadratica associata al termine del secondo ordine è costantemente definita positiva.

In particolare se la densità di carica è nulla in tutti i punti della regione Ω , cioè $\rho = 0$, allora l'equazione (2.2) diviene l'**equazione di Laplace**:

$$\Delta\varphi = 0. \quad (2.3)$$

Come già detto, la conoscenza del potenziale φ comporta anche la conoscenza del campo elettrico e quindi la soluzione del nostro problema. Le tre domande fondamentali alle quali un fisico vorrebbe avere risposta (dai matematici) sono: data una generica densità di carica $\rho \in C^0(\Omega)$, esiste la soluzione dell'equazione (2.2)? È unica? Come possiamo calcolarla?

Per dare una risposta positiva alle prime due domande (esistenza e unicità) è necessario fare delle ipotesi sulla struttura della regione Ω e imporre delle condizioni aggiuntive che il potenziale φ dovrà soddisfare: le *condizioni al contorno*. Abbiamo già detto (e lo proveremo esplicitamente tra poco) che non possiamo dare condizioni di Cauchy complete perché il problema risulta, in generale essere malposto. Dobbiamo pertanto "indebolire" le condizioni assegnate nel problema di Cauchy. Ci sono diversi modi di far ciò. Vediamo i due esempi più importanti.

Problema di Dirichlet. Risolvere il problema di Dirichlet significa risolvere l'equazione di Poisson su una regione Ω , insieme aperto a chiusura compatta imponendo i valori che il potenziale φ deve assumere sul bordo $\partial\Omega$ di Ω :

$$\begin{cases} \Delta\varphi = f & \text{su } \Omega, \\ \varphi|_{\partial\Omega} = \varphi_0 & \text{(assegnato)}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Osservazioni 2.2.

(1) Una tipica situazione fisica il cui è necessario risolvere un problema di Dirichlet è quella in cui $\partial\Omega$ è una superficie conduttrice, sulla quale il potenziale elettrico ha un valore costante che può essere assegnato arbitrariamente dall'esterno collegando la superficie ad una batteria e in Ω è anche presente una densità di carica $\rho = f/4\pi$ assegnata. Vedremo che in questo caso la soluzione φ del problema è unica, e quindi il campo $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ è unicamente determinato.

(2) C'è anche un altro caso fisicamente importante in cui rientra l'equazione di Laplace. Si tratta del caso in cui si vuole determinare la temperatura T in un mezzo omogeneo di volume Ω limitato (pensato come un aperto a chiusura compatta di \mathbb{R}^3), quando è tenuta fissa tramite termostati, ed è nota, la temperatura al contorno del mezzo $\partial\Omega$ e il sistema fisico si trova in situazione di regime (non ci sono più variazioni di temperatura nel tempo). In tal caso, all'interno di Ω , la temperatura T soddisfa l'equazione di Laplace e pertanto il problema fisico si riduce ad un problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta T = 0 & \text{su } \Omega, \\ T|_{\partial\Omega} = T_0 & \text{(funzione assegnata)}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Questa situazione si ha, nella pratica, quando si deve progettare un forno scaldato tramite le pareti, oppure nei problemi in cui si vuole ottimizzare la cottura di qualche cibo o materiale scaldandolo attraverso la superficie esterna.

Problema di Neumann. Risolvere il problema di Neumann significa risolvere l'equazione di Poisson su una regione Ω , con Ω aperto a chiusura compatta e bordo $\partial\Omega$ regolare, imponendo i valori che la derivata normale alla superficie potenziale $\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} = \nabla\varphi \cdot \mathbf{n}$ deve assumere sul bordo $\partial\Omega$ di Ω :

$$\begin{cases} \Delta\varphi = f & \text{su } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \varphi_1 & \text{(assegnato)}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Osservazioni 2.3.

(1) Notiamo che nei problemi di elettrostatica $-\nabla\varphi \cdot \mathbf{n}$ è la componente del campo elettrico ortogonale alla superficie $\partial\Omega$.

(2) Una tipica situazione fisica il cui è necessario risolvere un problema di Neumann è quella in cui $\partial\Omega$ è una superficie conduttrice ed è anche presente in Ω una densità di carica $\rho = -f/4\pi$ assegnata. (In tal caso si dimostra che il campo elettrico è sempre ortogonale a $\partial\Omega$ ed è proporzionale alla densità di carica superficiale su $\partial\Omega$).

Vedremo che per il problema di Neumann, se esiste la soluzione φ , essa è unica *a meno di una costante additiva*. Nel caso in cui φ rappresenti il campo elettrico $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, ne consegue che esso è *comunque* unicamente determinato perché non risente della costante additiva con cui è indeterminato φ .

2.2 Principio del massimo per funzioni armoniche e principio del massimo generalizzato.

2.2.1 Funzione armoniche e sub armoniche in \mathbb{R}^n .

Le funzioni reali di classe C^2 che soddisfano l'equazione di Laplace, anche in dimensione maggiore di 3, sono di grandissima rilevanza in matematica, per le loro molteplici proprietà analoghe a quelle delle funzioni analitiche (*olomorfe*) complesse di variabile complessa [ST84, Ru82]. Queste

funzioni sono dette *funzioni armoniche*.

Definizione 2.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto e $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. φ è detta **armonica** se $\varphi \in C^2(\Omega)$ e soddisfa $\Delta\varphi = 0$ in Ω . \diamond

Le funzioni *subarmoniche* hanno minor rilevanza ma sono un utile strumento tecnico in alcune dimostrazioni.

Definizione 2.2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto e $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. φ è detta **subarmonica** se $\varphi \in C^2(\Omega)$ e soddisfa $\Delta\varphi \geq 0$ in Ω . \diamond

Osservazioni 2.4. A volte si richiede che l'insieme aperto non vuoto Ω sul quale sono definite le funzioni armoniche e sub armoniche sia anche connesso. Noi non faremo questa assunzione dato che non è strettamente necessaria. Quando essa risulterà necessaria ci ridurremo a lavorare in una componente connessa di Ω .

Esempi 2.1.

1. In dimensione $n = 1$ le funzioni armoniche sono tutte e sole le funzioni che si restringono a funzioni lineari (non necessariamente omogenee) su ogni componente connessa del dominio. Infatti gli aperti sono unioni di aperti connessi e gli aperti connessi di \mathbb{R} sono gli intervalli aperti (a, b) , inoltre, se su (a, b) vale, per $\varphi \in C^2((a, b))$:

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) = 0$$

allora, integrando,

$$\frac{d}{dx}\varphi(x) = m \quad \text{costante,}$$

per cui, per qualche costante $q \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = mx + q, \quad \text{per ogni } x \in (a, b).$$

Viceversa ogni funzione lineare su (a, b) è sicuramente di classe $C^2((a, b))$ ed ha derivata seconda nulla. Su ogni componente connessa di un aperto non vuoto $\Omega \subset \mathbb{R}$, ogni funzione armonica su Ω è una funzione lineare e in generale non omogenea. Si osservi che le costanti m, q possono essere diverse a seconda della componente connessa di Ω considerata.

Per $n = 1$, le funzioni subarmoniche sono invece le funzioni di classe C^2 definite in aperti non vuoti e ivi *convesse*.

2. Sia $n = 2$. Esiste un legame interessante tra funzioni analitiche complesse e funzioni reali armoniche. Si consideri $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ con $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, f è detta **analitica** oppure, indifferentemente, **olomorfa**¹ su Ω , se per ogni $z_0 \in \Omega$ la funzione f ammette sviluppo di Taylor centrato

¹Il fatto che esistano due nomi per la stessa classe di funzioni è dovuto al particolare percorso storico che la teoria delle funzioni di variabile complessa ha seguito. Inizialmente si davano due differenti definizioni per le funzioni olomorfe e per quelle analitiche, più tardi è stato dimostrato che si tratta della stessa classe di funzioni.

in z_0 e convergente a f in un intorno aperto di z_0 . L'esistenza della serie di Taylor necessita in particolare dell'esistenza della derivata:

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}, \quad (2.7)$$

per ogni $z_0 \in \Omega$. Il limite è definito nella topologia di \mathbb{R}^2 : per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. se $|z - z_0| < \delta$ allora:

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon,$$

e quindi è uniforme in tutte le direzioni. In particolare quindi, se $f'(z_0)$ esiste nel senso scritto sopra, può essere calcolata derivando lungo una fissata direzione. Decomponendo (2.7) in parte reale ed immaginaria, si può scrivere:

$$z = x + iy \in \Omega, \quad f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

dove $u, v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sono la parte reale e immaginaria della funzione f che risultano essere funzioni (infinitamente) differenziabili, come si prova subito tenendo conto che se f è (infinitamente) differenziabile lo è anche la funzione complessa coniugata \bar{f} e valgono le relazioni $u(x, y) = (f(x + iy) + \overline{f(x + iy)})/2$ e $v(x, y) = (f(x + iy) - \overline{f(x + iy)})/(2i)$. Tenendo conto dell'indipendenza direzionale del limite per calcolare $f'(z_0)$, abbiamo:

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + h) - f(x_0 + iy_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + ih) - f(x_0 + iy_0)}{ih},$$

Sostituendo la decomposizione di f in parte reale ed immaginaria, abbiamo dunque l'identità :

$$\frac{\partial}{\partial x} (u(x, y) + iv(x, y)) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} (u(x, y) + iv(x, y)),$$

dove le derivate sono calcolate nel generico punto $(x_0, y_0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. Tenendo conto che u e v sono reali, raccogliendo separatamente parte reale ed immaginaria nell'identità trovata, abbiamo immediatamente che devono valere le **condizioni di Cauchy-Riemann**:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \text{per ogni } (x, y) \in \Omega. \quad (2.8)$$

Abbiamo infine direttamente dalle condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0.$$

Concludiamo che la parte reale ed immaginaria di ogni funzione olomorfa è una funzione armonica.

3. In dimensione $n > 1$ le funzioni armoniche sono moltissime. Alcuni polinomi di grado n

sono armonici in dimensione $n > 1$: $P(x^1, \dots, x^n) = x^1 \cdots x^n$. Vi sono anche funzioni non polinomiali, come per esempio, se $n > 1$:

$$\varphi(x^1, \dots, x^n) = \sin(\sqrt{n-1}x^1) \sinh(x^2 + \cdots + x^n).$$

Osservazioni 2.5.

(1) Si può dimostrare che condizione necessaria e sufficiente – e la sufficienza è uno dei risultati più notevoli della teoria delle funzioni analitiche complesse – affinché $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, con $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto non vuoto, sia olomorfa su Ω è che, per ogni $z_0 \in \Omega$, esista la derivata $f'(z_0)$, definita in (2.7).

(2) Si può provare [ST84], in riferimento a $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, con $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto non vuoto, che f è olomorfa in Ω se e solo se la sua parte reale ed immaginaria u e v soddisfano: (i) $u, v \in C^1(\Omega)$ (pensando Ω come sottoinsieme di \mathbb{R}^2) unitamente a (ii) le condizioni di Cauchy-Riemann (2.8) su Ω .

(3) Le funzioni olomorfe sono molto comuni: tutti i polinomi della variabile $z \in \mathbb{C}$ sono funzioni olomorfe su \mathbb{C} , i rapporti tra polinomi sono funzioni olomorfe su tutto \mathbb{C} escludendo gli zeri del polinomio a denominatore. Vi sono poi funzioni olomorfe definite sommando serie che estendono nel piano complesso funzioni reali di variabile reale. Per esempio:

$$e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

estende a valori complessi la funzione esponenziale $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x$ definendo una funzione olomorfa su tutto il piano complesso. Nello stesso modo, cioè usando la stessa serie di Taylor che le definisce nei reali, ma valutandola per valori complessi della variabile, si definiscono le funzioni olomorfe $\sin z$ e $\cos z$ su tutto il piano complesso e si verifica la relazione di Eulero valida per tutti i complessi $z = x + iy \in \mathbb{C}$:

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Sono infine olomorfe le composizioni di funzioni olomorfe. Quindi, per esempio:

$$\mathbb{C} \setminus \{1\} \ni z \mapsto \sin\left(e^{\frac{z^2}{z-1}}\right),$$

è una funzione olomorfa sul dominio indicato.

2.2.2 Principio del massimo (in forma debole).

Nel caso $n = 1$, le funzioni armoniche sono, come visto sopra, della forma $\varphi : (a, b) \ni x \mapsto mx + q$. Notiamo che, nel caso considerato, se estendiamo φ all'intervallo chiuso $[a, b]$, supposto a, b finiti, accade che il massimo ed il minimo di φ sono assunti sul bordo di tale intervallo. Questa è una notevole proprietà delle funzioni armoniche che vale nel caso generale e cade sotto il nome di *principio del massimo* (anche se è un teorema). Si osservi che, sempre nel caso $n = 1$, ogni funzione subarmonica $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (che è convessa come prima precisato), se è estendibile per

continuità ai valori estremi dell'intervallo (a, b) supposto finito, assume valore massimo in uno dei due estremi. Anche questa è una proprietà generale delle funzioni subarmoniche che useremo per provare il principio del massimo per funzioni armoniche e che enunciamo in un unico teorema.

Teorema 2.1. (Principio del massimo). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto con $\bar{\Omega}$ compatto. Sia $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^0(\bar{\Omega})$. Allora vale quanto segue.*

(a) *Se φ è subarmonica in Ω allora:*

$$\max_{\bar{\Omega}} \varphi = \max_{\partial\Omega} \varphi .$$

(b) *Se φ è armonica in Ω allora:*

$$\max_{\bar{\Omega}} \varphi = \max_{\partial\Omega} \varphi , \quad \min_{\bar{\Omega}} \varphi = \min_{\partial\Omega} \varphi \quad e \quad \max_{\bar{\Omega}} |\varphi| = \max_{\partial\Omega} |\varphi| .$$

◇

Dimostrazione. Prima di tutto notiamo che l'ipotesi di compattezza di $\bar{\Omega}$ (e quindi del sottoinsieme chiuso $\partial\Omega$) assicura l'esistenza dei massimi e minimi di cui si parla nella tesi essendo essi relativi a funzioni continue. Supponiamo inizialmente che $\Delta\varphi > 0$ su Ω . Sia $x_0 \in \bar{\Omega}$ un punto di massimo assoluto. Proviamo che $x_0 \in \partial\Omega$ e quindi la validità della tesi (a) nel caso $\Delta\varphi > 0$.

Se per assurdo fosse $x_0 \in \Omega$, allora la matrice hessiana di coefficienti $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} |_{x_0}$ sarebbe semidefinita negativa e quindi la sua traccia sarebbe non positiva: $\Delta\varphi|_{x_0} \leq 0$, che contraddice $\Delta\varphi|_{x_0} > 0$, quindi $x_0 \in \partial\Omega$.

Consideriamo ora il caso $\Delta\varphi \geq 0$ e definiamo la funzione $\tilde{\varphi} = \varphi + \epsilon|x|^2$, dove $\epsilon > 0$. Allora $\Delta\tilde{\varphi} = \Delta\varphi + 2n\epsilon > 0$, quindi applicando il risultato appena dimostrato, si ha per ogni fissato $x \in \bar{\Omega}$:

$$\tilde{\varphi}(x) \leq \max_{\partial\Omega} \tilde{\varphi} \leq \max_{\partial\Omega} \varphi + \epsilon R^2 ,$$

dove $R^2 = \max_{x \in \partial\Omega} |x|^2$. Quindi $\forall x \in \bar{\Omega}$

$$\varphi(x) \leq \varphi(x) + \epsilon|x|^2 \leq \max_{\partial\Omega} \varphi + \epsilon R^2 ,$$

da cui:

$$\varphi(x) \leq \max_{\partial\Omega} \varphi + \epsilon R^2 .$$

Dato che, per ogni fissato $x \in \bar{\Omega}$, ciò vale per ogni $\epsilon > 0$, dovrà anche essere, per quel valore di x :

$$\varphi(x) \leq \max_{\partial\Omega} \varphi$$

da cui segue la tesi in (a). Se φ è armonica allora φ e $-\varphi$ sono subarmoniche, da cui:

$$\max_{\partial\Omega} \varphi = \max_{\bar{\Omega}} \varphi ,$$

$$\min_{\partial\Omega} \varphi = -\max_{\partial\Omega}(-\varphi) = -\max_{\bar{\Omega}}(-\varphi) = \min_{\bar{\Omega}} \varphi.$$

Inoltre, dato che $\max |\varphi| = \max(|\max \varphi|, |\min \varphi|)$ vale anche:

$$\max_{\partial\Omega} |\varphi| = \max_{\bar{\Omega}} |\varphi|.$$

□

2.2.3 Principio del massimo generalizzato.

Mostriamo ora che il teorema precedente si generalizza a funzioni che non sono necessariamente armoniche, ma che sono soluzioni di una particolare classe di equazioni del secondo ordine lineari ed ellittiche.

Teorema 2.2. (Principio del massimo generalizzato). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto con $\bar{\Omega}$ compatto. Sia:*

$$L = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{j=1}^n b^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

un operatore differenziale del secondo ordine tale che:

- (i) la matrice simmetrica dei coefficienti $a^{ij}(x)$ sia ovunque definita positiva per ogni $x \in \Omega$,
- (ii) per qualche $C > 0$ e per qualche $k = 1, \dots, n$ valga $a^{kk}(x) \geq C$ per ogni $x \in \Omega$,
- (iii) per qualche $K \in \mathbb{R}$ e per lo stesso k di (ii) valga $b^k(x) \geq K$ per ogni $x \in \Omega$.

(Le ipotesi (ii) e (iii) sono soddisfatte se le funzioni $x \mapsto a^{ij}(x)$ e $x \mapsto b^j(x)$ si estendono a funzioni continue su tutto $\bar{\Omega}$ e (i) vale su $\bar{\Omega}$.)

Si consideri una funzione $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Allora valgono i fatti seguenti.

(a) Se $L\varphi \geq 0$ su Ω allora:

$$\max_{\bar{\Omega}} \varphi = \max_{\partial\Omega} \varphi$$

(b) Se $L\varphi = 0$ su Ω allora vale, in aggiunta alla precedente, anche:

$$\min_{\bar{\Omega}} \varphi = \min_{\partial\Omega} \varphi \quad e \quad \max_{\bar{\Omega}} |\varphi| = \max_{\partial\Omega} |\varphi|.$$

◇

Dimostrazione. Si procede come nella dimostrazione del teorema precedente. Se vale $L\varphi > 0$ su Ω e $x_0 \in \Omega$ è un punto di massimo assoluto della funzione φ su $\bar{\Omega}$, allora $\nabla\varphi|_{x_0} = 0$ e la matrice di coefficienti $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j}|_{x_0}$ è semidefinita negativa. Dato che la matrice $A(x_0)$ di coefficienti $a^{ij}(x_0)$ è definita positiva, per il teorema di Sylvester, si potrà scrivere come $A(x_0) = DID^t = DD^t$ dove D è una matrice quadrata non singolare. Inoltre, se $H(x_0)$ è la matrice quadrata simmetrica

di coefficienti $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j}|_{x_0}$, si ha (tenendo conto che la parte del prim'ordine di L non fornisce contributo in quanto tutte le derivate prime di φ si annullano in x_0):

$$L\varphi|_{x_0} = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j}|_{x_0} = \text{tr}(A(x_0)H(x_0)) ,$$

per cui:

$$L\varphi|_{x_0} = \text{tr}(DD^t H(x_0)) = \text{tr}(D^t H(x_0)D) .$$

Dato che D è non singolare e $H(x_0)$ è semidefinita negativa, $D^t H(x_0)D$ sarà ancora semidefinita negativa² e quindi avrà autovalori non positivi. La traccia di tale matrice sarà dunque non positiva. In definitiva:

$$L\varphi|_{x_0} = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j}|_{x_0} \leq 0,$$

che è assurdo perché per ipotesi $L\varphi|_{x_0} > 0$.

Assumeremo ora che $k = 1$ verifichi le richieste in (i) e (ii). Ci si può sempre mettere in tale situazione riordinando le coordinate x^1, \dots, x^n . Supponiamo ora che $L\varphi \geq 0$ su Ω e definiamo $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) + \epsilon e^{\gamma x^1}$ con $\gamma > 0$ e $\epsilon > 0$ fissati.

$$L\tilde{\varphi}(x) = L\varphi(x) + \epsilon(\gamma^2 a^{11}(x) + \gamma b^1(x))e^{\gamma x^1} .$$

Se $\gamma > 0$ è abbastanza grande, dato che $a^{11}(x) \geq C > 0$ e $b^1(x) \geq K > -\infty$, allora deve essere $\epsilon(\gamma^2 a^{11}(x) + \gamma b^1(x))e^{\gamma x^1} \geq \epsilon\gamma(\gamma C + K)e^{\gamma x^1} > 0$ su Ω per ogni $\epsilon > 0$. (Si osservi che se le funzioni $x \mapsto a^{ij}(x)$ si estendono a funzioni continue su tutto $\bar{\Omega}$ e (i) vale su tale insieme, allora la definitività positiva di $a^{ij}(x)$ implica, in particolare, che $a^{kk}(x) > 0$ su $\bar{\Omega}$ per ogni k e dunque, data la continuità di a^{kk} , il suo minimo è minorato da qualche $C > 0$ e quindi vale (ii). Se $x \mapsto b^k(x)$ si estende ad una funzione continua su $\bar{\Omega}$ allora è sicuramente limitata su Ω e quindi vale (iii)).

Per la prima parte di questa dimostrazione, abbiamo quindi che:

$$\max_{\bar{\Omega}} \tilde{\varphi} = \max_{\partial\Omega} \tilde{\varphi} ,$$

e allora, per ogni fissato $x \in \bar{\Omega}$:

$$\varphi(x) \leq \tilde{\varphi}(x) \leq \max_{\bar{\Omega}} \tilde{\varphi} \leq \max_{\partial\Omega} \varphi + \epsilon E$$

con $E = \max_{\partial\Omega} e^{\gamma x^1}$. La dimostrazione si conclude come quella del teorema precedente. \square

Osservazioni 2.6. Si noti che non è stata fatta alcuna ipotesi di regolarità sulle funzioni $\Omega \ni x \mapsto a^{ij}(x)$ e $\Omega \ni x \mapsto b^k(x)$ usate nella definizione di L , se non la richiesta che alcune di esse siano limitate dal basso.

²Per ipotesi $u^t H(x_0)u \leq 0$ per ogni $u \in \mathbb{R}^n$, ma dato che $D : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è biettiva, dovrà anche valere: $v^t D^t H(x_0)Dv = (Dv)^t H(x_0)Dv \leq 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$.

2.2.4 Due teoremi di unicità per il problema di Dirichlet dal principio del massimo.

In questa sezione applichiamo il principio del massimo per dimostrare l'unicità delle soluzioni dell'equazione di Poisson (2.2) nel caso del problema di Dirichlet.

Teorema 2.3. (Unicità per il problema di Dirichlet 1). *Si consideri il seguente problema di Dirichlet per la funzione $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, riferita all'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ non vuoto a chiusura compatta:*

$$\begin{cases} \Delta\varphi = f & \text{su } \Omega, \\ \varphi|_{\partial\Omega} = \psi, \end{cases} \quad \varphi \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega), \quad (2.9)$$

con $f \in C^0(\Omega)$, $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ assegnate. Se esiste una soluzione φ al problema posto, questa è unica. \diamond

Dimostrazione. Siano ϕ_1 e ϕ_2 due soluzioni del problema, dimostriamo che la funzione $\phi_1 - \phi_2$ è identicamente nulla: $\phi_1 - \phi_2 = 0$.

$\phi_1 - \phi_2$ è armonica su Ω , infatti $\phi_1 - \phi_2 \in C^2(\Omega)$ e $\Delta(\phi_1 - \phi_2) = 0$ su Ω ; inoltre $(\phi_1 - \phi_2)|_{\partial\Omega} = 0$. Per il principio del massimo

$$\max_{\bar{\Omega}} |\phi_1 - \phi_2| = \max_{\partial\Omega} |\phi_1 - \phi_2| = 0,$$

da cui $\phi_1 = \phi_2$ su $\bar{\Omega}$. \diamond

Osservazioni 2.7.

(1) Notare che nel teorema precedente non abbiamo fatto alcuna ipotesi sulla regolarità di $\partial\Omega$, in particolare non è necessario che $\partial\Omega$ sia una superficie regolare. Non è necessario inoltre supporre che Ω sia connesso.

(2) Se tuttavia assumiamo che $\partial\Omega$ sia regolare e quindi abbia senso calcolare la derivata normale $\mathbf{n} \cdot \nabla\varphi|_{\partial\Omega}$ possiamo studiare il problema di Cauchy in Ω , cercando funzioni $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ che risolvano $\Delta\varphi = f$ in Ω , con i soliti *due* dati di Cauchy assegnati su $\partial\Omega$: $\psi_0 = \varphi|_{\partial\Omega}$ e $\psi_1 = \mathbf{n} \cdot \nabla\varphi|_{\partial\Omega}$ ed interpretati come *condizioni iniziali*.

Il teorema di unicità provato implica che tale problema di Cauchy (quindi con *due* dati iniziali) sia *malposto nel senso di Hadamard* perché viola la prima richiesta, quella di esistenza delle soluzioni: esistono necessariamente coppie di condizioni iniziali ψ_0, ψ_1 alle quali *non* corrisponde alcuna soluzione di $\Delta\varphi = f$.

Infatti, se consideriamo due coppie di dati di Cauchy ψ_0, ψ_1 e ψ'_0, ψ'_1 con $\psi_0 = \psi'_0$ ma $\psi_1 \neq \psi'_1$ e ammettiamo che entrambi ammettano soluzione, rispettivamente φ e φ' in $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, la funzione $\phi := \varphi' - \varphi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ soddisfa $\Delta\phi = 0$ e $\phi|_{\partial\Omega} = 0$ e per il teorema provato deve quindi coincidere con la funzione identicamente nulla su Ω , e quindi su $\bar{\Omega}$ per continuità, dato che tale funzione soddisfa le stesse condizioni. Ma allora dovrebbe essere $\mathbf{n} \cdot \nabla\phi|_{\partial\Omega} = 0$ e cioè $\psi_1 = \psi'_1$ che è stato escluso per ipotesi.

(3) Si supponga di essere riusciti a provare, e questo è possibile sotto opportune ipotesi di regolarità di $\partial\Omega$, che Ω ed f del teorema precedente sono tali che, per ogni $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ esista una soluzione (e dunque una *sola* soluzione) φ del problema di Dirichlet $\Delta\varphi = f$ con f assegnata. In questo caso si sarebbe tentati di concludere che il problema di Dirichlet sia ben posto nel senso di Hadamard, *considerando la sola condizione al bordo di Dirichlet*, quando si dota lo spazio delle condizioni iniziali e lo spazio delle soluzioni della topologia metrica indotta dalla norma $\|\cdot\|_\infty$ (vedi la sezione 1.1.3). Infatti, per ogni dato di Dirichlet sul bordo $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ avremmo (a) una soluzione $\varphi[\psi] \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ (b) tale soluzione sarebbe unica e (c) essa soddisferebbe anche $\|\varphi[\psi] - \varphi[\psi']\|_\infty \leq \|\psi - \psi'\|_\infty$ come segue subito dal principio del massimo e dalla linearità dell'equazione differenziale. Da tale disuguaglianza segue la continuità della funzione $\psi \mapsto \varphi[\psi]$ nelle topologie considerate.

Se si accetta come topologia nello spazio delle soluzioni quella indotta da $\|\cdot\|_\infty$ quanto detto è vero. In realtà si potrebbe anche sostenere che la topologia della norma $\|\cdot\|_\infty$ non sia molto appropriata nello spazio delle soluzioni, dato che non considera le derivate delle funzioni φ che sono considerate nell'equazione stessa (in linea di principio, si potrebbe avere una successione di dati al bordo che tende a zero nella topologia della norma $\|\cdot\|_\infty$ (cioè uniformemente), mentre le derivate delle soluzioni associate non tendono ad alcun limite).

Con la stessa dimostrazione del teorema precedente, ma usando il principio del massimo generalizzato si dimostra facilmente il seguente teorema più generale.

Teorema 2.4. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto con $\bar{\Omega}$ compatto. Sia:*

$$L = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{j=1}^n b^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

un operatore differenziale del secondo ordine su Ω tale che:

- (i) la matrice simmetrica dei coefficienti $a^{ij}(x)$ sia ovunque definita positiva per ogni $x \in \Omega$,
- (ii) per qualche $C > 0$ e qualche $k = 1, \dots, n$ valga $a^{kk}(x) \geq C$ per ogni $x \in \Omega$,
- (iii) per qualche $K \in \mathbb{R}$ e lo stesso k di (ii), valga $b^k(x) \geq K$ per ogni $x \in \Omega$

(Le ipotesi (ii) e (iii) sono soddisfatte se le funzioni $x \mapsto a^{ij}(x)$ e $x \mapsto b^j(x)$ si estendono a funzioni continue su tutto $\bar{\Omega}$ e (i) vale su $\bar{\Omega}$.)

Si consideri il problema di Dirichlet per $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} L\varphi = f & \text{su } \Omega, \\ \varphi|_{\partial\Omega} = \psi, \end{cases} \quad \varphi \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega), \quad (2.10)$$

con $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ e f assegnate. Se esiste una soluzione al problema posto, questa è unica. \diamond

Passiamo a provare un teorema di unicità della soluzione del problema di Dirichlet su una regione non limitata (problema di Dirichlet *esterno*) nell'ipotesi che la soluzione φ tenda a 0 quando $x \rightarrow \infty$ *uniformemente* (nelle possibili direzioni), in altre parole, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $R_\epsilon > 0$

tale che $|\varphi(x)| < \epsilon$ se $\|x\| > R_\epsilon$.

Teorema 2.5. (Unicità per il problema di Dirichlet 2). *Se $\Omega \neq \emptyset$ è un aperto di \mathbb{R}^n a chiusura compatta, si consideri il problema di Dirichlet per $\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, dove vale $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}) \cap C^0(\overline{\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}})$:*

$$\begin{cases} \Delta\varphi = f & \text{su } \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \\ \varphi|_{\partial\Omega} = \psi, & \varphi \rightarrow 0 \text{ uniformemente quando } x \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.11)$$

dove $f \in C^0(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ e $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ sono funzioni assegnate.

Se esiste una soluzione essa è unica. \diamond

Dimostrazione. Sia B_R una palla di raggio $R > 0$ centrata nell'origine di \mathbb{R}^n e contenente $\overline{\Omega}$ (notare che esiste dato che $\overline{\Omega}$ è un compatto in \mathbb{R}^n ed è quindi limitato). Siano ϕ_1 e ϕ_2 due soluzioni del problema (2.11) tendenti uniformemente a 0 quando $x \rightarrow \infty$. Allora $\phi_1 - \phi_2 = 0$ su $\partial\Omega$ e $|\phi_1 - \phi_2|_{\partial B_R} \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$ uniformemente. $\phi_1 - \phi_2$ inoltre è armonica in $B_R \setminus \overline{\Omega}$, per cui, fissato $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$,

$$|\phi_1(x) - \phi_2(x)| \leq \max_{\partial\Omega \cup \partial B_R} |\phi_1 - \phi_2| = \max_{\partial B_R} |\phi_1 - \phi_2| \rightarrow 0 \quad \text{se } R \rightarrow \infty.$$

Ciò prova che $\phi_1(x) = \phi_2(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. \square

Osservazioni 2.8. Anche in questo caso, nello stesso modo, ma usando il principio del massimo generalizzato possiamo provare il seguente teorema più generale.

Teorema 2.6. *Se $\Omega \neq \emptyset$ è un aperto di \mathbb{R}^n a chiusura compatta e si consideri il problema di Dirichlet per $\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, dove vale $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}) \cap C^0(\overline{\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}})$:*

$$\begin{cases} L\varphi = f & \text{su } \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}, \\ \varphi|_{\partial\Omega} = \psi, & \varphi \rightarrow 0 \text{ uniformemente quando } x \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.12)$$

dove $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ e f sono assegnate e

$$L = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{k=1}^n b^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

è un operatore differenziale del secondo ordine tale che:

(i) la matrice simmetrica dei coefficienti $a^{ij}(x)$ sia ovunque definita positiva per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$,

(ii) per qualche $C > 0$ e per qualche $k = 1, \dots, n$ valga $a^{kk}(x) \geq C$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ e $k = 1, 2, \dots, n$,

(iii) per qualche $K \in \mathbb{R}$ e lo stesso k di (ii) valga $b^k(x) \geq K$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$.

Se esiste una soluzione essa è unica. \diamond

2.3 Le identità di Green e le loro conseguenze elementari.

In questa sezione introduciamo delle formule utili dette di *identità di Green*, che hanno alcune importanti conseguenze sulle funzioni armoniche e sulle soluzioni dell'equazione di Poisson.

2.3.1 Identità di Green.

Diamo la forma delle identità di Green. Le ipotesi non sono il caso più generale possibile.

Teorema 2.7. *Sia $V \subset \mathbb{R}^n$ aperto, la cui chiusura \bar{V} sia compatta e tale che il suo bordo ∂V sia una superficie regolare (di dimensione $n - 1$) orientabile. Siano $\phi, \psi : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni di classe $C^1(\bar{V})$. Allora valgono le due **identità di Green**, dove \mathbf{n} è il versore normale a ∂V orientato in modo uscente:*

$$\int_V \phi \Delta \psi d^n x + \int_V \nabla \phi \cdot \nabla \psi d^n x = \oint_{\partial V} \phi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.13)$$

se $\psi \in C^2(V)$,

$$\int_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) d^n x = \oint_{\partial V} (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.14)$$

se $\psi, \phi \in C^2(V)$.

Gli integrali $\int_V \phi \Delta \psi d^n x$ e $\int_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) d^n x$ sono da intendersi nel caso generale come integrali impropri di Riemann, oppure come integrali nel senso di Lebesgue, qualora le funzioni integrande siano (assolutamente) integrabili nel senso di Lebesgue. \diamond

Dimostrazione. La prima identità di Green (2.13) si ottiene applicando la formula di Gauss alla funzione $\phi \nabla \psi : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (che soddisfa le ipotesi per applicare il teorema di Gauss su Ω). La tesi segue subito dall'identità:

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \Delta \psi.$$

La seconda identità di Green (2.14) si ottiene dalla (2.13), scritta due volte invertendo, la seconda volta, il ruolo di ψ e ϕ e sottraendo membro a membro i risultati. \square

2.3.2 Conseguenze del teorema di Gauss e delle identità di Green: teorema di unicità per il problema di Neumann.

Vediamo ora altre proprietà delle funzioni armoniche e delle soluzioni dell'equazione di Poisson che derivano dal teorema di Gauss e dalle identità di Green.

Teorema 2.8. *Sia φ armonica in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ non vuoto aperto.*

Allora, per ogni superficie regolare $S \subset \Omega$ che sia il bordo orientabile di un aperto $V \subset \Omega$ con $\bar{V} \subset \Omega$ compatto, vale:

$$\oint_S \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

dove \mathbf{n} è il versore normale uscente alla superficie S . Il risultato vale considerando anche il caso limite $S = \partial\Omega$ se $\bar{\Omega}$ è compatto, S regolare e $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$. \diamond

Dimostrazione. Dato che $\varphi \in C^2(\Omega)$, possiamo applicare la formula di Gauss al volume $V \subset \Omega$ con $\partial V = S \subset \Omega$:

$$\oint_S \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \nabla\varphi d^n x = \int_V \Delta\varphi d^n x = 0.$$

Il caso limite segue nello stesso modo sempre dal teorema di Gauss. \square

Conseguenza delle identità di Green è il seguente teorema di unicità della soluzione del problema di Neumann. Ricordiamo preventivamente un lemma.

Lemma 2.1. *Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile sull'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e per ogni punto di Ω vale $\nabla f = 0$ su Ω allora f è costante su ogni componente connessa di Ω . \diamond*

Dimostrazione. Ogni componente connessa di un aperto è un insieme aperto connesso. Ogni insieme aperto connesso di \mathbb{R}^n è connesso per archi differenziabili a tratti. Sia Ω_0 una componente connessa di Ω e $p, q \in \Omega_0$. Sia infine $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega_0$ una curva differenziabile a tratti tale che $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$ e $\gamma([a, b]) \subset \Omega_0$. La funzione continua $g(t) := f(\gamma(t))$ per $t \in [a, b]$ è differenziabile a tratti e, nelle nostre ipotesi, su ogni sottointervallo di differenziabilità di γ vale anche: $g'(t) = \dot{\gamma}(t) \cdot \nabla f(\gamma(t)) = 0$. Ne consegue che $g'(t)$ esiste ed è nulla per ogni $t \in [a, b]$. Il teorema di Lagrange implica allora che g è costante ed in particolare $f(p) = g(a) = g(b) = f(q)$. L'arbitrarietà dei punti $p, q \in \Omega_0$ implica che f è costante su Ω_0 . \square

Teorema 2.9. (Unicità per il problema di Neumann 1). *Si consideri il seguente problema di Neumann per la funzione $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} \Delta\varphi = f & \text{su } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \psi \end{cases} \quad \varphi \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \quad (2.15)$$

con $f \in C^0(\Omega)$, $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ assegnate, per $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, connesso, con chiusura $\bar{\Omega}$ compatta e $\partial\Omega$ superficie $n-1$ dimensionale regolare e orientabile e \mathbf{n} è il versore normale uscente. Allora, se esiste una soluzione φ al problema posto, questa è unica a meno di costanti additive. \square

Dimostrazione. Siano ϕ_1 e ϕ_2 due soluzioni del problema, dimostriamo che la funzione $u = \phi_1 - \phi_2$ è costante. Per dimostrare ciò, notiamo inizialmente che $\phi_1 - \phi_2$ è armonica su Ω , infatti $\phi_1 - \phi_2 \in C^2(\Omega)$ e $\Delta(\phi_1 - \phi_2) = 0$ su Ω . Applicando la prima identità di Green:

$$0 = \int_{\Omega} u \Delta u d^n x = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u d^n x + \oint_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} dS.$$

Dato che, nelle nostre ipotesi $\frac{\partial\phi_1 - \phi_2}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0$ ossia $\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0$, l'identità di sopra implica:

$$\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 d^n x = 0,$$

e dunque, essendo ∇u continua, $\nabla u = 0$ su Ω . Concludiamo che, su ogni componente connessa di Ω , u deve essere costante. Questo implica immediatamente la tesi. \square

Osservazioni 2.9. Si consideri il problema di Neumann (2.15). Notiamo che dalla formula di Gauss applicata al campo vettoriale $\nabla\varphi$ segue

$$\int_{\Omega} \Delta\varphi d^n x = \int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla\varphi d^n x = \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} dS$$

dal fatto che φ deve essere soluzione del problema di Neumann abbiamo che

$$\int_{\Omega} \Delta\varphi d^n x = \int_{\Omega} f d^n x \quad \text{e} \quad \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} dS = \oint_{\partial\Omega} \psi dS.$$

Combinando i due risultati otteniamo la proposizione seguente.

Proposizione 2.1. *Condizione necessaria affinché il problema di Neumann (2.15) ammetta soluzione è che:*

$$\int_{\Omega} f d^n x = \oint_{\partial\Omega} \psi dS.$$

◇

Questo esempio ci porta a concludere che non tutti i problemi contenenti l'equazione di Poisson ammettono soluzione.

Concludiamo con due teoremi di unicità per il problema di Neumann *esterno*.

Teorema 2.10. (Unicità per il problema di Neumann 2). *Se $\Omega \neq \emptyset$ è un aperto di \mathbb{R}^n a chiusura compatta con bordo $\partial\Omega$ dato da una superficie $n - 1$ dimensionale regolare ed infine $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ è connesso, si consideri il problema di Neumann per $\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi = f \quad \text{su } \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \psi \\ |\varphi(x)| \leq K, \quad \|\nabla\varphi(x)\| \leq \frac{K}{(1 + \|x\|)^{n-1+\alpha}} \quad \text{su } \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \end{array} \right. \quad \varphi \in C^1(\overline{\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}}) \cap C^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}), \quad (2.16)$$

con $f \in C^0(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})$, $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ assegnate e dove \mathbf{n} è il versore normale uscente e $K > 0$, $\alpha > 0$ sono costanti reali dipendenti da φ in generale. Allora, se esiste una soluzione φ al problema posto, questa è unica a meno di costanti additive. \square

Dimostrazione. Sia B_R una palla aperta di raggio $R > 0$ centrata nell'origine di \mathbb{R}^n e contenente $\overline{\Omega}$. Siano ϕ_1 e ϕ_2 due soluzioni del problema considerato dimostriamo che la funzione $u := \phi_1 - \phi_2$ è costante. Per dimostrare ciò, notiamo inizialmente che, per costruzione u è armonica su $\Omega_R := (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}) \cap B_R$. Applicando la prima identità di Green:

$$0 = \int_{\Omega_R} u \Delta u d^n x = - \int_{\Omega_R} \nabla u \cdot \nabla u d^n x - \oint_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} dS + \oint_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} dS.$$

Dato che, nelle nostre ipotesi $\frac{\partial\phi_1-\phi_2}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0$ ossia $\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0$, l'identità di sopra implica:

$$\int_{\Omega_R} \|\nabla u\|^2 d^n x = \oint_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} dS.$$

D'altra parte

$$\left| \oint_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} dS \right| \leq \oint_{\partial B_R} |u \mathbf{n}_{\partial B_R} \cdot \nabla u| dS \leq \frac{C}{(1+R)^{n-1+\beta}} \oint_{\partial B_R} dS,$$

per qualche $C, \beta > 0$. Nell'ultimo passaggio abbiamo usato:

$$|u \mathbf{n} \cdot \nabla u| = |u| |\mathbf{n} \cdot \nabla u| \leq |u| \|\nabla u\| = \|u \nabla u\|$$

e quindi

$$\|u \nabla u\| \leq |\phi_1| \|\nabla \phi_1\| + |\phi_2| \|\nabla \phi_2\| + |\phi_1| \|\nabla \phi_2\| + |\phi_2| \|\nabla \phi_1\|,$$

e, dato che tutte le funzioni sono valutate per $\|x\| = R$,

$$|\phi_1| \|\nabla \phi_1\| + |\phi_2| \|\nabla \phi_2\| + |\phi_1| \|\nabla \phi_2\| + |\phi_2| \|\nabla \phi_1\| \leq \frac{H}{(1+R)^{n-1+\beta}},$$

dove $H > 0$ e $\beta > 0$ esistono per ipotesi (per esempio β è la più piccola tra le costanti α di ϕ_1 e ϕ_2 e H è 4 volte il quadrato della più grande delle costanti K di ϕ_1 e ϕ_2). Torniamo alla disuguaglianza:

$$\left| \oint_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} dS \right| \leq \frac{H}{(1+R)^{n-1+\beta}} \oint_{\partial B_R} dS.$$

L'ultimo membro tende a 0 per $R \rightarrow +\infty$ in quanto l'ultimo integrale vale CR^{n-1} per qualche costante $C > 0$. Per cui:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_R} \|\nabla u\|^2 d^n x = 0.$$

Il teorema della convergenza monotona, assicura che la funzione $x \mapsto \|\nabla u\|^2$ sia integrabile su $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} = \Omega_\infty$ con integrale nullo. Pertanto la funzione deve essere quasi ovunque nulla. Essendo $u \mapsto \|\nabla u\|$ continua, deve essere $\nabla u = 0$ su $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. Concludiamo che, su ogni componente connessa di Ω , u deve essere costante. Questo implica immediatamente la tesi. \square

Ecco il secondo teorema che fornisce l'unicità senza l'ambiguità della costante additiva arbitraria.

Teorema 2.11. (Unicità per il problema di Neumann 3). *Se $\Omega \neq \emptyset$ è un aperto di \mathbb{R}^n a chiusura compatta con bordo $\partial\Omega$ dato da una superficie $n-1$ dimensionale regolare ed infine $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ è connesso, si consideri il problema di Neumann per $\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} \Delta\varphi = f & \text{su } \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \psi \\ |\varphi(x)| \leq \frac{K}{(1+\|x\|)^\alpha}, \quad \|\nabla\varphi(x)\| \leq \frac{K}{(1+\|x\|)^{n-1}} & \text{su } \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \end{cases} \quad \varphi \in C^1(\overline{\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}}) \cap C^2(\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}), \quad (2.17)$$

con $f \in C^0(\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega})$, $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ assegnate e dove \mathbf{n} è il versore normale uscente e $K > 0$, $\alpha > 0$ sono costanti reali dipendenti da φ in generale. Allora, se esiste una soluzione φ al problema posto, questa è unica. \square

Dimostrazione. La dimostrazione procede analogamente a prima. Sia B_R una palla aperta di raggio $R > 0$ centrata nell'origine di \mathbb{R}^n e contenente $\bar{\Omega}$. Siano ϕ_1 e ϕ_2 due soluzioni del problema considerato dimostriamo che la funzione $u := \phi_1 - \phi_2$ è costante. Per dimostrare ciò, notiamo inizialmente che, per costruzione u è armonica su $\Omega_R := (\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}) \cap B_R$. Applicando la prima identità di Green:

$$0 = \int_{\Omega_R} u \Delta u d^n x = - \int_{\Omega_R} \nabla u \cdot \nabla u d^n x + \oint_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS + \oint_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS.$$

Dato che, nelle nostre ipotesi $\frac{\partial \phi_1 - \phi_2}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0$ ossia $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0$, l'identità di sopra implica:

$$\int_{\Omega_R} \|\nabla u\|^2 d^n x = \oint_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS.$$

D'altra parte

$$\left| \oint_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS \right| \leq \oint_{\partial B_R} |u \mathbf{n}_{\partial B_R} \cdot \nabla u| dS \leq \frac{H}{(1+R)^{n-1+\beta}} \oint_{\partial B_R} dS,$$

per costanti $H, \beta > 0$. Nell'ultimo passaggio abbiamo usato:

$$|u \mathbf{n} \cdot \nabla u| = |u| |\mathbf{n} \cdot \nabla u| \leq |u| \|\nabla u\| = \|u \nabla u\|$$

e quindi

$$\|u \nabla u\| \leq |\phi_1| \|\nabla \phi_1\| + |\phi_2| \|\nabla \phi_2\| + |\phi_1| \|\nabla \phi_2\| + |\phi_2| \|\nabla \phi_1\|,$$

e, dato che tutte le funzioni sono valutate per $\|x\| = R$,

$$|\phi_1| \|\nabla \phi_1\| + |\phi_2| \|\nabla \phi_2\| + |\phi_1| \|\nabla \phi_2\| + |\phi_2| \|\nabla \phi_1\| \leq \frac{H}{(1+R)^\beta} \frac{1}{(1+R)^{n-1}},$$

dove $H > 0$ e $\beta > 0$ esistono per ipotesi (β è la più piccola tra le costanti α di ϕ_1 e ϕ_2 e H è 4 volte il quadrato della più grande delle costanti K di ϕ_1 e ϕ_2). Torniamo alla disuguaglianza:

$$\left| \oint_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS \right| \leq \frac{H}{(1+R)^{n-1+\beta}} \oint_{\partial B_R} dS.$$

L'ultimo membro tende a 0 per $R \rightarrow +\infty$ in quanto l'ultimo integrale vale CR^{n-1} per qualche costante $C > 0$. Per cui:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_R} \|\nabla u\|^2 d^n x = 0.$$

Il teorema della convergenza monotona, assicura che la funzione $x \mapsto \|\nabla u\|^2$ sia integrabile su $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} = \Omega_\infty$ con integrale nullo. Pertanto la funzione deve essere quasi ovunque nulla. Essendo $u \mapsto \|\nabla u\|$ continua, deve essere $\nabla u = 0$ su $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. Concludiamo che, su ogni componente connessa di Ω , u deve essere costante. Questo implica immediatamente la tesi dato che $u(x) \rightarrow 0$ per $\|x\| \rightarrow +\infty$ nelle nostre ipotesi, e quindi l'eventuale costante che differenzia ϕ_1 da ϕ_2 è nulla. \square

Osservazioni 2.10. Si può provare [Sa10] che, con Ω come detto sopra e per $n \geq 3$, se $\phi : \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ è armonica e tende uniformemente a zero all'infinito allora esistono due costanti $R, K > 0$ tali che, se $\|x\| > R$ allora $|\phi(x)| \leq K/\|x\|^{n-2}$, $\|\nabla \phi(x)\| \leq K/\|x\|^{n-1}$. Pertanto sono verificate le ipotesi del teorema 2.11 e ne vale la tesi.

Capitolo 3

Soluzioni fondamentali per l'equazione di Poisson in \mathbb{R}^n e risultati ad esse legati.

Ci occuperemo ora di definire, e studiarne le proprietà, delle cosiddette *soluzioni fondamentali*, dell'equazione di Poisson. Tali strumenti matematici sono utili per vari motivi come vedremo. Esse permettono di ottenere altre importanti proprietà delle funzioni armoniche, ma fondamentalmente sono usate in una delle procedure classiche per determinare le soluzioni del problema di Dirichlet e Neumann.

3.1 Soluzioni fondamentali.

In questa sezione, una volta definite le soluzioni fondamentali, mostreremo come da esse si ricavino nuovi risultati sulle funzioni armoniche: i teoremi della media, un rafforzamento dell'enunciato del principio del massimo, la prova del fatto che le funzioni armoniche sono C^∞ ed addirittura analitiche, ed il risultato che stabilisce che se due funzioni armoniche coincidono su un aperto non vuoto A allora coincidono in ogni aperto connesso che contiene A sul quale sono entrambe definite (in particolare ogni funzione armonica nulla su un aperto non vuoto è nulla).

Definizione 3.1. Per $n = 2, 3, \dots$ fissato, si definiscono **soluzioni fondamentali** su \mathbb{R}^n dell'equazione di Poisson rispetto al punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ le funzioni:

$$\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \ni x \mapsto G_n(x, x_0) := \mathcal{G}_n(\|x - x_0\|),$$

dove, per $r > 0$,

$$\mathcal{G}_n(r) := \begin{cases} \frac{1}{(2-n)\omega_n} r^{2-n} & \text{se } n > 2, \\ \frac{1}{(2\pi)} \log r & \text{se } n = 2, \end{cases} \quad (3.1)$$

in cui ω_n è la misura della superficie della sfera di raggio unitario in \mathbb{R}^n pari a:

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

◇

Osservazioni 3.1.

(1) Γ è la nota *funzione gamma* di Eulero:

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \text{per } z > 0,$$

che si prolunga analiticamente univocamente in una funzione olomorfa su tutto \mathbb{C} con l'esclusione di singolarità (poli) nei punti $z = 0, -1, -2, \dots$. Γ soddisfa, in particolare:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{e} \quad \Gamma(n+1/2) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi} \quad \text{per } n = 1, 2, \dots$$

(2) Se $B_R \subset \mathbb{R}^n$ è una palla aperta di raggio R , $Vol(\partial B_R)$ e $Vol(B_R)$ denotano rispettivamente la misura della superficie di ∂B_R e del volume di B_R . Tali valori sono rispettivamente:

$$Vol(\partial B_R) = \omega_n R^{n-1} \quad \text{e} \quad Vol(B_R) = \frac{\omega_n R^n}{n}.$$

3.1.1 Proprietà elementari delle soluzioni fondamentali.

Vediamo ora le proprietà principali delle soluzioni fondamentali appena definite. Ricordiamo che una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ è detta **di classe** $\mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ ovvero, equivalentemente, **localmente integrabile**, se è misurabile e soddisfa:

$$\int_B |f| d^n x < +\infty, \quad \text{per ogni aperto limitato } B \text{ di } \mathbb{R}^n,$$

dove l'integrale è quello di Lebesgue. Nel seguito, riferendoci ad una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ (o \mathbb{R}) con $A \subset \mathbb{R}^n$, diremo che essa è **di classe** $\mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, ovvero equivalentemente **localmente integrabile**, se, estendendo tale funzione alla funzione nulla fuori da A , la funzione \tilde{f} ottenuta in tal modo è localmente integrabile.

Teorema 3.1. Per $n = 2, 3, \dots$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fissati, le soluzioni fondamentali $G_n(x, x_0)$ soddisfano le seguenti proprietà.

(a) Le funzioni $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \ni x \mapsto G_n(x, x_0)$ e $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \ni x \mapsto G_n(x_0, x)$ sono di classe $\mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\})$, anche se G_n diverge per $x \rightarrow x_0$. Se $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ è pertanto ben definito:

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) f(y) d^n y.$$

(b) Se $x \neq x_0$ allora:

$$\Delta_x G_n(x, x_0) = 0.$$

(c) Se $\rho \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ allora:

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) \Delta_y \rho(y) d^n y = \rho(x).$$

(d) Se $\rho \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ allora:

$$\Delta_x \int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) \rho(y) d^n y = \rho(x).$$

◇

Dimostrazione. Cominciamo con il dimostrare (b). Dato che $G_n(x, x_0) := \mathcal{G}_n(\|x - x_0\|)$, è conveniente traslare l'origine delle coordinate in x_0 , che è tenuto fisso, introdurre un sistema di coordinate polari sferiche centrato in $x_0 = O$ e sfruttare il fatto che \mathcal{G}_n dipende esplicitamente solo dalla variabile:

$$r := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i)^2} = \|x - x_0\|. \quad (3.2)$$

Per computo diretto, calcolando il laplaciano in coordinate cartesiane ortonormali, si verifica subito che se $f = f(r)$ allora:

$$\begin{aligned} \Delta f(r) &= \sum_{i,j=1}^n \delta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} f(r) = \sum_{i,j=1}^n \delta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial r}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial r} f(r) \right) = \sum_{i,j=1}^n \delta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{x^j}{r} \frac{\partial}{\partial r} f(r) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \delta^{ij} \frac{x^j}{r} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial r} f(r) + \sum_{i,j=1}^n \delta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{x^j}{r} \right) \frac{\partial f(r)}{\partial r} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \delta^{ij} \frac{x^j}{r} \frac{\partial r}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \sum_{i,j=1}^n \delta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{x^j}{r} \right) \frac{\partial f(r)}{\partial r} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \delta^{ij} \frac{x^j x^i}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \sum_{i,j=1}^n \delta^{ij} \frac{\delta^{ij} r - \frac{x^i x^j}{r}}{r^2} \frac{\partial f(r)}{\partial r}, \end{aligned}$$

da cui, notando che

$$\sum_{i,j=1}^n \delta^{ij} \delta^{ij} = \sum_{i=1}^n \delta^{ii} = \sum_{i=1}^n 1 = n,$$

si trova alla fine a:

$$\Delta f(r) = \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial f(r)}{\partial r}.$$

Ora, tramite il conto esplicito usando (3.1), si verifica la proprietà (b):

$$\Delta \mathcal{G}_n(r) = \frac{\partial^2 \mathcal{G}_n(r)}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}_n(r)}{\partial r} = 0.$$

Da (3.1) risulta ovvio che $\mathcal{G}_n \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, cioè, ripristinando le coordinate cartesiane iniziali $G_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\})$. In particolare \mathcal{G}_n è dunque misurabile. Osserviamo inoltre che, essendo l'elemento di volume in coordinate sferiche

$$d^n x = \sqrt{r^{2n-2}} dr d\Omega_n = r^{n-1} dr d\Omega_n,$$

dove $d\Omega_n$ è l'elemento di volume sulla sfera unitaria $n-1$ dimensionale, si ha che la funzione \mathcal{G}_n è assolutamente integrabile in ogni aperto limitato B la cui chiusura include l'origine, dato che la divergenza per $r \rightarrow 0$ di \mathcal{G}_n è controbilanciata da un fattore infinitesimo per $r \rightarrow 0^+$ dovuto alla misura usata: si ha in totale un termine $r^{2-n} r^{n-1}$, ovvero $r \ln r$ se $n=2$, da integrare rispetto alla misura dr . L'integrazione di $d\Omega_n$ produce invece ω_n finito. Su aperti limitati la cui chiusura non include l'origine, essendo \mathcal{G}_n continua, la sua integrabilità è ovvia. In definitiva $\mathcal{G}_n \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R})$. L'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue assicura infine l'indipendenza da punto x_0 e che quindi $G_n(\cdot, x_0) \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$. Per simmetria nello scambio di x_0 e x in $G_n(x, x_0) = \mathcal{G}_n(\|x - x_0\|)$ si ha anche che $G_n(x_0, \cdot) \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\})$. In particolare sono ben definiti integrali del tipo:

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) f(y) d^n y,$$

per $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ valendo:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |G_n(x, y) f(y)| d^n y \leq \max_{\mathbb{R}^n} |f| \int_{\text{supp} f} |G_n(x, y)| d^n y < +\infty.$$

Abbiamo quindi provato anche la proprietà (a).

Dimostriamo ora che (c) \Rightarrow (d).

Sia $\rho \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, se vale la (c), sfruttando l'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}_n(\|x - y\|) \Delta_y \rho(y) d^n y = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}_n(\|u\|) \Delta_u \rho(x - u) d^n u \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}_n(\|u\|) \Delta_x \rho(x - u) d^n u = \Delta_x \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}_n(\|u\|) \rho(x - u) d^n u \\ &= \Delta_x \int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) \rho(y) d^n y. \end{aligned}$$

La penultima uguaglianza segue dalla formula di derivazione sotto il segno di integrale nella variabile x basata sul teorema della convergenza dominata di Lebesgue (vedi la sezione B.2 in Appendice). Ipostesi sufficienti per applicarla per le derivate nel punto x_0 sono che, per una palla aperta $B_\epsilon(x_0)$ centrata nel punto x_0 , la funzione $f(x, u) = \mathcal{G}_n(\|u\|) \rho(x - u)$ sia una funzione

Lebesgue integrabile nella variabile $u \in \mathbb{R}^n$ per ogni $x \in B_\epsilon(x_0)$ e le derivate di tale funzione nella variabile x , fino all'ordine voluto (quello dell'operatore differenziale che si vuole scambiare con l'integrale), siano ciascuna rispettivamente maggiorata in valore assoluto, uniformemente in $x \in B_\epsilon(x_0)$, da una corrispondente funzione assolutamente integrabile dipendente dalla sola variabile d'integrazione $u \in \mathbb{R}^n$. Queste condizioni sono effettivamente verificate. Infatti al variare di $x \in B_\epsilon(x_0)$, i supporti delle funzioni $u \mapsto \rho(x-u)$ sono tutti contenuti in un compatto comune¹ K . Di conseguenza lo stesso accade, su K , per le derivate in x delle funzioni $u \mapsto \rho(x-u)$ (fino al secondo ordine). Definiamo una funzione C^∞ a supporto compatto $\mathbb{R}^n \ni u \mapsto g(u)$, che valga:

$$\max \left\{ \left| \frac{\partial \rho}{\partial x^k} \right|, \left| \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^i \partial x^j} \right| \mid x \in \mathbb{R}^n, i, j, k = 1, 2, \dots, n \right\}$$

su K e si annulli rapidamente fuori da tale insieme. Per costruzione la funzione

$$\mathbb{R}^n \ni u \mapsto g(u) \mathcal{G}_n(\|u\|)$$

è Lebesgue integrabile e soddisfa, per $i, j = 1, 2, \dots, n$:

$$\left| \frac{\partial f(u, x)}{\partial x^k} \right|, \left| \frac{\partial^2 f(u, x)}{\partial x^i \partial x^j} \right| \leq |g(u) \mathcal{G}_n(\|u\|)|, \quad (x, u) \in B_\epsilon(x_0) \times \mathbb{R}^n.$$

Questo giustifica lo scambio del simbolo di integrale con il laplaciano Δ_x (e con le derivate di ordine 1) eseguito sopra.

Dimostriamo infine la proprietà (c).

Ricordiamo che per ipotesi ρ ha supporto compatto, quindi ha supporto chiuso e limitato. Fissato $x \in \mathbb{R}^n$ consideriamo dunque una palla aperta $B_R(x)$, di raggio finito R e centrata in x , che include il supporto di ρ :

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) \Delta_y \rho(y) d^n y = \int_{B_R(x)} G_n(x, y) \Delta_y \rho(y) d^n(y).$$

Gli integrali sono ben definiti visto che $\rho \in C^2(\overline{B_R(x)})$ è quindi limitata e pertanto, $y \mapsto G_n(x, y) \Delta_y \rho(y)$ è Lebesgue integrabile essendo G_n localmente integrabile. Siano $B_\epsilon(x)$ palle aperte di centro x con raggio $\epsilon > 0$ e $\epsilon < R$. Consideriamo la classe di funzioni, parametrizzate in $\epsilon > 0$, ottenute restringendo $y \mapsto G_n(x, y) \Delta_y \rho(y)$ agli insiemi $B_R(x) \setminus B_\epsilon(x)$ e definendole nulle fuori da tali insiemi. Per $\epsilon \rightarrow 0^+$, tali funzioni tendono puntualmente a $y \mapsto G_n(x, y) \Delta_y \rho(y)$ definita su tutta $B_R(x)$, inoltre sono maggiorate in valore assoluto dal valore assoluto di tale funzione che è integrabile per ipotesi. Applicando il teorema della convergenza dominata abbiamo allora che:

$$\int_{B_R(x)} G_n(x, y) \Delta_y \rho(y) d^n(y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{B_R(x) \setminus B_\epsilon(x)} G_n(x, y) \Delta_y \rho(y) d^n(y).$$

¹Sia $B_R(0)$ una palla di raggio $R > 0$ centrata nell'origine e sufficientemente grande da includere il supporto, compatto per ipotesi, di $u \mapsto \rho(x_0 - u)$. Sia $B_S(0)$ una seconda palla, centrata nell'origine, di raggio $S > 0$ che includa $B_\epsilon(x_0)$. I supporti delle funzioni $u \mapsto \rho(x - u)$, per $x \in B_\epsilon(x_0) \subset B_S(0)$, sono sicuramente inclusi in $\cup_{u \in B_R(0)} B_S(u)$. Tale insieme è sicuramente contenuto nella palla compatta $K := \overline{B_{R+S}(0)}$ che, a maggior ragione, contiene tutti i supporti delle funzioni dette.

Quindi, applicando la seconda identità di Green al risultato, troviamo:

$$\int_{B_R(x)} G_n(x, y) \Delta_y \rho(y) d^n y = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{B_R(x) \setminus B_\epsilon(x)} \Delta_y G_n(x, y) \rho(y) d^n(y) + \oint_{+\partial(B_R(x) \setminus B_\epsilon(x))} G_n(x, y) \nabla_y \rho(y) \cdot \mathbf{n} dS - \oint_{+\partial(B_R(x) \setminus B_\epsilon(x))} \nabla_y G_n(x, y) \rho(y) \cdot \mathbf{n} dS \right]$$

Ora $\Delta_y G_n(x, y) = \Delta_y \mathcal{G}_n(\|x - y\|) = \Delta_x G_n(x, y)$ e, dato che il dominio di integrazione in y è esterno a $B_\epsilon(x)$, varrà:

$$\Delta_x G_n(x, y) = 0 \quad \forall y \in B_R(x) \setminus B_\epsilon(x).$$

Inoltre:

$$\rho|_{\partial B_R(x)} = 0, \quad \nabla_y \rho|_{\partial B_R(x)} = 0$$

in quanto $(\text{supp} \rho) \cap \partial B_R(x) = \emptyset$.

Dunque:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) \Delta_y \rho(y) d^n y = \\ & = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{+\partial B_\epsilon(x)} \nabla_y G_n(x, y) \rho(y) \cdot \mathbf{n}' dS - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{+\partial B_\epsilon(x)} G_n(x, y) \nabla_y \rho(y) \cdot \mathbf{n}' dS \end{aligned}$$

Il cambiamento di segno rispetto all'integrale precedente è dovuto al fatto che abbiamo cambiato il verso del versore normale a $\partial B_\epsilon(x)$: \mathbf{n} indica il versore entrante, nell'ultimo integrale invece $\mathbf{n}' = -\mathbf{n}$ indica il versore uscente.

L'ultimo integrale soddisfa la seguente disuguaglianza:

$$\left| \oint_{+\partial B_\epsilon(x)} G_n(x, y) \nabla_y \rho(y) \cdot \mathbf{n}' dS \right| \leq \sup_{\partial B_\epsilon(x)} \|\nabla_y \rho\| \oint_{+\partial B_\epsilon(x)} |G_n(x, y)| dS,$$

e quindi, tenendo conto che $G(x, y)$ è costante in y su $\partial B_\epsilon(x)$, mentre $\oint_{+\partial B_\epsilon(x)} dS = \text{const.} \cdot \epsilon^{n-1}$,

$$\left| \oint_{+\partial B_\epsilon(x)} G_n(x, y) \nabla_y \rho(y) \cdot \mathbf{n}' dS \right| \leq \sup_{\partial B_\epsilon(x)} \|\nabla_y \rho\| \text{const.} \cdot \epsilon^{n-1} \begin{cases} \frac{1}{\epsilon^{n-2}} & n > 2 \\ |\ln \epsilon| & n = 2 \end{cases}$$

che tende a 0 per $\epsilon \rightarrow 0^+$. Rimane quindi:

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) \Delta_y \rho(y) d^n y = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{+\partial B_\epsilon(x)} \nabla_y G_n(x, y) \rho(y) \cdot \mathbf{n}' dS.$$

Con il solito sistema di coordinate polari sferiche centrato in x , si ha:

$$\mathbf{n}' \cdot \nabla_y G_n(x, y)|_{\partial B_\epsilon(x)} = \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{G}_n(r)|_{\partial B_\epsilon(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} & n = 2 \\ \frac{1}{\omega_n \epsilon^{n-1}} & n > 2 \end{cases} = \frac{1}{\text{Vol}(\partial B_\epsilon(x))}, \quad (3.3)$$

dove abbiamo usato il fatto che, riferendosi alle coordinate polari centrate in x , vale $\mathbf{n}' = \mathbf{e}_r$ e, per funzioni della sola coordinata radiale, $\mathbf{e}_r \cdot \nabla f(r) = \frac{\partial}{\partial r} f(r)$. Quindi:

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) \Delta_y \rho(y) d^n y = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Vol}(\partial B_\epsilon(x))} \oint_{\partial B_\epsilon(x)} \rho(y) dS$$

L'ultimo integrale può essere facilmente calcolato:

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Vol}(\partial B_\epsilon(x))} \oint_{\partial B_\epsilon(x)} \rho(y) dS(y) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Vol}(\partial B_\epsilon(x))} \oint_{\partial B_\epsilon(x)} (\rho(y) - \rho(x)) dS(y) + \rho(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Vol}(\partial B_\epsilon(x))} \oint_{\partial B_\epsilon(x)} dS(y) \\ &= 0 + \rho(x). \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che:

$$\left| \frac{1}{\text{Vol}(\partial B_\epsilon(x))} \oint_{\partial B_\epsilon(x)} (\rho(y) - \rho(x)) dS(y) \right| \leq \frac{\max_{\partial B_\epsilon(x)} |\rho(y) - \rho(x)|}{\text{Vol}(\partial B_\epsilon(x))} \oint_{\partial B_\epsilon(x)} dS(y) = \max_{\partial B_\epsilon(x)} |\rho(y) - \rho(x)|$$

In definitiva

$$\left| \frac{1}{\text{Vol}(\partial B_\epsilon(x))} \oint_{\partial B_\epsilon(x)} (\rho(y) - \rho(x)) dS(y) \right| \leq \max_{\partial B_\epsilon(x)} |\rho(y) - \rho(x)| \leq \frac{\max_{B_\epsilon(x)} |\rho(y) - \rho(x)|}{B_\epsilon(x)}$$

e l'ultimo termine tende a zero per $\epsilon \rightarrow 0^+$, dato che ρ è continua. Pertanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) \Delta_y \rho(y) d^n y = \rho(x).$$

□

3.2 Ulteriori proprietà delle funzioni armoniche in \mathbb{R}^n .

Nella dimostrazione del teorema 3.1, nell'espressione:

$$\begin{aligned} & \int_{B_R(x)} G_n(x, y) \Delta_y \rho(y) d^n(y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{B_R(x) \setminus B_\epsilon(x)} \Delta_y G_n(x, y) \rho(y) d^n(y) + \right. \\ & \left. + \oint_{+\partial(B_R(x) \setminus B_\epsilon(x))} G_n(x, y) \nabla_y \rho(y) \cdot \mathbf{n} dS - \oint_{+\partial(B_R(x) \setminus B_\epsilon(x))} \nabla_y G_n(x, y) \rho(y) \cdot \mathbf{n} dS \right] \end{aligned}$$

abbiamo trascurato gli integrali di superficie relativi a $\partial B_R(x)$, dato che la funzione ρ si annulla prima di arrivare a $\partial B_R(x)$. Tuttavia avremmo potuto considerare una palla $B_R(x)$ e più in

generale un dominio Ω a chiusura compatta e con bordo regolare, sul quale ρ e le sue derivate non si annullano. Usando *essenzialmente la stessa dimostrazione* con Ω al posto di $B_R(x)$, ma senza trascurare gli integrali di bordo su $\partial\Omega$, si arriva al seguente importante teorema:

Teorema 3.2. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, $\bar{\Omega}$ compatto e $\partial\Omega$ una superficie regolare ed orientabile. Sia $\rho : \bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(\bar{\Omega})$. Per ogni $x \in \Omega$, vale l'identità :*

$$\rho(x) = \oint_{+\partial\Omega} (\nabla_y G_n(x, y)) \rho(y) \cdot \mathbf{nd}S(y) - \oint_{+\partial\Omega} G_n(x, y) \nabla_y \rho(y) \cdot \mathbf{nd}S(y) + \int_{\Omega} G_n(x, y) \Delta_y \rho(y) d^n y. \quad (3.4)$$

A parità di ipotesi su Ω la stessa formula vale se, più debolmente, $\rho \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ con $\Delta\rho$ limitato su Ω . \diamond

Dimostrazione. La prima affermazione si prova come per (c) del teorema 3.1 semplicemente rimpiazzando $B_R(x)$ con Ω e tenendo conto che il supporto di ρ ora può intersecare $\partial\Omega$ per cui rimangono dei contributi dovuti agli integrali di superficie trascurati nella dimostrazione di (c) del teorema 3.1. Se la funzione continua $\Delta\rho$ è limitata su Ω allora $\Omega \ni y \mapsto G_n(x, y) \Delta_y \rho(y)$ è comunque integrabile su Ω essendo G_n localmente integrabile e pertanto la dimostrazione si può ripetere similmente alla precedente dato che siamo nelle ipotesi di validità delle identità di Green. \square

Studiamo ora le conseguenze di questo risultato fondamentale.

3.2.1 Non esistenza di funzioni armoniche con supporto compatto e non nulle.

La prima conseguenza del teorema 3.2, è la seguente proposizione che stabilisce che non esistono funzioni armoniche a supporto compatto se non la funzione identicamente nulla (il cui supporto è quindi il compatto banale dato dall'insieme vuoto).

Proposizione 3.1. *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto non vuoto e $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ è armonica ed ha supporto compatto in A , allora $g(x) = 0$ per ogni $x \in A$. \diamond*

Dimostrazione. Supponiamo che $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sia armonica a supporto (rispetto a A) compatto K . Dato che la proprietà di compattezza non dipende dalla topologia indotta, K è compatto anche rispetto alla topologia di \mathbb{R}^n ed è, in particolare, chiuso in \mathbb{R}^n . Di conseguenza ogni punto di $x_0 \in \partial A$ ammette un intorno aperto che non interseca K – su cui g è quindi nulla – (altrimenti sarebbe $x_0 \in K$ perché K è chiuso, ma avremmo la contraddizione che $\partial A \ni x_0 \in K \subset A$ che è impossibile, dato che A è aperto). Possiamo allora prolungare g su tutto \mathbb{R}^n definendola come la funzione nulla fuori da A , ottenendo una funzione $C^2(\mathbb{R}^n)$ dato che è differenziabile con continuità fino al secondo ordine in un intorno aperto di ogni punto di $\mathbb{R}^n = \text{int}(A) \cup \text{ext}(A) \cup \partial A$. Infatti, nell'aperto $A = \text{int}(A)$ la funzione è C^2 per ipotesi, nell'aperto $\text{ext}(A)$ la funzione è nulla ed è pertanto C^2 , in un intorno aperto di ogni punto di ∂A la funzione è ancora la funzione

nulla ed è pertanto ancora C^2 . La funzione estesa è armonica su A per ipotesi, ma lo è anche sui rimanenti punti di \mathbb{R}^n dato che è la funzione nulla in un intorno di ciascuno di tali punti:

$$\Delta g(y) = 0 \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}^n.$$

Applicando l'identità stabilita nel teorema 3.2 per Ω dato da una palla di raggio sufficientemente grande da includere strettamente K e x , in modo tale che g e ∇g si annullino su $\partial\Omega$, si ha:

$$\begin{aligned} g(x) = & - \oint_{+\partial\Omega} G_n(x, y) \nabla_y g(y) \cdot \mathbf{n} dS(y) + \oint_{+\partial\Omega} (\nabla_y G_n(x, y)) g(y) \cdot \mathbf{n} dS(y) \\ & + \int_{\Omega} G_n(x, y) \Delta_y g(y) d^n y = 0, \end{aligned}$$

per ogni $x \in \Omega$ (fuori da Ω la funzione è nulla per costruzione) ed in particolare $x \in A$. \square

3.2.2 Analiticità delle funzioni armoniche in \mathbb{R}^n .

Per enunciare e dimostrare (parzialmente) il prossimo teorema, ricordiamo che una funzione di più variabili complesse $f : \Omega_{\mathbb{C}} \ni z \mapsto \mathbb{C}$, con $\Omega_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^n$ aperto non vuoto, è detta **funzione olomorfa di più variabili complesse** [ST84] se è olomorfa in ciascuna variabile z^k di $z = (z^1, \dots, z^n)$ separatamente, quando le altre sono fissate arbitrariamente. L'importante **Teorema di Hartogs** dimostra che se $f : \Omega_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa di più variabili complesse, allora è anche una **funzione analitica di più variabili complesse**. Cioè, per ogni $z_0 \in \Omega_{\mathbb{C}}$, essa è sviluppabile in serie di Taylor centrata in z_0 in un intorno aperto di z_0 incluso in $\Omega_{\mathbb{C}}$. Ovviamente ci stiamo riferendo allo sviluppo di Taylor in più variabili complesse:

$$f(z) = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = N} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \left. \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f}{\partial z^{1\alpha_1} \dots \partial z^{n\alpha_n}} \right|_{z_0} (z^1 - z_0^1)^{\alpha_1} \dots (z^n - z_0^n)^{\alpha_n}. \quad (3.5)$$

(Le funzioni analitiche di più variabili complesse sono anche olomorfe nel senso della definizione data, come si prova subito, tenendo conto che le due nozioni coincidono nel caso di funzioni di una variabile complessa.) Si osservi che, posto $z = x + iy$, se $f(x)$ assume valori reali per ogni $x \in \mathbb{R}^n \cap \Omega_{\mathbb{C}}$, lo sviluppo sopra scritto sviluppato attorno a $z_0 = x_0$ con $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e calcolato per $x \in \mathbb{R}$ si riduce al solito sviluppo di Taylor reale:

$$f(x) = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = N} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \left. \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f}{\partial x^{1\alpha_1} \dots \partial x^{n\alpha_n}} \right|_{x_0} (x^1 - x_0^1)^{\alpha_1} \dots (x^n - x_0^n)^{\alpha_n}, \quad (3.6)$$

dove abbiamo calcolato tutte le derivate parziali eseguendo i limiti sull'asse reale. In questo caso, dato che $\Omega := \mathbb{R}^n \cap \Omega_{\mathbb{C}}$ è aperto in \mathbb{R}^n , la restrizione di f a tale dominio definisce una **funzione analitica reale**, cioè una funzione definita su un aperto di \mathbb{R}^n a valori in \mathbb{R} che è sviluppabile in serie di Taylor (di più variabili reali) nell'intorno di ogni punto del dominio.

Teorema 3.3. (Analiticità delle funzioni armoniche). Se $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, è armonica su Ω , allora $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ e più fortemente φ è analitica reale su Ω . \diamond

Traccia della dimostrazione. Sia $x_0 \in \Omega$, consideriamo una palla B aperta di raggio finito e con $\overline{B} \subset \Omega$ centrata in x_0 e applichiamo la formula (3.4) su B , tenendo conto che $\Delta\varphi = 0$:

$$\varphi(x) = - \oint_{+\partial B} G_n(x, s) \nabla_s \varphi(s) \cdot \mathbf{n} dS(s) + \oint_{+\partial B} (\nabla_s G_n(x, s)) \varphi(s) \cdot \mathbf{n} dS(s),$$

dove, in particolare, $x \in B'$, con B' palla aperta centrata in x_0 di raggio strettamente inferiore a quello di B . I due integrandi sono funzioni continue nelle variabili (x, s) e quindi limitate su $(x, s) \in \overline{B'} \times \partial B$ (che è un insieme compatto in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$). La stessa cosa accade alle derivate in x , di ogni ordine, degli integrandi. Notare le divergenze di $G_n(x, s)$ (e delle sue derivate) appaiono solamente quando $x = s$, cosa impossibile se $(x, s) \in \overline{B'} \times \partial B$. Per ogni derivata di ogni fissato ordine α (incluse derivate miste) nelle componenti di x , $D_x^{(\alpha)}$ esiste una costante M_α per cui $|D_x^{(\alpha)} G_n(x, s) \mathbf{n} \cdot \nabla_s \varphi(s)| \leq M_\alpha$ per ogni $s \in \partial B$ ed uniformemente in $x \in B'$. Dato che, per ogni α , ogni funzione costante $\partial B \ni s \mapsto M_\alpha \geq 0$ è sicuramente assolutamente integrabile su ∂B (che ha misura finita!), concludiamo (vedi la sezione B.2 in Appendice) che possiamo passare la derivata $D_x^{(\alpha)}$ fuori dal segno di integrale in

$$- \oint_{+\partial B} D_x^{(\alpha)} G_n(x, s) \nabla_s \varphi(s) \cdot \mathbf{n} dS(s)$$

derivando per $x = x_0$. Lo stesso ragionamento si può fare per il secondo integrale nella decomposizione integrale di φ :

$$\varphi(x) = - \oint_{+\partial B} G_n(x, s) \nabla_s \varphi(s) \cdot \mathbf{n} dS(s) + \oint_{+\partial B} (\nabla_s G_n(x, s)) \varphi(s) \cdot \mathbf{n} dS(s).$$

In altre parole, possiamo dunque derivare φ ad ogni ordine x , scaricando le derivate sulle funzioni $G_n(x, s)$ e $\mathbf{n} \cdot \nabla_s G_n(x, s)$, sotto il segno di integrale. In tal modo abbiamo verificato che φ è infinitamente differenziabile in x_0 e quindi, dato che ciò vale per ogni punto $x_0 \in \Omega$, abbiamo provato che $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. Diamo ora una dimostrazione del fatto che, localmente, φ può essere estesa ad una funzione analitica di più variabile complesse $z \mapsto \varphi'(z)$ con $z \in \Omega_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^n$ un aperto che include $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Per prima cosa notiamo che, dalla loro definizione, le funzioni $B' \ni x \mapsto G_n(x, s) = \mathcal{G}_n(\|x - s\|)$, con $s \in \partial B$ fissato, si estendono a funzioni analitiche complesse di più variabili (non daremo una dimostrazione rigorosa di tale fatto): $z \mapsto G'_n(z, s)$ con $z = x + iy$, dove $y \in B'$ e $x \in B'$ e possiamo anche prendere $(x, y) \in \overline{B'} \times \overline{B'}$, restringendo il raggio originale di B' . Definiamo pertanto per $(x, y) \in \overline{B'} \times \overline{B'}$:

$$\varphi'(z) := - \oint_{+\partial B} G_n(z, s) \nabla_s \varphi(s) \cdot \mathbf{n} dS(s) + \oint_{+\partial B} (\nabla_s G_n(z, s)) \varphi(s) \cdot \mathbf{n} dS(s).$$

Il secondo membro è ben definito e può essere derivato in x e y passando le derivate sotto il segno di integrale, dato che la funzione G_n è infinitamente differenziabile sul compatto $\overline{B'} \times \overline{B'} \times \partial B$.

Dato che per ogni fissato s , la funzione $z \mapsto G'_n(z, s)$ soddisfa in ogni variabile z^k le condizioni di Cauchy-Riemann, soddisferà le stesse condizioni la funzione φ' : è sufficiente passare le derivate sotto il segno di integrale. In definitiva, la funzione di variabile complessa $B' + iB' \ni z \mapsto \varphi'(z)$ è definita su un aperto, ammette derivate continue (essendo di classe C^∞) nelle variabili x^k e y^k (dove $z = (z^1, \dots, z^n) = (x^1 + iy^1, \dots, x^n + iy^n)$) e soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann in ogni variabile z^k . Tenuto conto di quanto detto in (2) in osservazioni 2.5, φ' è una funzione olomorfa in più variabili complesse e nell'intorno di ogni punto nel suo dominio varrà lo sviluppo (3.5) con φ' al posto di f . Dato che per valori reali $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}^n$, φ' si riduce alla funzione a *valori reali* φ , concludiamo che nell'intorno di ogni $x_0 \in \Omega$ vale lo sviluppo (3.6) con φ al posto di f . In altre parole φ è una funzione analitica reale sul dominio aperto Ω . \square

Osservazioni 3.2.

(1) Il teorema appena dimostrato ci dice quindi che, nell'intorno di ogni suo punto del dominio, una funzione armonica può sempre essere estesa ad una funzione analitica complessa su un'opportuna estensione complessa di quell'intorno \mathbb{C}^n .

(2) Le funzioni analitiche reale godono della proprietà dell'unicità della continuazione analitica:
Proposizione 3.2. *Se due funzioni analitiche reali φ e ψ sono entrambe definite sull'aperto non vuoto e connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e coincidono sull'aperto non vuoto $A \subset \Omega$, allora coincidono su tutto Ω . \diamond*

Dimostrazione. Definiamo la funzione analitica reale $\phi := \psi - \varphi$. Sia $U \subset \Omega$ l'insieme dato dall'unione di tutti gli aperti inclusi in Ω su cui $\phi \equiv 0$. Ovviamente U è non vuoto (dato che $A \subset \Omega$ è aperto e su di esso $\phi \equiv 0$), aperto e $U \subset \Omega$. Supponiamo per assurdo che $U \neq \Omega$. Sia allora $q \in \Omega \setminus U$ e $p \in U$. Ci sarà un cammino continuo $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ con $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Se $s = \sup\{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) \in U\}$, sarà $p' := \gamma(s) \in \partial U \cap \Omega$ per costruzione. (Benchè sia elementare lo dimostriamo per completezza. Se $p' = \gamma(s) \in \text{int}(U) = U$, c'è una palla aperta B centrata in $\gamma(s)$ tutta contenuta in U . La contro immagine di B secondo la funzione continua γ individua un aperto $I \ni s$ con la proprietà che $\gamma(I) \subset U$, ma allora ci sarebbe un intorno destro di s la cui immagine secondo γ è inclusa in U e questo è impossibile per definizione di s . Si ottiene un analogo assurdo assumendo che $p' = \gamma(s) \in \text{ext}(U)$: si trova un intorno sinistro di s la cui immagine secondo γ è nell'esterno di U e questo è impossibile per definizione di s . L'unica possibilità è quindi $p' \in \partial U$, ma anche $p' = \gamma(s) \in \Omega$ per definizione di γ .) Dato che $p' \in \Omega$, ha senso valutare ϕ in p' ed in un intorno di esso. Dato che ϕ è continua con tutte le sue derivate di ogni ordine e che, essendo $p' \in \partial U$, esiste una successione di punti $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset U$ che converge a p' , tutte le derivate di ϕ in p' possono essere calcolate prendendo i limiti di tali derivate verso $p' \in \Omega$, calcolandole sulla successione $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset U$, prima di fare i limiti. Dato che $\phi|_U \equiv 0$ e che U è aperto, le derivate di ϕ in U sono tutte nulle ad ogni ordine. Le derivate ad ogni ordine di ϕ saranno allora nulle quando valutate in p' con la procedura di limite indicata sopra. Dato che in p' la funzione ϕ è analitica, facendo lo sviluppo di Taylor centrato in p' , concludiamo che $\phi \equiv 0$ in un intorno aperto $J_{p'} \subset \Omega$ di p' . Abbiamo raggiunto un assurdo dato che $J_{p'}$ è un aperto su cui $\phi \equiv 0$, ma $J_{p'} \not\subset U$ (dato che $J_{p'} \ni p' \in \partial U$ e $\partial U \cap U = \emptyset$ essendo U aperto). Questo è impossibile per definizione di U . Concludiamo che deve essere $U = \Omega$. \square

L'osservazione (2) ha la seguente implicazione immediata in virtù del teorema 3.3.

Proposizione 3.3. *Se due funzioni armoniche reali φ e ψ sono entrambe definite sull'aperto non vuoto e connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e coincidono su un aperto non vuoto $A \subset \Omega$, allora esse coincidono su tutto Ω . \diamond*

3.2.3 Teorema della media e principio del massimo in forma forte.

Un'altra importante conseguenza del teorema 3.2 è il cosiddetto *teorema della media*.

Teorema 3.4. (Teorema della media). *Sia $\varphi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, una funzione armonica. Allora, per ogni $x \in \Omega$ vale l'identità, detta **formula della media superficiale**:*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\text{Vol}(\partial B_R(x))} \oint_{\partial B_R(x)} \varphi(y) dS(y), \quad (3.7)$$

dove $B_R(x)$ è una palla aperta centrata in x di raggio finito $R > 0$ con $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$, arbitrariamente scelta. Similmente vale anche la **formula della media volumetrica**:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\text{Vol}(B_R(x))} \int_{B_R(x)} \varphi(y) d^n x(y). \quad (3.8)$$

\diamond

Dimostrazione. Sia R il raggio della palla $B_R(x)$. Utilizziamo un sistema di coordinate polari sferiche centrate in x . Dalla (3.4) e tenendo conto del fatto, già notato, che $\nabla_y G_n(x, y) = \frac{\partial \mathcal{G}_n(r)}{\partial r}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \oint_{\partial B_R(x)} \varphi(y) \frac{\partial \mathcal{G}_n(r)}{\partial r} dS(y) - \oint_{+\partial B_R(x)} \mathcal{G}_n(r) \nabla \varphi(y) \cdot \mathbf{n} dS(y) \\ &= \oint_{\partial B_R(x)} \varphi(y) \frac{\partial \mathcal{G}_n(r)}{\partial r} dS(y) - \mathcal{G}_n(R) \oint_{+\partial B_R(x)} \nabla \varphi(y) \cdot \mathbf{n} dS(y). \end{aligned}$$

L'ultimo integrale è nullo perchè φ è armonica (teorema 2.8), mentre il primo, usando (3.3) si può scrivere:

$$\oint_{\partial B_R(x)} \varphi(y) \frac{1}{\text{Vol}(\partial B_R(x))} dS(y) = \frac{1}{\text{Vol}(\partial B_R(x))} \oint_{\partial B_R(x)} \varphi(y) dS(y).$$

Passiamo alla seconda formula della media. Applichiamo la prima formula della media alla classe di palle $B_r(x)$ di raggio r , con $0 < r \leq R$, ed usiamo un sistema di coordinate polari sferiche di centro x , coordinata radiale r e coordinate angolari ω . Avremo allora che, da (3.7) vale:

$$\text{Vol}(\partial B_r(x)) \varphi(x) = \oint_{\partial B_r(x)} \varphi(r, \omega) dS(r, \omega)$$

e quindi, integrando in dr da $r = 0$ a $r = R$:

$$\left(\int_0^R \text{Vol}(\partial B_r(x)) dr \right) \varphi(x) = \int_0^R \left(\int_{\partial B_r(x)} \varphi(r, \omega) dS(r, \omega) \right) dr .$$

Il primo integrale produce proprio il volume della palla $B_R(x)$ moltiplicato per la costante $\varphi(x)$, mentre il secondo produce l'integrale di volume su tale palla della funzione φ , decomposto in due integrazioni in coordinate polari. In definitiva otteniamo la (3.8):

$$\text{Vol}(B_R(x))\varphi(x) = \int_{B_R(x)} \varphi(y) d^n x(y) .$$

□

Una conseguenza diretta del teorema della media è un rafforzamento del principio del massimo che dimostriamo in due parti.

Lemma 3.1. (Principio del massimo forte su una palla.) *Sia $B_R(x_0)$ una palla aperta in \mathbb{R}^n , di raggio $R > 0$ finito centrata in x_0 e $\varphi : \overline{B_R(x_0)} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione armonica in $B_R(x_0)$ e continua in $\overline{B_R(x_0)}$. Se vale uno dei seguenti fatti:*

$$\varphi(x_0) = \max_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi ,$$

oppure

$$\varphi(x_0) = \min_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi ,$$

oppure

$$|\varphi(x_0)| = \max_{\overline{B_R(x_0)}} |\varphi| ,$$

allora la funzione φ è costante su $\overline{B_R(x_0)}$. \diamond

Dimostrazione: È sufficiente dimostrare la tesi per il caso $\varphi(x_0) = \max_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$, in quanto se vale la seconda ipotesi, cambiando segno alla funzione φ , si ricade nella prima situazione. Se vale la terza ipotesi allora deve valer la prima oppure la seconda (Dato che non è del tutto evidente dimostriamo quest'ultimo fatto. Ci sono tre casi da considerare. (i) $\varphi \geq 0$ in $\overline{B_R(x_0)}$; in questo caso $|\varphi(x)| = \varphi(x)$ e dunque, $|\varphi(x_0)| = \max_{\overline{B_R(x_0)}} |\varphi|$ equivale a dire $\varphi(x_0) = \max_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$. (ii) $\varphi \leq 0$ in $\overline{B_R(x_0)}$; in questo caso $|\varphi(x)| = -\varphi(x)$ e dunque, $|\varphi(x_0)| = \max_{\overline{B_R(x_0)}} |\varphi|$ equivale a dire $\varphi(x_0) = \min_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$. (iii) φ assume sia valori positivi che valori negativi in $\overline{B_R(x_0)}$, in questo caso il valore massimo raggiunto da φ è positivo e quello minimo è negativo. Nella situazione considerata, il valore massimo raggiunto da $|\varphi|$ deve necessariamente corrispondere al massimo valore di φ oppure al minimo valore di φ cambiato di segno, se non corrispondesse a nessuno dei due non potrebbe essere il massimo per $|\varphi|$. Allora abbiamo due sottocasi. (a) Il valore massimo che la funzione $|\varphi|$ assume è il massimo di φ ; in questo caso, dato che tale valore

di φ è positivo, la condizione $|\varphi(x_0)| = \max_{\overline{B_R(x_0)}} |\varphi|$ equivale a dire $\varphi(x_0) = \pm \max_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$. Se risultasse $\varphi(x_0) = -\max_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$, significherebbe $\varphi(x_0) = \min_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$ altrimenti ci sarebbero valori più piccoli di $\varphi(x_0)$ raggiunti da φ e quindi ci sarebbero valori più grandi di $|\varphi(x_0)|$ raggiunti da $|\varphi|$, cosa impossibile per ipotesi. (b) Il valore massimo che la funzione $|\varphi|$ assume è, cambiato di segno, il minimo di φ ; in questo caso la condizione $|\varphi(x_0)| = \max_{\overline{B_R(x_0)}} |\varphi|$ equivale a dire $\varphi(x_0) = \pm \min_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$. Se risultasse $\varphi(x_0) = -\min_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$, significherebbe $\varphi(x_0) = \max_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$ altrimenti ci sarebbero valori più grandi di $\varphi(x_0)$ raggiunti da φ e quindi ci sarebbero valori più grandi di $|\varphi(x_0)|$ raggiunti da $|\varphi|$, cosa impossibile per ipotesi.)

Sia dunque $\varphi(x_0) = \max_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$, dimostriamo che $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ per ogni $x \in B_R(x_0)$, per continuità ciò varrà anche per $x \in \partial B_R(x_0)$.

Supponiamo *per assurdo* che esista $x_1 \in B_R(x_0)$ con $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_0)$, per le ipotesi fatte, deve essere $\varphi(x_1) < \varphi(x_0)$. Fissiamo $R' > 0$ con $R' < R$ tale che $x_1 \in B_{R'}(x_0)$. φ sarà armonica su tutto $\overline{B_{R'}(x_0)}$. Per la continuità di φ , scegliendo $0 < \epsilon < |\varphi(x_0) - \varphi(x_1)|$, esisterà una palla aperta $B_\delta(x_1) \subset B_{R'}(x_0)$ centrata in x_1 e di raggio $\delta > 0$ tale che $|\varphi(x) - \varphi(x_1)| < \epsilon$ se $x \in B_\delta(x_1)$. Di conseguenza, se $x \in B_\delta(x_1)$, vale anche: $\varphi(x) < \varphi(x_0)$. In particolare varrà $\varphi(x) < \varphi(x_0)$, se $x \in K := \overline{B_{\delta/2}(x_1)}$ dato che $\overline{B_{\delta/2}(x_1)} \subset B_\delta(x_1)$. Applichiamo il teorema della media volumetrica alla palla $B_{R'}(x_0)$:

$$\text{Vol}(B_{R'}(x_0)) \varphi(x_0) = \int_{B_{R'}(x_0)} \varphi d^n x = \int_{B_{R'}(x_0) \setminus K} \varphi d^n x + \int_K \varphi d^n x. \quad (3.9)$$

K è compatto per costruzione e quindi esiste $\max_K \varphi$, con $\max_K \varphi < \varphi(x_0)$ per costruzione di K . Quindi

$$\int_K \varphi d^n x \leq \left(\max_K \varphi \right) \int_K d^n x < \varphi(x_0) \int_K d^n x.$$

Dato che vale anche, essendo $\varphi(x_0)$ il valore massimo di φ ,

$$\int_{B_{R'}(x_0) \setminus K} \varphi d^n x \leq \varphi(x_0) \int_{B_{R'}(x_0) \setminus K} d^n x,$$

da (3.9) segue subito che:

$$\text{Vol}(B_{R'}(x_0)) \varphi(x_0) < \varphi(x_0) \int_{B_{R'}(x_0) \setminus K} d^n x + \varphi(x_0) \int_K d^n x = \varphi(x_0) \left(\int_{B_{R'}(x_0) \setminus K} d^n x + \int_K d^n x \right),$$

ossia

$$\text{Vol}(B_{R'}(x_0)) \varphi(x_0) < \text{Vol}(B_{R'}(x_0)) \varphi(x_0),$$

che è assurdo e, pertanto, il punto x_1 con $\varphi(x_1) < \varphi(x_0)$ non può esistere in $B_{R'}(x_0)$ e quindi nemmeno in $B_R(x_0)$. \square

Il risultato appena dimostrato ci consente di estendere il principio del massimo, nel senso forte appena visto, a funzioni armoniche su regioni Ω diverse da un palla.

Teorema 3.5. (Principio del massimo forte.) *Sia Ω aperto, connesso a chiusura compatta in \mathbb{R}^n e sia $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ armonica su Ω . Se vale una delle seguenti condizioni per qualche $x_0 \in \Omega$:*

- (i) $\varphi(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} \varphi$, oppure
- (ii) $\varphi(x_0) = \min_{\overline{\Omega}} \varphi$, oppure
- (iii) $|\varphi(x_0)| = \max_{\overline{\Omega}} |\varphi|$,

allora φ è costante e vale ovunque $\varphi(x_0)$ su $\overline{\Omega}$. \diamond

Dimostrazione. Dimostriamo la tesi nel caso in cui sia verificata la prima ipotesi. Se vale l'ipotesi (ii), allora possiamo ricadere in (i) cambiando segno a φ , mentre se vale (iii), allora si ricade in (i) o in (ii) con lo stesso ragionamento del lemma precedente. Notiamo infine che è sufficiente mostrare la validità della tesi in Ω , perché da questa segue, per la continuità di φ , la tesi in $\overline{\Omega}$.

Dato che $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e connesso, allora è connesso per archi continui. Sia dunque $x_1 \in \Omega$ e $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ continua con $\gamma(a) = x_0$, $\gamma(b) = x_1$. Mostriamo che $\varphi(x_1) = \varphi(x_0)$. Ciò prova la tesi per l'arbitrarietà di $x_1 \in \Omega$. Assumendo la validità di (i), per ogni palla di raggio finito $B_R(x_0)$ centrata in x_0 e con $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ deve anche evidentemente essere:

$$\varphi(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} \varphi = \max_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi.$$

Applicando il teorema precedente concludiamo che $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ per ogni $x \in B_R(x_0)$. La controimmagine dell'aperto $B_R(x_0)$ secondo la funzione continua γ deve essere un aperto (relativamente alla topologia di $[a, b]$ indotta da \mathbb{R}) che include il punto $\gamma(a) = x_0$. Di conseguenza, ci sarà un intervallo $[a, \epsilon)$, con $a < \epsilon \leq b$ e con $\gamma(t) \in B_R(x_0)$ se $t \in [a, \epsilon)$, per cui $\varphi(\gamma(t)) = \varphi(x_0)$ se $t \in [a, \epsilon)$. L'insieme

$$S = \{s \in (a, b] \mid \varphi(\gamma(u)) = \varphi(x_0) \text{ per } u \in [a, s)\}$$

è non vuoto (per quanto appena dimostrato $\epsilon \in S$) ed è limitato superiormente da $b < \infty$, quindi esiste $L = \sup S \leq b$.

Supponiamo per assurdo che $L < b$, in tal caso $\varphi(\gamma(t)) = \varphi(x_0)$ per $t \in [a, L)$ e per continuità $\varphi(\gamma(L)) = \varphi(x_0)$. Esisterà dunque una palla centrata in $\gamma(L)$ e di raggio $\rho > 0$, che indichiamo con $B_\rho(\gamma(L)) \subset \Omega$, tale che² $\overline{B_\rho(\gamma(L))} \subset \Omega$. Come prima:

$$\varphi(\gamma(L)) = \max_{\overline{\Omega}} \varphi = \max_{\overline{B_\rho(\gamma(L))}} \varphi.$$

e quindi $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ costantemente su $B_\rho(\gamma(L))$. Come prima, la controimmagine della palla aperta $B_\rho(\gamma(L))$ secondo la funzione continua γ è un aperto che contiene L per costruzione. Su tale aperto $\varphi(\gamma(t)) = \varphi(x_0)$. In particolare dovrà dunque valere $\varphi(\gamma(t)) = \varphi(x_0)$ in

²Una palla aperta di raggio $r > 0$, centrata in $\gamma(L)$ ed inclusa in Ω esiste sicuramente perchè $\gamma(L) \in \Omega$ che è aperto. La palla concentrica alla precedente, ma di raggio $\rho := r/2$, è quella che cerchiamo.

un intorno *destro* di L , per cui L non può essere il sup di S e siamo quindi giunti ad un assurdo. Dovrà dunque essere $L = b$ e pertanto $\varphi(\gamma(t)) = \varphi(x_0)$ se $t \in [a, b)$. Per continuità: $\varphi(x_1) = \varphi(\gamma(b)) = \varphi(x_0)$. \square

Osservazioni 3.3.

(1) Abbiamo dato una dimostrazione del principio del massimo forte senza usare il fatto che le funzioni armoniche sono analitiche reali (risultato che non abbiamo dimostrato completamente) e quindi soddisfano la proposizione 3.3. La dimostrazione del principio del massimo forte segue infatti facilmente dalla proposizione 3.3 osservando che, nelle ipotesi del teorema 3.5, la funzione φ è sicuramente costante in una palla aperta $B_R(x_0) \subset \Omega$ come provato nella parte iniziale della dimostrazione data sopra. In virtù del fatto che Ω è aperto e connesso con $B_R(x_0) \subset \Omega$, dalla proposizione 3.3 segue allora che, su tutto Ω , φ deve coincidere con la funzione ψ che vale costantemente $\varphi(x_0)$ (ed è quindi armonica) dato che $\varphi|_{B_R(x_0)} \equiv \psi|_{B_R(x_0)}$.

(2) La proposizione 3.3 consente di rafforzare ulteriormente l'enunciato del principio del massimo forte come segue, riferendosi all'esistenza di punti estremali locali. Ricordiamo che $x_0 \in \Omega$ è, rispettivamente, un punto di **massimo locale** o di **minimo locale** per la funzione f a valori reali e definita sull'aperto Ω , se esiste un intorno aperto $J \subset \Omega$ di x_0 tale che $\max f|_J = f(x_0)$ o, rispettivamente, $\min f|_J = f(x_0)$.

Corollario del principio del massimo forte. *Sia Ω aperto, connesso a chiusura compatta in \mathbb{R}^n e sia $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ armonica su Ω . Se vale una delle seguenti condizioni per qualche $x_0 \in \Omega$:*

- (i) x_0 è un punto di massimo locale per φ , oppure
 - (ii) x_0 è un punto di minimo locale per φ , oppure
 - (iii) x_0 è un punto di massimo locale per $|\varphi|$
- allora φ è costante e vale ovunque $\varphi(x_0)$ su $\overline{\Omega}$. \diamond

Dimostrazione. È sufficiente provare la tesi nel caso (i), dato che gli altri due casi si riducono a questo. Per ipotesi esiste una palla aperta $B \subset \overline{B} \subset \Omega$ centrata in x_0 su cui $\varphi(x_0)$ è il valore massimo raggiunto da φ in \overline{B} . Il principio del massimo forte implica che φ sia costantemente uguale a $\varphi(x_0)$ su B . La proposizione 3.3 implica infine che su Ω e quindi, per continuità, su tutto $\overline{\Omega}$, la funzione φ debba coincidere con la funzione armonica in Ω che vale costantemente $\varphi(x_0)$ su $\overline{\Omega}$. \square

3.2.4 Teorema di Liouville per le funzioni armoniche in \mathbb{R}^n .

Come ultimo risultato, che segue dal teorema della media e dal fatto che le funzioni armoniche sono di classe C^∞ (per la dimostrazione è sufficiente C^3), si ha il seguente teorema.

Teorema 3.6. (Teorema di Liouville per funzioni armoniche.) *Ogni funzione armonica su tutto \mathbb{R}^n limitata superiormente oppure inferiormente su \mathbb{R}^n è costante.* \diamond

Dimostrazione. Se $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è armonica e limitata inferiormente, sia $\phi(x) := \varphi(x) - \inf_{\mathbb{R}^n} \varphi$ per $x \in \mathbb{R}^n$. ϕ è armonica e non negativa. Se deriviamo ϕ rispetto a x^k avremo ancora una funzione armonica per costruzione (si tenga conto del fatto che $\phi \in C^\infty$ essendo essa armonica). Possiamo usare la formula della media volumetrica su una palla $B_r(x_0)$ centrata in x_0 di raggio finito $r > 0$ arbitrario:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^k}(x_0) = \frac{1}{\text{Vol}B_r(x_0)} \int_{B_r(x_0)} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} d^n x = \frac{1}{\text{Vol}B_r(x_0)} \int_{B_r(x_0)} \nabla \cdot (\phi \mathbf{e}_k) d^n x = \frac{1}{\text{Vol}B_r(x_0)} \int_{+\partial B_r(x_0)} \phi n^k dS,$$

dove abbiamo usato il teorema di Gauss, \mathbf{e}_i è l' i -esimo versore della base canonica di \mathbb{R}^n e n^k è la k -esima componente di \mathbf{n} uscente da ∂B . Quindi:

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial x^k}(x_0) \right| = \left| \frac{1}{\text{Vol}B_r(x_0)} \int_{+\partial B_r(x_0)} \phi n^k dS \right| \leq \frac{1}{\text{Vol}B_r(x_0)} \int_{+\partial B_r(x_0)} |\phi n^k| dS.$$

Dato che $\phi \geq 0$ e $|n^k| \leq 1$, abbiamo infine la stima:

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial x^k}(x_0) \right| \leq \frac{1}{\text{Vol}B_r(x_0)} \int_{+\partial B_r(x_0)} \phi dS.$$

Applicando al secondo membro il teorema della media superficiale abbiamo anche che:

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial x^k}(x_0) \right| \leq \frac{\text{Vol}\partial B_r(x_0)}{\text{Vol}B_r(x_0)} \phi(x_0).$$

Ossia, dato che il rapporto a secondo membro vale n/r :

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial x^k}(x_0) \right| \leq \frac{n}{r} \phi(x_0).$$

Dato che $r > 0$ può essere scelto arbitrariamente grande (il dominio di φ è tutto \mathbb{R}^n) otteniamo che deve necessariamente essere:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^k}(x_0) = 0 \quad \text{per ogni } x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Dato che \mathbb{R}^n è connesso e che quanto scritto sopra vale per ogni derivata, concludiamo che ϕ , e dunque φ , deve essere costante su \mathbb{R}^n . Se φ è limitata superiormente, si può ripetere la stessa dimostrazione usando $-\varphi$. \square

La dimostrazione contiene un risultato che è utile menzionare separatamente in un lemma.

Lemma 3.2. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto e $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione armonica. Se $x \in \Omega$ e $B_r(x) \subset \Omega$ è una palla aperta centrata in x di raggio $r > 0$ tale che $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, allora vale per la derivata k -esima, $k = 1, 2, \dots, n$:*

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}(x) \right| \leq \frac{n}{r} (\varphi(x) - \min_{\overline{B_r(x)}} \varphi),$$

e

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}(x) \right| \leq \frac{n}{r} (\max_{B_r(x)} \varphi - \varphi(x)).$$

◇

Capitolo 4

Funzioni di Green e costruzione di soluzioni del problema di Dirichlet.

In questo capitolo mostreremo come costruire soluzioni del problema di Dirichlet per domini Ω specifici, usando soluzioni opportune, simili alle soluzioni fondamentali (ma che tengono conto del dominio Ω) dette *funzioni di Green e nuclei di Poisson*. Questo approccio è sicuramente interessante, in particolare per il significato fisico (carica immagine) e per gli sviluppi che ha avuto nella fisica matematica in riferimento a problemi di natura completamente diversa. Tuttavia, da un punto di vista puramente matematico, si tratta di un metodo che non si riesce a generalizzare nel caso di domini abbastanza arbitrari e ad equazioni differenziali di tipo ellittico non a coefficienti costanti. Le tecniche moderne di costruzione della soluzione di problemi con dati al contorno per equazioni ellittiche, sono basate su altri approcci in cui la soluzione viene cercata e costruita in spazi funzionali *deboli* (soluzioni nel senso delle *distribuzioni in spazi di Sobolev*) e poi viene provata la regolarità di tali soluzioni (sfruttando proprietà di regolarità specifiche degli operatori ellittici [RS75] in Appendice A abbiamo dato qualche ulteriore dettaglio).

4.1 Ancora sul problema di Dirichlet.

Consideriamo il problema di Dirichlet in una regione $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto a chiusura $\bar{\Omega}$ compatta per $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = f, & f \in C^0(\Omega) \text{ funzione assegnata,} \\ \varphi|_{\partial\Omega} = \psi & \psi \in C^0(\partial\Omega) \text{ funzione assegnata.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Se $\partial\Omega$ è una superficie chiusa regolare orientabile allora abbiamo a disposizione un'identità, la (3.4), che ci permette di esprimere la soluzione φ , *se esiste*, in funzione dei valori che φ e il suo gradiente $\nabla\varphi$ assumono su $\partial\Omega$. Infatti vale:

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} G_n(x, y) \Delta_y \varphi d^n y - \oint_{+\partial\Omega} G_n(x, y) \nabla_y \varphi(y) \cdot \mathbf{n} dS(y) +$$

$$+ \oint_{+\partial\Omega} \nabla_y G_n(x, y) \cdot \mathbf{n} \varphi(y) dS(y), \quad (4.2)$$

da cui:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \int_{\Omega} G_n(x, y) f(y) d^n y - \oint_{+\partial\Omega} G_n(x, y) \nabla_y \varphi(y) \cdot \mathbf{n} dS(y) + \\ & + \oint_{+\partial\Omega} \nabla_y G_n(x, y) \cdot \mathbf{n} \psi(y) dS(y). \end{aligned}$$

Questa formula non può tuttavia essere utilizzata per *determinare* la soluzione al problema assegnato perchè per utilizzarla per conoscere φ in ogni punto di Ω è necessario conoscere *anche* $\nabla\varphi$ su $\partial\Omega$, che non è noto dalle condizioni al contorno. Per un problema con condizioni al contorno di Neumann si avrebbe lo stesso problema in quanto non sarebbero noti i valori che φ assume su $\partial\Omega$.

Osservazioni 4.1. Se, oltre ai valori di φ su $\partial\Omega$, fossero assegnati anche valori di $\nabla\varphi$ su $\partial\Omega$ (ad esempio $\nabla\varphi \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \psi_1$), e tentassimo di usare l'espressione (4.2) per scrivere una possibile soluzione,

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \int_{\Omega} G_n(x, y) f(y) d^n y - \oint_{+\partial\Omega} G_n(x, y) \psi_1(y) dS(y) \\ & + \oint_{+\partial\Omega} \nabla_y G_n(x, y) \cdot \mathbf{n} \psi(y) dS(y) \end{aligned} \quad (4.3)$$

in generale avremmo che la funzione φ così calcolata *non* risolverebbe il problema:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = f \text{ funzione assegnata,} \\ \varphi|_{\partial\Omega} = \psi \text{ funzione assegnata,} \\ \nabla\varphi \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \psi_1 \text{ funzione assegnata.} \end{cases} \quad (4.4)$$

Infatti, dai teoremi di unicità per il problema di Dirichlet e Neumann, sappiamo che in generale questo problema *non può ammettere soluzione* assegnando $\varphi|_{\partial\Omega}$ e $\nabla\varphi|_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n}$ contemporaneamente e arbitrariamente.

4.1.1 Funzioni di Green e nuclei di Poisson.

Per usare (4.2) al fine di scrivere la soluzione del problema di Dirichlet in funzione dei dati al bordo, possiamo cercare di modificare G_n in modo da far sparire in (4.2) il termine contenente il gradiente di φ e cercare di usare i soli dati di Dirichlet. In questo modo potremmo riuscire a produrre un candidato della soluzione del problema. Con un problema di Neumann si può procedere similmente. Abbiamo la seguente proposizione che ci porta verso la direzione voluta.

Proposizione 4.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto non vuoto a chiusura compatta e con bordo dato da una superficie regolare orientabile. Sia $\{v_{\Omega}(x, \cdot)\}_{x \in \Omega} \subset C^2(\overline{\Omega})$ una classe di soluzioni dell'equazione:

$$\Delta_y v_{\Omega}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega \times \Omega$$

per le quali valga anche:

$$v_\Omega(x, y) + G_n(x, y) = 0, \quad \text{se } x \in \Omega \text{ e } y \in \partial\Omega.$$

Allora valgono i fatti seguenti.

(a) Per ogni funzione $\varphi \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ con $\nabla\varphi$ e $\Delta\varphi$ limitate su Ω , vale:

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} G_\Omega(x, y)\Delta\varphi(y)d^n y + \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x, y)\varphi(y)dS(y), \quad \text{per ogni } x \in \Omega, \quad (4.5)$$

dove $G_\Omega(x, y) := G_n(x, y) + v_\Omega(x, y)$ e $N_\Omega(x, y) := \nabla_y G_\Omega(x, y) \cdot \mathbf{n}|_{y \in \partial\Omega}$ (con \mathbf{n} versore uscente da $\partial\Omega$) sono detti rispettivamente la **funzione di Green** ed il **nucleo di Poisson** per il problema di Dirichlet del laplaciano su Ω .

(b) Per ogni fissato $x \in \Omega$, $\Omega \setminus \{x\} \ni y \mapsto G_\Omega(x, y)$ si estende ad una funzione $C^2(\overline{\Omega} \setminus \{x\})$, armonica su $\overline{\Omega} \setminus \{x\}$ e nulla su $\partial\Omega$.

(c) Se $(x, y) \in \Omega \times \Omega$, allora

$$v_\Omega(x, y) = v_\Omega(y, x) \quad \text{e, se } x \neq y, \quad G_\Omega(y, x) = G_\Omega(x, y).$$

In particolare, quindi per ogni fissato $y \in \Omega$, $\Omega \setminus \{y\} \ni x \mapsto G_\Omega(x, y)$ si estende univocamente per continuità ad una funzione $C^2(\overline{\Omega} \setminus \{y\})$, armonica su $\overline{\Omega} \setminus \{y\}$ e nulla su $\partial\Omega$. \diamond

Dimostrazione. (a) Fissiamo $x \in \Omega$ e quindi scegliamo un nuovo dominio Ω_ϵ , con le stesse caratteristiche di Ω , ma tale che $\overline{\Omega_\epsilon}$ è strettamente contenuto in Ω . Assumiamo che, per $\epsilon \rightarrow 0$, Ω_ϵ invada Ω . Dato che, se $x \in \Omega$ è fissato, vale $\Delta_y v_\Omega(x, y) = 0$ quando $y \in \overline{\Omega}$, pertanto:

$$\int_{\Omega_\epsilon} \varphi(y)\Delta_y v_\Omega(x, y)d^n y = 0$$

per ogni funzione $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Se ammettiamo che $\varphi \in C^2(\Omega)$, dalla seconda identità di Green abbiamo come conseguenza:

$$0 = \int_{\Omega_\epsilon} v_\Omega(x, y)\Delta_y \varphi(y)d^n y + \oint_{+\partial\Omega_\epsilon} \varphi(y)\nabla_y v_\Omega(x, y) \cdot \mathbf{n}dS(y) - \oint_{+\partial\Omega_\epsilon} v_\Omega(x, y)\nabla_y \varphi(y) \cdot \mathbf{n}dS(y).$$

Sommando membro a membro con (4.2) calcolata su Ω_ϵ e definendo $G_\Omega(x, y) = G_n(x, y) + v_\Omega(x, y)$, si ha:

$$\varphi(x) = \int_{\Omega_\epsilon} G_\Omega(x, y)\Delta_y \varphi(y)d^n y + \oint_{+\partial\Omega_\epsilon} N_\Omega(x, y)\varphi(y)dS(y) - \oint_{+\partial\Omega_\epsilon} G_\Omega(x, y)\nabla_y \varphi(y) \cdot \mathbf{n}dS(y)$$

dove $N_\Omega(x, y) := \nabla_y G_\Omega(x, y) \cdot \mathbf{n}|_{y \in \partial\Omega}$. Se ora assumiamo che $\varphi \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ e che $\nabla\varphi$ e $\Delta\varphi$ siano limitati su Ω , possiamo calcolare il limite per $\epsilon \rightarrow 0$ usando il teorema della convergenza dominata, ottenendo

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} G_\Omega(x, y)\Delta_y \varphi(y)d^n y + \oint_{+\partial\Omega} N_\Omega(x, y)\varphi(y)dS(y),$$

dove abbiamo trascurato il contributo dovuto all'ultimo integrale di bordo che vale zero nelle nostre ipotesi in quanto $G_\Omega(x, y) = 0$ se $y \in \partial\Omega$.

(b) La dimostrazione è ovvia per definizione di G_Ω , dalle proprietà note di v_Ω e G_n .

(c) Fissiamo $x_1, x_2 \in \Omega$ con $x_1 \neq x_2$ e consideriamo il volume, con ovvie notazioni, $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus (B_\epsilon(x_1) \cup B_\epsilon(x_2))$. Su tale volume le funzioni: $y \mapsto G_\Omega(x_1, y)$ e $y \mapsto G_\Omega(x_2, y)$ sono regolari, armoniche e si annullano sul bordo esterno di Ω_ϵ , dato da $\partial\Omega$. In conseguenza dell'armonicità:

$$0 = \int_{\Omega_\epsilon} (G_\Omega(x_1, y)\Delta_y G_\Omega(x_2, y) - G_\Omega(x_2, y)\Delta_y G_\Omega(x_1, y)) d^n y.$$

Applicando la seconda identità di Green al secondo membro scritto sopra e tenendo conto che il contributo dovuto all'integrale di superficie su $\partial\Omega$ si annulla dato che $G_\Omega(x_1, y) = G_\Omega(x_2, y) = 0$ se $y \in \partial\Omega$, otteniamo che:

$$\begin{aligned} & \oint_{+\partial B_\epsilon(x_1)} G_\Omega(x_1, y) \mathbf{n} \cdot \nabla_y G_\Omega(x_2, y) dS(y) - \oint_{+\partial B_\epsilon(x_1)} G_\Omega(x_2, y) \mathbf{n} \cdot \nabla_y G_\Omega(x_1, y) dS(y) \\ & + \oint_{+\partial B_\epsilon(x_2)} G_\Omega(x_1, y) \mathbf{n} \cdot \nabla_y G_\Omega(x_2, y) dS(y) - \oint_{+\partial B_\epsilon(x_2)} G_\Omega(x_2, y) \mathbf{n} \cdot \nabla_y G_\Omega(x_1, y) dS(y) = 0. \end{aligned}$$

Si osservi che la divergenza che si ha nel primo integrale per $\epsilon \rightarrow 0^+$ è unicamente dovuta alla divergenza di $G_n(x_1, y)$ per $y \rightarrow x_1$. Fissando coordinate polari centrate in x_1 , tale divergenza è di ordine ϵ^{2-n} se $n > 2$ oppure $\ln \epsilon$ se $n = 2$. Tuttavia l'area della superficie $\partial B_\epsilon(x_1)$ tende a zero con rapidità ϵ^{n-1} oppure ϵ rispettivamente. Da ciò si conclude che il primo integrale tende a 0 per $\epsilon \rightarrow 0^+$. Lo stesso discorso vale per il quarto integrale. Nel secondo integrale, la divergenza è invece dovuta a $\mathbf{n} \cdot \nabla_y G_n(x_1, y)$, $y \rightarrow x_1$. Usando un sistema di coordinate polari centrate in x_1 si vede che $\mathbf{n} \cdot \nabla_y G_n(x_1, y) = 1/\text{vol}(\partial B_\epsilon(x_1))$ come già osservato nella dimostrazione di (c) del teorema 3.1. Tale divergenza si compensa esattamente con il limite a 0 dell'area della superficie $\partial_\epsilon(x_1)$ quando $\epsilon \rightarrow 0^+$, lo stesso discorso vale per il secondo integrale. (Si osservi che il contributo dovuto ai termini $v_\Omega(x, y)$ è sempre nullo nel limite per $\epsilon \rightarrow 0^+$ dato che tali funzioni sono regolari nel dominio considerato e vengono integrate su domini di misura che tende a zero.) Ragionando nella dimostrazione di (c) del teorema 3.1 si verifica facilmente che, prendendo il limite per $\epsilon \rightarrow 0^+$ si ottiene un valore finale dato dai seguenti contributi:

$$0 - G_\Omega(x_2, x_1) + G_\Omega(x_1, x_2) + 0 = 0.$$

Da cui: $G_\Omega(x_2, x_1) = G_\Omega(x_1, x_2)$. Dato che vale anche $G_n(x_2, x_1) = G_n(x_1, x_2)$ per definizione, concludiamo che $v_\Omega(x_2, x_1) = v_\Omega(x_1, x_2)$ quando $x_1 \neq x_2$. Questa identità per v_Ω vale banalmente anche nel caso $x_1 = x_2$, dato che $v_\Omega(x, x)$ è definita per ogni $x \in \Omega$.

Si osservi infine che, per definizione, per ogni $x \in \Omega$, $y \mapsto G_\Omega(x, y)$ è una funzione $C^2(\bar{\Omega} \setminus \{x\})$, armonica e nulla su $\partial\Omega$. Pertanto per ogni $y \in \Omega$, $\Omega \ni x \mapsto G_\Omega(x, y) = G_\Omega(y, x)$ si estende univocamente per continuità ad una funzione $C^2(\bar{\Omega} \setminus \{y\})$, armonica e nulla su $\partial\Omega$. \square

L'espressione (4.5) fornisce φ in termini delle sole quantità assegnate in un problema di Dirichlet su Ω . Tale formula può essere usata per determinare la soluzione del problema di Dirichlet.

Sussiste infatti il seguente teorema.

Teorema 4.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto, non vuoto, a chiusura compatta e con bordo dato da una superficie regolare orientabile. Sia G_Ω una funzione di Green per il laplaciano su Ω con nucleo di Poisson N_Ω . Se valgono i seguenti fatti:*

- (i) *la funzione $v_\Omega := G_\Omega - G_n$ è di classe $C^3(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \setminus \Delta)$, dove abbiamo definito $\Delta := \{(x, x) \mid x \in \partial\Omega\}$, e*
- (ii) *vale l'identità :*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x, y) \psi(y) dS(y) = \psi(x_0), \quad \text{per ogni } \psi \in C^0(\partial\Omega) \text{ e ogni } x_0 \in \partial\Omega, \quad (4.6)$$

allora valgono i due seguenti fatti.

(a) *la funzione:*

$$\varphi(x) := \int_{\Omega} G_\Omega(x, y) f(y) d^n y + \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x, y) \psi(y) dS(y), \quad \text{per } x \in \Omega \quad (4.7)$$

estesa per continuità su $\bar{\Omega}$ è soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta\varphi = f, \\ \varphi|_{\partial\Omega} = \psi, \end{cases} \quad (4.8)$$

per ogni scelta delle funzioni assegnate $f \in C_0^2(\Omega)$ e $\psi \in C^0(\partial\Omega)$.

(b) *La funzione di Green G_Ω per il laplaciano su Ω è l'unica soddisfacente (i) e (ii), ed è quindi unico il nucleo di Poisson, a meno di ridefinizione nei punti dell'insieme Δ . \diamond*

Dimostrazione. (a) Fissato un qualsiasi $x' \in \Omega$ si consideri una palla aperta $B(x') \subset \Omega$ con $\overline{B(x')} \subset \Omega$. La funzione $\overline{B(x')} \times \text{supp} f \ni (x, y) \mapsto v(x, y) f(y)$ è limitata e lo sono tutte le sue derivate in x di ogni ordine (essendo tale funzione con le sue derivate continue su un compatto), dunque esisterà una funzione costante $g \geq$ definita sull'insieme, di misura finita per ipotesi, Ω , e tale funzione maggiora i valori assoluti delle derivate in x fino al secondo ordine di $u(x, y) f(y)$ per tutti i valori di $y \in \Omega$ uniformemente in $x \in B(x')$. Possiamo allora derivare sotto il segno di integrale in $x \in B(x')$ due volte ottenendo, da (b) del lemma 4.1

$$\Delta_x \int_{\Omega} v(x, y) f(y) d^n y = \int_{\Omega} \Delta_x v(x, y) f(y) d^n y = 0.$$

Similmente, dato che f ha supporto compatto e pertanto

$$\int_{\Omega} G_n(x, y) f(y) d^n y = \int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) f(y) d^n y$$

Per (d) del teorema 3.1 abbiamo che:

$$\Delta_x \int_{\Omega} G_n(x, y) f(y) d^n y = f(x).$$

Mettendo tutto insieme abbiamo ottenuto che:

$$\Delta_x \int_{\Omega} G_{\Omega}(x, y) f(y) d^n y = f(x).$$

La funzione $\overline{B(x')} \times \partial\Omega \ni (x, y) \mapsto N_{\Omega}(x, y) f(y)$ è derivabile in x e le sue derivate sono limitate, essendo funzioni continue su un compatto: per costruzione $x \neq y$ lavorando nell'insieme detto. Come prima possiamo derivare due volte sotto il segno di integrale ottenendo

$$\Delta_x \oint_{\partial\Omega} N_{\Omega}(x, y) \psi(y) dS(y) = \oint_{\partial\Omega} \Delta_x N_{\Omega}(x, y) \psi(y) dS(y) = 0,$$

dato che possiamo applicare il teorema di Schwartz, essendo v di classe C^3 e G_n di classe C^{∞} (per argomenti non coincidenti):

$$\Delta_x \mathbf{n} \cdot \nabla G_{\Omega}(x, y) = \mathbf{n} \cdot \nabla \Delta_x G_{\Omega}(x, y) = 0$$

in quanto $G_{\Omega}(x, y)$ è, per costruzione, armonica in x se $x \neq y$. In definitiva

$$\Delta_x \left(\int_{\Omega} G_{\Omega}(x, y) f(y) d^n y + \oint_{\partial\Omega} N_{\Omega}(x, y) \psi(y) dS(y) \right) = f(x).$$

La funzione φ è quindi in $C^2(\Omega)$ per costruzione (anzi è in $C^4(\Omega)$).

Se $B(x_0)$ è una palla aperta centrata in $x_0 \in \partial\Omega$ tale che $\partial B(x_0) \cap \text{supp } f = \emptyset$, la funzione $(x, y) \mapsto G_{\Omega}(x, y) f(y)$ per $(x, y) \in (\overline{B(x_0)} \cap \overline{\Omega}) \times \Omega$ è continua con supporto compatto incluso in $(\overline{B(x_0)} \cap \overline{\Omega}) \times \text{supp } f$ (le singolarità di G_{Ω} per $x = y$ non hanno effetto visto che tali punti sono fuori dal supporto). Sia $K \geq 0$ una costante che maggiora $(x, y) \mapsto G_{\Omega}(x, y) f(y)$ sul dominio detto. La funzione $\Omega \ni y \mapsto K$ è integrabile dato che Ω ha chiusura compatta. Possiamo allora applicare il teorema della convergenza dominata e concludere che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_{\Omega} G_{\Omega}(x, y) f(y) d^n y = \int_{\Omega} \lim_{x \rightarrow x_0} G_{\Omega}(x, y) f(y) d^n y = 0,$$

dove abbiamo usato il fatto che $\lim_{x \rightarrow x_0} G_{\Omega}(x, y) = G_{\Omega}(x_0, y) = G_{\Omega}(y, x_0) = 0$ quando $x_0 \in \partial\Omega$ e $y \in \Omega$. Se infine vale anche la condizione 4.6, allora φ definita in (4.7) ed estesa su $\partial\Omega$ come $\varphi(x) := \psi(x)$ è continua su $\overline{\Omega}$ e, banalmente, soddisfa le condizioni al bordo. Mostriamone la continuità in ogni punto $x_0 \in \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Se $x_0 \in \Omega$ la funzione φ è continua in x_0 per costruzione, essendo di classe C^2 , e non c'è nulla da provare. Se invece $x_0 \in \partial\Omega$ si procede come segue. Per ogni $\epsilon > 0$ possiamo trovare un intorno aperto A_{ϵ} di x_0 tale che, se $x \in A_{\epsilon} \cap \Omega$ allora $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \epsilon$ come conseguenza di (4.6). Dato che ψ è a sua volta continua in x_0 , per ogni $\epsilon > 0$ possiamo trovare un intorno aperto A'_{ϵ} di x_0 tale che, se $x \in A'_{\epsilon} \cap \partial\Omega$ allora $|\psi(x) - \psi(x_0)| < \epsilon$. In definitiva, tenendo conto del fatto che $\varphi = \psi$ su $\partial\Omega$, se $\epsilon > 0$, esiste un intorno di $x_0 \in \partial\Omega$, $B_{\epsilon} := A_{\epsilon} \cap A'_{\epsilon}$, tale che se $x \in B_{\epsilon} \cap \overline{\Omega} = B_{\epsilon} \cap (\Omega \cup \partial\Omega)$, allora $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \epsilon$. (b) Ovviamente è sufficiente dimostrare l'unicità della funzione di Green quando è valutata per $x, y \in \Omega$ (con $x \neq y$), i rimanenti punti del bordo vengono inclusi nella dimostrazione per

continuità . Sia G'_Ω un'altra funzione di Green soddisfacente (4.6). Per ogni problema di Dirichlet (4.8), l'unica (per il teorema 2.3) soluzione φ si potrà anche scrivere come:

$$\varphi(x) := \int_{\Omega} G'_\Omega(x, y) f(y) d^n y + \oint_{\partial\Omega} N'_\Omega(x, y) \psi(y) dS(y) .$$

Se scegliamo ψ identicamente nulla su $\partial\Omega$, per differenza con (4.7) avremmo che, per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $f \in C_0^2(\Omega)$:

$$0 = \int_{\Omega} [G'_\Omega(x, y) - G_\Omega(x, y)] f(y) d^n y .$$

Supponiamo per assurdo che per fissati $x, y \in \Omega$ con $x \neq y$, $G'_\Omega(x, y) - G_\Omega(x, y) = l \neq 0$. Assumiamo senza perdere generalità $l > 0$. In una palla aperta di raggio finito B centrata in y e con x fissato, $G'_\Omega(x, y) - G_\Omega(x, y)$ si manterrebbe in $[l - \epsilon, l + \epsilon]$ con $l - \epsilon > 0$. Potremmo allora trovare una funzione $f \in C_0^2(\Omega)$ il cui supporto è contenuto in B che abbia integrale strettamente positivo pari a k . In modo tale che $\int_{\Omega} [G'_\Omega(x, y) - G_\Omega(x, y)] f(y) d^n y \geq k(l - \epsilon) > 0$ che è impossibile. Quindi $G'_\Omega(x, y) = G_\Omega(x, y)$ su $\Omega \times \Omega$ per $x \neq y$. \square

Osservazioni 4.2.

(1) Nelle ipotesi di validità del teorema precedente sappiamo risolvere, su Ω dato, *ogni* problema di Dirichlet con dati $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ e $f \in C_0^2(\Omega)$. La conoscenza della funzione di Green non permette di risolvere un problema di Dirichlet, ma *ogni* problema di Dirichlet (se valgono tutte le ipotesi richieste).

(2) La validità della condizione (4.6) è abbastanza generale. Daremo una condizione sufficiente affinché essa valga nella prossima proposizione.

(3) Cambiamenti della definizione della funzione G_Ω sull'insieme Δ non alterano, evidentemente, i risultati in (a). Si osservi che anche la relazione (4.6) è indipendente dal valore assunto da G_Ω su Δ .

Proposizione 4.2. *Nelle ipotesi del teorema 4.1, la condizione (4.6) è verificata se, per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ e per ogni palla aperta $B_\delta(x_0)$ centrata in x_0 e con raggio $\delta > 0$ vale:*

$$\oint_{\partial\Omega \setminus B_\delta(x_0)} N_\Omega(x, y) dS(y) \rightarrow 0 \quad \text{per } \Omega \ni x \rightarrow x_0 .$$

◇

Dimostrazione. La dimostrazione usa il seguente lemma:

Lemma 4.1. *Il nucleo di Poisson $N_\Omega(x, y)$ soddisfa:*

$$N_\Omega(x, y) \geq 0 \quad \text{se } x \in \Omega, y \in \partial\Omega \text{ ed anche } \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x, y) dS(y) = 1, \quad \text{per ogni } x \in \Omega. \quad (4.9)$$

◇

Dimostrazione del lemma. Infatti, se $x \in \Omega$ è fissato e $B_r(x)$ è una palla aperta di raggio r centrata in x con $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, la funzione $\Omega \setminus \overline{B_r(x)} \ni y \mapsto G_\Omega(x, y) = G_n(x, y) + v(x, y)$ è sicuramente negativa su $\partial B_r(x)$ scegliendo r sufficientemente piccolo, visto che $G_n(x, y)$ diverge a $-\infty$ quando $y \rightarrow x$, mentre $v(x, y)$ rimane limitata nell'intorno di x . Per costruzione $G_\Omega(x, y) = 0$ se $y \in \partial\Omega$. Dato che il massimo di $\Omega \setminus \overline{B_r(x)} \ni y \mapsto G_\Omega(x, y)$ è assunto sul bordo del dominio (essendo la funzione armonica nell'interno del dominio e continua sulla chiusura), concludiamo che tale massimo è sicuramente 0 e che $G_n(x, y) < 0$ nell'interno del dominio per il principio del massimo forte. Segue facilmente che $-\mathbf{n} \cdot \nabla_y G_n(x, y) \leq 0$ quando $y \in \partial\Omega$, dove $-\mathbf{n}$ punta verso l'interno: se ciò non fosse, dato che $G_n(x, y) = 0$ su $y \in \partial\Omega$, troveremmo una curva C^1 , $y = y(t)$, che entra in Ω partendo da $y(0) \in \partial\Omega$, lungo la quale $t \mapsto G_n(x, y(t))$ cresce raggiungendo valori positivi. Notiamo poi che, se $x \in \Omega$:

$$\oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x, y) dS(y) = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \nabla_y G_n(x, y) dS(y) + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \nabla_y v(x, y) dS(y).$$

Consideriamo i due integrali a secondo membro. Il secondo integrale vale 0, dato che $y \mapsto v(x, y)$ è armonica su $\overline{\Omega}$ e vale il teorema 2.8. Il primo integrale vale invece 1, applicando la formula (3.4) alla funzione g che vale costantemente 1 su \mathbb{R}^n . In definitiva:

$$\oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x, y) dS(y) = 1, \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

Questo conclude la dimostrazione. \square

Proseguendo con la dimostrazione principale, abbiamo che, in conseguenza del secondo risultato in (4.9):

$$\oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x, y) \psi(y) dS(y) = \psi(x_0) \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x, y) dS(y) + \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x, y) (\psi(y) - \psi(x_0)) dS(y).$$

In altre parole, per ogni fissata palla $B_\delta(x_0)$:

$$\oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x, y) \psi(y) dS(y) - \psi(x_0) = \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x, y) (\psi(y) - \psi(x_0)) dS(y) = A_\delta(x) + A'_\delta(x). \quad (4.10)$$

dove:

$$A_\delta(x) := \oint_{\partial\Omega \setminus B_\delta(x_0)} N_\Omega(x, y) (\psi(y) - \psi(x_0)) dS(y), \quad A'_\delta(x) := \oint_{\partial\Omega \cap B_\delta(x_0)} N_\Omega(x, y) (\psi(y) - \psi(x_0)) dS(y).$$

Consideriamo ora una successione di punti $\Omega \ni x_n \rightarrow x_0$ se $n \rightarrow +\infty$. Avremo che

$$\limsup_n \left| \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x_n, y) \psi(y) dS(y) - \psi(x_0) \right| \leq \limsup_n |A_\delta(x_n)| + \limsup_n |A'_\delta(x_n)| = \limsup_n |A'_\delta(x_n)|,$$

dato che $\limsup_n |A_\delta(x_n)| = 0$, essendo per ipotesi (usando anche il fatto che $|N_\Omega(x_n, y)| = N_\Omega(x_n, y)$):

$$|A_\delta(x_n)| \leq \sup_{y \in \partial\Omega \setminus B_\delta(x_0)} |\psi(y) - \psi(x_0)| \oint_{\partial\Omega \setminus B_\delta(x_0)} |N_\Omega(x_n, y)| dS(y) \rightarrow 0 \quad \text{se } n \rightarrow +\infty,$$

dato che $\sup_{y \in \partial\Omega \setminus B_\delta(x_0)} |\psi(y) - \psi(x_0)|$ è finito per la continuità di ψ sul compatto $\partial\Omega$.
Concludiamo che:

$$\limsup_n \left| \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x_n, y) \psi(y) dS(y) - \psi(x_0) \right| \leq \limsup_n |A'_\delta(x_n)|,$$

per ogni $\delta > 0$. Mostriamo che possiamo rendere piccolo a piacere il secondo membro scegliendo $\delta > 0$ opportunamente. Dato che ψ è continua su $\partial\Omega$, per ogni fissato $\epsilon > 0$ deve esistere $\delta > 0$ tale che $|\psi(y) - \psi(x_0)| < \epsilon$ se $y \in \partial\Omega$ con $\|y - x_0\| < \delta$ e quindi:

$$\begin{aligned} |A'_\delta(x)| &\leq \sup_{y \in \partial\Omega \cap B_\delta(x_0)} |\psi(y) - \psi(x_0)| \oint_{\partial\Omega \cap B_\delta(x_0)} |N_\Omega(x, y)| dS(y) \leq \epsilon \oint_{\partial\Omega} |N_\Omega(x, y)| dS(y) \\ &= \epsilon \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x, y) dS(y) = \epsilon. \end{aligned}$$

Il risultato vale per ogni $x \in \Omega$ e quindi anche per x_n . Concludiamo che, per ogni $\epsilon > 0$:

$$\limsup_n \left| \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x_n, y) \psi(y) dS(y) - \psi(x_0) \right| \leq \epsilon.$$

Abbiamo ottenuto che, comunque fissiamo una successione $\Omega \ni x_n \rightarrow x_0$ se $n \rightarrow +\infty$

$$0 \leq \liminf_n \left| \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x_n, y) \psi(y) dS(y) - \psi(x_0) \right| \leq \limsup_n \left| \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x_n, y) \psi(y) dS(y) - \psi(x_0) \right| \leq 0.$$

E quindi, per ogni successione $\Omega \ni x_n \rightarrow x_0$ se $n \rightarrow +\infty$, vale:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x_n, y) \psi(y) dS(y) - \psi(x_0) \right| = 0.$$

L'arbitrarietà della successione implica che vale la tesi:

$$\lim_{\Omega \ni x \rightarrow x_0} \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x, y) \psi(y) dS(y) = \psi(x_0).$$

□

4.2 Funzioni di Green per domini particolari.

Non ci occuperemo della questione generale, mentre ci occuperemo solamente di determinare le funzioni di Green ed il nucleo di Poisson per domini Ω particolari.

4.2.1 Il metodo delle cosiddette *cariche immagine*.

Al fine di ottenere una funzione di Green per un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, si deve trovare una classe di funzioni $\{v_\Omega(x, \cdot)\}_{x \in \Omega} \subset C^2(\overline{\Omega})$ (come visto nel teorema 4.1, si rinforza la richiesta di regolarità richiedendo $v_\Omega(\cdot, \cdot) \in C^3(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \setminus \Delta)$) tale che siano soddisfatte le condizioni:

$$\Delta_y v_\Omega(x, y) = 0 \quad x \in \Omega, y \in \Omega$$

e

$$G_3(x, y) + v_\Omega(x, y) = 0 \quad x \in \Omega, y \in \partial\Omega.$$

Quest'ultima condizione si scrive esplicitamente:

$$-\frac{1}{4\pi\|x-y\|} + v_\Omega(x, y) = 0 \quad x \in \Omega, y \in \partial\Omega.$$

L'intuizione fisica ci può aiutare nella ricerca della funzione $v_\Omega(x, y)$. Partiamo dal fatto che, come ben noto dai corsi di elettromagnetismo elementare, la funzione

$$\mathbb{R}^3 \ni y \mapsto \varphi(y) := \frac{e}{4\pi\|x-y\|}$$

è il *potenziale elettrostatico generato nel punto y da una carica elettrica e , puntiforme, posta nel punto x* . Il gradiente di tale campo, cambiato di segno,

$$\mathbf{E}(y) = \frac{e(y-x)}{4\pi\|x-y\|^3},$$

coincide con il campo elettrostatico generato in y dalla carica detta. Infine, seguendo la formula della forza di Lorentz (1.3) il prodotto di tale campo per la carica e' di prova posta nel punto y riproduce la **legge di Coulomb**:

$$\mathbf{F}(y) = \frac{ee'(y-x)}{4\pi\|x-y\|^3},$$

che esprime la forza elettrostatica che la carica e in x esercita sulla carica e' in y .

La condizione:

$$G_3(x, y) + v_\Omega(x, y) = 0 \quad x \in \Omega, y \in \partial\Omega,$$

dice che il potenziale elettrostatico in y totale dovuto sia ad una carica puntiforme negativa unitaria situata in x (che genera il potenziale $G_3(x, y)$ in y) unitamente ad un ulteriore potenziale incognito $v_\Omega(x, y)$, è sempre nullo sulla superficie $\partial\Omega$. Il fatto che $y \mapsto v_\Omega(x, y)$ si possa sempre pensare come un potenziale elettrostatico è dovuto alla richiesta $\Delta_y v_\Omega(x, y) = 0$ che è soddisfatta dai potenziali elettrostatici, come spiegato nella sezione 2.1, quando le sorgenti del campo non cadono nel punto y . *Quindi la determinazione della funzione $v_\Omega(x, \cdot)$ è legata alla determinazione di una configurazione di cariche, che non cada su $\partial\Omega$, in aggiunta a quella posta in x che annulli su $\partial\Omega$ il potenziale prodotto dalla carica unitaria posta in x* . Queste cariche, da aggiungersi a quella unitaria già presente in x , vengono chiamate *cariche immagine*. La dipendenza parametrica di v_Ω da x è dovuta al fatto che possiamo muovere a piacimento la carica in x e ci aspettiamo che ciò cambi la distribuzione di cariche immagine.

4.2.2 La funzione di Green nella palla in \mathbb{R}^3 .

Sia Ω la palla aperta di raggio R in \mathbb{R}^3 centrata nell'origine. Vogliamo trovare la funzione di Green per il problema interno alla sfera. Nel caso della palla, il problema di determinare le cariche immagine è molto semplice: si verifica che è sufficiente una sola altra carica da aggiungersi a quella in x al fine di annullare il potenziale in $\partial\Omega$. Se $x'(x)$ è la posizione della carica immagine di valore q_x (può dipendere da x), deve essere:

$$-\frac{1}{4\pi\|x-y\|} + \frac{q_x}{4\pi\|x'(x)-y\|} = 0 \quad y \in \partial\Omega.$$

Per la simmetria del problema ci aspettiamo che

$$x' = \lambda(x)x, \quad \text{con } |\lambda(x)|\|x\| \geq R,$$

la seconda condizione è dovuta al fatto che x' deve essere fuori da $\bar{\Omega}$ altrimenti avremmo una singolarità in più per G_Ω , mentre sappiamo che essa è singolare solo per $y = x$. In questo modo, se $x \in \Omega$ allora $x'(x) \notin \bar{\Omega}$. Si osservi ancora che, per ogni $x \in \Omega$ fissato, cioè x' fissato, la funzione

$$v_\Omega(x, y) := \frac{q_x}{4\pi\|x'(x)-y\|}$$

è C^∞ ed armonica nella variabile $y \in \Omega$ proprio come richiesto, dato che non è altro che la funzione $y \mapsto q_x G_3(x'(x), y)$. Questa funzione, al variare di $y \in \mathbb{R}^3$ è di classe C^∞ se $y \neq x'$ ed è anche armonica in tale insieme.

Se il metodo funziona si deve avere l'annullamento del potenziale totale su $\partial\Omega$, in particolare nei due punti y_1 e y_2 intersezione della retta congiungente x e x' con $\partial\Omega$:

$$\begin{cases} -\frac{1}{4\pi(R-\|x\|)} + \frac{q_x}{4\pi(\|x'(x)\|-R)} = 0 \\ -\frac{1}{4\pi(\|x\|+R)} + \frac{q_x}{4\pi(\|x'(x)\|+R)} = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

In questo modo si ottiene, se $\|x\| < R$:

$$\begin{cases} \|x'(x)\|\|x\| = R^2, \\ q_x = \frac{R}{\|x\|}. \end{cases} \quad (4.12)$$

Dalla prima equazione ricaviamo che

$$|\lambda(x)| = \frac{R^2}{\|x\|^2},$$

in modo tale che, come richiesto, $\|x\|\lambda = R^2/\|x\| \geq R$ se $\|x\| \leq R$. Assumendo $\lambda > 0$, ci aspettiamo che la funzione di Green cercata sia:

$$G_\Omega(x, y) = -\frac{1}{4\pi\|x-y\|} + \frac{R\|x\|}{4\pi\|R^2x - \|x\|^2y\|} \quad (4.13)$$

La funzione $v_\Omega(x, y) = G_\Omega(x, y) - G_n(x, y)$ soddisfa $\Delta_y v_\Omega(x, y) = 0$ dove non è singolare, essendo per costruzione, una soluzione fondamentale nelle variabili x' e y :

$$v_\Omega(x, y) := \frac{q_x}{4\pi\|x'(x) - y\|}$$

Ciò accade in particolare per $x \in \Omega$ e $y \in \bar{\Omega}$ come richiesto nella definizione di funzione di Green. Infatti, più fortemente si può provare che v_Ω è di classe C^∞ su $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ se si escludono i punti (x, y) con $x = y \in \partial\Omega$. Questo risultato si ottiene facilmente se si nota che, esplicitando i calcoli, e dove $\alpha(x, y)$ è l'angolo tra x e y :

$$v_\Omega(x, y) = \frac{R}{4\pi\sqrt{R^4 + \|x\|^2\|y\|^2 - 2R^2\|x\|\|y\|\cos\alpha(x, y)}}. \quad (4.14)$$

Ma, dato che $-1 \leq \cos\alpha(x, y) \leq 1$, abbiamo anche che:

$$(R^2 - \|x\|\|y\|)^2 = R^4 + \|x\|^2\|y\|^2 - 2R^2\|x\|\|y\| \leq R^4 + \|x\|^2\|y\|^2 - 2R^2\|x\|\|y\|\cos\alpha(x, y), \quad (4.15)$$

Possiamo osservare che, perchè si annulli il denominatore nel secondo membro di (4.14) con $x, y \in \bar{\Omega}$ (e quindi $\|x\|, \|y\| \leq R$), deve necessariamente accadere che $(R^2 - \|x\|\|y\|)^2 = 0$ e dunque $\|x\| = \|y\| = R$, cioè $x, y \in \partial\Omega$. In questa situazione, la condizione di annullamento del denominatore del secondo membro della (4.14) fornisce:

$$R^4 + R^2R^2 - 2R^4\cos\alpha(x, y) = 0$$

che è possibile solo se $\cos\alpha(x, y) = 1$ e quindi $x = y \in \partial\Omega$ come detto sopra. Pertanto le singolarità di $v_\Omega(x, y)$ su $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ si hanno solo quando $x = y \in \partial\Omega$. Possiamo riscrivere l'espressione trovata come:

$$v_\Omega(x, y) = \frac{R}{4\pi\sqrt{R^4 + \|x\|^2\|y\|^2 - 2R^2x \cdot y}}.$$

Questa funzione, per $x, y \in \Omega$, è C^∞ dove non si annulla il denominatore, cioè ovunque su $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ escludendo i punti (x, y) con $x = y \in \partial\Omega$.

Infine, si controlla facilmente che anche la seconda condizione richiesta per avere una funzione di Green è soddisfatta: se $y \in \partial\Omega$ e $x \in \Omega$, allora $G_\Omega(x, y) = 0$. Infatti, in questo caso se \mathbf{n}_x e \mathbf{n}_y sono rispettivamente il versore di x e quello di y e tenendo conto che $\|y\| = R$ equivale a $y \in \partial\Omega$, si trova da (4.13):

$$\begin{aligned} G_\Omega(x, y)|_{y \in \partial\Omega} &= -\frac{1}{4\pi\|\|x\|\mathbf{n}_x - R\mathbf{n}_y\|} + \frac{1}{4\pi\|R\mathbf{n}_x - \|x\|\mathbf{n}_y\|} \\ &= -\frac{1}{4\pi\|\|x\|\mathbf{n}_x - \|y\|\mathbf{n}_y\|} + \frac{1}{4\pi\|\|y\|\mathbf{n}_x - \|x\|\mathbf{n}_y\|} \\ &= -\frac{1}{4\pi\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y}} + \frac{1}{4\pi\sqrt{\|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\|y\|\|x\|\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y}} = 0. \end{aligned}$$

Tutte le condizioni richieste sono dunque soddisfatte: la (4.13) è una funzione di Green per la palla di raggio R centrata nell'origine in \mathbb{R}^3 .

Valutiamo il nucleo di Poisson associato $N_\Omega(x, y)$. Utilizziamo coordinate polari sferiche con l'asse z diretto lungo il vettore uscente dall'origine e diretto verso il punto x , partendo da

$$G_\Omega(x, y) = -\frac{1}{4\pi\|x - y\|} + \frac{1}{4\pi\|R\mathbf{n}_x - \|x\|y/R\|}$$

si trova in coordinate polari, dove $\|y\|$ è la coordinata radiale:

$$G_\Omega(x, y) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\cos\theta}} + \frac{1}{4\pi\sqrt{R^2 + \|x\|^2\|y\|^2/R^2 - 2\|x\|\|y\|\cos\theta}}. \quad (4.16)$$

Quindi dobbiamo valutare:

$$N_\Omega(x, y) = \mathbf{n}_y \cdot \nabla_y G_\Omega(x, y)|_{\partial\Omega} = \frac{\partial}{\partial\|y\|} G_\Omega(x, y) \Big|_{\|y\|=R}$$

Nel calcolo si tenga conto di due fatti: (i) dopo aver calcolato le derivate, si può porre $\|y\| = R$ (ii) i denominatori dei due addendi a secondo membro in (4.16) coincidono per $\|y\| = R$ come notato sopra, coincideranno, per $\|y\| = R$ anche i denominatori delle *derivate* di tali espressioni, dato che che altro non sono che i precedenti denominatori elevati alla terza potenza.

Il calcolo produce immediatamente:

$$N_\Omega(x, y) = \frac{R^2 - \|x\|^2}{4\pi R\|x - y\|^3} \Big|_{y \in \partial\Omega} \quad \|x\| < R \quad (4.17)$$

(Per il problema di Dirichlet esterno alla sfera si può ragionare analogamente scambiando il ruolo di x e y e si ottiene, si tenga conto che ora il versore uscente da $\partial\Omega$ punta verso l'origine:

$$N_\Omega(x, y) = \frac{\|x\|^2 - R^2}{4\pi R\|x - y\|^3} \Big|_{y \in \partial\Omega} \quad \|x\| > R.$$

Non diremo altro sul problema esterno.)

Le ipotesi del teorema 4.1 sono soddisfatte, la condizione (i) è vera dato che $v_\Omega \in C^\infty(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \setminus \Delta)$ come provato precedentemente, la condizione (ii) (cioè la (4.6)) è anch'essa valida dato che si verifica facilmente per computo diretto, dalla forma esplicita del nucleo di Poisson trovata, che l'ipotesi della proposizione 4.2 è verificata nel caso in esame¹.

Pertanto siamo in grado di determinare tutte le soluzioni del problema di Dirichlet in Ω con funzione sorgente di classe $C_0^2(\Omega)$ e dato di Dirichlet $\psi \in C^0(\partial\Omega)$, quando Ω è la palla aperta in \mathbb{R}^3 di raggio $R > 0$ centrata nell'origine. In particolare, se $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ è armonica in Ω (cioè non c'è la sorgente f) e si riduce alla funzione continua ψ su $\partial\Omega$, vale:

$$\varphi(x) = \frac{R^2 - \|x\|^2}{4\pi R} \oint_{\|y\|=R} \frac{\psi(y)}{\|x - y\|^3} dS(y).$$

¹Se integriamo in $y \in \partial\Omega \setminus B_\delta(x_0)$ per un fissato $x_0 \in \partial\Omega$, il denominatore del nucleo di Poisson rimane limitato, mentre il numeratore tende a zero se $x \rightarrow x_0$, dato che ciò implica che $\|x\| \rightarrow R$.

4.2.3 La funzione di Green nel cerchio in \mathbb{R}^2 .

Ora Ω è il cerchio in \mathbb{R}^2 centrato nell'origine e di raggio R . Vogliamo determinare una funzione di Green $G_\Omega(x, y)$ per tale insieme. In questo caso siamo nel piano, ma il ragionamento è molto simile a quello precedente sviluppato nello spazio, cambiano solo i calcoli. Cerchiamo una distribuzione di cariche all'esterno di $\bar{\Omega}$ che annulli il potenziale sulla circonferenza $\partial\Omega$.

Osservazioni 4.3. Dal punto di vista fisico non possiamo pensare tali cariche come cariche elettriche, visto che siamo in due dimensioni e che il potenziale dovuto ad una carica si deve pensare come logaritmico. A parte questo dettaglio, fondamentale dal punto di vista fisico, ma inessenziale dal punto di vista matematico, la procedura è la stessa che nel caso tridimensionale.

Dalla definizione 3.1, ci aspettiamo una funzione di Green della forma della funzione armonica in $y \in \Omega \setminus \{x\}$ data da, per ogni x fissato in Ω :

$$G_\Omega(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log \|x - y\| - \frac{1}{2\pi} \log(q_x \|x'(x) - y\|),$$

in modo tale che:

$$G_\Omega(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log \|x - y\| - \frac{1}{2\pi} \log(q_x \|x'(x) - y\|) = 0 \quad \forall y \in \partial\Omega.$$

Dobbiamo determinare la carica immagine q_x e la posizione di essa x' in funzione di x . Esattamente come nel caso precedente, per la simmetria del problema ci aspettiamo che $x' = \lambda(x)x$, con $|\lambda| \|x\| \geq R$ dato che x' deve essere fuori da $\bar{\Omega}$. Se il metodo funziona si deve avere l'annullamento del potenziale totale su $\partial\Omega$, in particolare nei due punti y_1 e y_2 intersezione della retta congiungente x e x' con $\partial\Omega$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log(R - \|x\|) - \frac{1}{2\pi} \log(q_x (\|x'(x)\| - R)) = 0 \\ \frac{1}{2\pi} \log(R + \|x\|) - \frac{1}{2\pi} \log(q_x (\|x'(x)\| + R)) = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

La soluzione è di nuovo:

$$\begin{cases} \|x\| \|x'\| = R^2 \\ q_x = \|x\|/R \end{cases} \quad (4.19)$$

In particolare $|\lambda| = R^2/\|x\|^2$. Scegliendo $\lambda > 0$ si trova:

$$G_\Omega(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{\|x - y\|}{\|Rx/\|x\| - \|x\|y/R\|}.$$

Questa funzione è di classe C^∞ su $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ se si escludono i punti (x, y) con $x = y$. Inoltre la funzione $v_\Omega(x, y) = G_\Omega(x, y) - G_n(x, y)$ è di classe C^∞ su $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ se si escludono i punti (x, y) con $x = y \in \partial\Omega$. Si controlla facilmente che per $\|y\| = R$, $G_\Omega(x, y)$ si annulla.

Ragionando come nel problema precedente si può calcolare $N_\Omega(x, y)$, ottenendo:

$$N_\Omega(x, y) = \frac{R^2 - \|x\|^2}{2\pi R \|x - y\|^2} \Big|_{y \in \partial\Omega} \quad \|x\| < R$$

(Per il problema esterno si ottiene analogamente un nucleo di Poisson:

$$N_{\Omega}(x, y) = \frac{\|x\|^2 - R^2}{2\pi R \|x - y\|^2} \Big|_{y \in \partial\Omega} \quad \|x\| > R,$$

non ci occuperemo oltre del problema esterno.)

Si può verificare che la condizione (4.6) è effettivamente verificata per il nucleo di Poisson trovato, pertanto siamo in grado di determinare tutte le soluzioni del problema di Dirichlet in Ω con funzione sorgente di classe $C_0^2(\Omega)$ e dato di Dirichlet $\psi \in C^0(\partial\Omega)$, quando Ω è il disco aperto in \mathbb{R}^2 di raggio $R > 0$ centrato nell'origine. In particolare, se $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ è armonica in Ω (cioè non c'è la sorgente f) e si riduce alla funzione continua ψ su $\partial\Omega$, vale:

$$\varphi(x) = \frac{R^2 - \|x\|^2}{2\pi R} \oint_{\|y\|=R} \frac{\psi(y)}{\|x - y\|^2} dS(y).$$

4.2.4 La funzione di Green in un semispazio di \mathbb{R}^3 .

Consideriamo la seguente regione

$$\Omega = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 > 0\} \quad \text{con, quindi:} \quad \partial\Omega = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 = 0\}$$

Vogliamo determinare una funzione di Green per questa regione illimitata. Possiamo vedere questa regione come il limite per $n \rightarrow +\infty$ delle regioni Ω_n date dall'intersezione di Ω e delle palle di raggio n centrate nell'origine. Non ci occuperemo della questione in dettaglio, diremo solo che i precedenti teoremi si generalizzano a questo caso quando si lavora con soluzioni dell'equazione di Poisson che decadono rapidamente a zero (con le loro derivate prime) all'infinito.

Dalla definizione 3.1, sappiamo che in \mathbb{R}^3 :

$$G_3(x, y) = \frac{-1}{4\pi \|x - y\|}.$$

Dobbiamo allora cercare una distribuzione di cariche (nel semispazio $\{x^3 < 0\}$) tale da annullare il potenziale G_3 su $\partial\Omega$. È sufficiente porre una carica unitaria in $x' = (x^1, x^2, -x^3)$, dove $x = (x^1, x^2, x^3)$. Otteniamo dunque:

$$\begin{aligned} G_{\Omega}(x, y) &= \frac{-1}{4\pi} \left(\frac{1}{\|x - y\|} - \frac{1}{\|x' - y\|} \right) \\ &= \frac{-1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 + y^3)^2}} \right) \end{aligned}$$

Il nucleo di Poisson $N_{\Omega}(x, y)$ risulta essere, tenendo conto che $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_3$:

$$N_{\Omega}(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y^3} G_{\Omega}(x, y) \Big|_{y^3=0}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y^3} \left(\frac{1}{\sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 + y^3)^2}} \right) \Big|_{y^3=0} = \\
&= -\frac{1}{4\pi} \frac{2x^3}{\|x - y\|^3} \Big|_{y^3=0} = -\frac{1}{2\pi} \frac{x \cdot \mathbf{e}_3}{\|x - y\|^3} \Big|_{y^3=0}.
\end{aligned}$$

Consideriamo ora una funzione *continua e limitata* $\psi = \psi(y^1, y^2)$ definita sul piano $y^3 = 0$. Per tale funzione ha senso l'integrale, valutato per $x \in \Omega$ (cioè $x^3 > 0$):

$$\varphi(x) = -\frac{x^3}{2\pi} \oint_{y^3=0} \frac{\psi(y)}{\|x - y\|^3} dS(y). \quad (4.20)$$

Esplicitamente, passando in coordinate polari piane sul piano $x^3 = 0$ e scegliendo l'origine nel punto (x^1, x^2) :

$$\varphi(x^1, x^2, x^3) = -\frac{x^3}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} dr \frac{r\psi(r, \theta)}{(r^2 + (x^3)^2)^{3/2}}.$$

È evidente che la limitatezza di ψ assicura l'assoluta convergenza dell'integrale. Il calcolo diretto del laplaciano del primo membro, passando le derivate sotto il segno di integrale (si provi per esercizio che è possibile), provano che la funzione φ è effettivamente $C^2(\Omega)$ ed armonica in tale insieme. Inoltre si prova, essenzialmente verificando la proposizione 4.2, che vale la condizione:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \in \partial\Omega} -\frac{x^3}{2\pi} \int_{y^3=0} \frac{\psi(y)}{\|x - y\|^3} dS(y) = \psi(x_0)$$

e pertanto (4.20) produce una soluzione del problema di Dirichlet in Ω , senza sorgente f e con dato al bordo ψ . Lasciamo per esercizio la formulazione di un corrispondente teorema di unicità delle soluzioni, tenendo conto del decadimento all'infinito delle funzioni φ individuate in (4.20).

4.3 Soluzione per il problema di Dirichlet nel cerchio in \mathbb{R}^2 tramite l'analisi di Fourier.

In quest'ultima sezione presentiamo un metodo alternativo a quello delle cariche immagine che permette, sotto opportune ipotesi sul dato al bordo f , di ricavare la soluzione del problema di Dirichlet per il cerchio in \mathbb{R}^2 . Gli elementi della teoria delle serie di Fourier che usiamo qui saranno discussi nella sezione 6.3. Si può posticipare la lettura di questa sezione a quella della sezione 6.3, tenendo anche conto della sottosezione 6.3.3 e dell'osservazione 6.6.

Consideriamo dunque il seguente problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \phi \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \\ \phi|_{\partial\Omega} = f & f \in C^0(\partial\Omega) \text{ assegnata,} \end{cases} \quad (4.21)$$

dove Ω è il cerchio in \mathbb{R}^2 di raggio R : $\Omega = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2, (x^1)^2 + (x^2)^2 < R^2\}$. Per la simmetria del problema è conveniente introdurre un sistema di coordinate polari ρ, θ in \mathbb{R}^2 , con $x^1 = \rho \cos \theta, x^2 = \rho \sin \theta$. L'equazione di Laplace assume la seguente forma:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \phi \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \phi = 0. \quad (4.22)$$

Per risolverla cominciamo a cercare delle soluzioni particolari della forma:

$$\phi(\rho, \theta) = \psi(\rho)\chi(\theta),$$

con ψ e χ differenziabili due volte con continuità nel loro dominio. Restrungendo le possibili soluzioni a tale classe di funzioni, l'equazione (4.22) diviene:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \psi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \psi \right) \chi + \frac{\psi}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \chi = 0,$$

ovvero, nei punti in cui le due funzioni ψ e χ non si annullano:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \psi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \psi \right) \frac{\rho^2}{\psi} = -\frac{1}{\chi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \chi.$$

Al primo membro troviamo una funzione dipendente solo dalla variabile ρ , mentre al secondo membro troviamo una funzione dipendente solo dalla variabile θ . L'uguaglianza può dunque essere verificata se e solo se entrambi i membri sono uguali ad una costante λ (indipendente da ρ, θ). Per continuità ci aspettiamo che valga ovunque:

$$\begin{cases} \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \psi + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \psi = \lambda \psi \\ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \chi = -\lambda \chi. \end{cases} \quad (4.23)$$

Sicuramente, per ogni fissata costante λ , le soluzioni di questo sistema risolvono l'equazione iniziale. Studiamo pertanto le soluzioni di tale sistema. Iniziamo a considerare la seconda equazione:

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \chi(\theta) + \lambda \chi(\theta) = 0, \quad (4.24)$$

che è un'equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine a coefficienti costanti di cui ben nota la soluzione generale. Dato che vogliamo, ovviamente che la soluzione soddisfi la condizione di monodromia $\chi(0) = \chi(2\pi)$, è necessario che $\mathbb{R} \ni \lambda \geq 0$, in modo tale che le soluzioni di (4.24) siano funzioni periodiche. In tal caso la soluzione generale è data da

$$\chi(\theta) = A \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B \sin(\sqrt{\lambda}\theta).$$

Inoltre $\sqrt{\lambda}$ deve essere un numero intero, ovvero $\lambda = n^2, n \in \mathbb{N}$ per fornire la giusta periodicità che assicuri $\chi(0) = \chi(2\pi)$. Il caso $n = 0$ corrisponde a soluzioni costanti.

Consideriamo ora la seconda equazione, che un'equazione lineare:

$$\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \psi + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \psi = n^2 \psi, \quad (4.25)$$

Una classe di soluzioni linearmente indipendenti è data da:

$$\psi_n(\rho) = \begin{cases} 1, \log \rho, \\ \rho^n, \rho^{-n} \end{cases} \quad n \geq 1$$

Dobbiamo scartare la funzione $\log \rho$ per $n = 0$ e la funzione ρ^{-n} per $n \geq 1$ in quanto sono singolari in 0, mentre noi stiamo cercando delle soluzioni dell'equazione di Laplace che siano regolari in tutto il cerchio interno. Per linearità, una soluzione ovunque regolare dell'equazione (4.22) può avere la forma

$$\psi(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)), \quad (4.26)$$

dove A_n, B_n sono coefficienti reali arbitrari e n varia in qualche sottoinsieme finito (ma arbitrariamente grande) dell'insieme degli interi positivi o nulli. I coefficienti A_n e B_n , in linea di principio si determinano imponendo la condizione al bordo $\psi(R, \theta) = f$:

$$\begin{cases} A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \\ A_m = \frac{1}{R^m \pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(m\theta) d\theta \\ B_m = \frac{1}{R^m \pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(m\theta) d\theta \end{cases}$$

Per ottenere le identità sopra scritte abbiamo tenuto conto delle note identità (vedi la sezione C in Appendice):

$$\int_0^{2\pi} \sin(n\theta) d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos(m\theta) d\theta = 0, \quad \text{se } n = 0, 1, 2, \dots \text{ e } m = 1, 2, \dots,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = 0, \quad \text{se } n, m = 0, 1, \dots,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(n\theta) \sin(m\theta) d\theta = \pi \delta_{mn}, \quad \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = \pi \delta_{mn}, \quad \text{per } n, m = 0, 1, 2, \dots,$$

dopo aver moltiplicato i due membri di (4.26) rispettivamente per 1, $\cos(m\theta)$, $\sin(m\theta)$ ed integrato il risultato.

È chiaro che affinché si possa sempre risolvere il problema ci aspettiamo che l'insieme di variabilità di n sia tutto \mathbb{N} e non solo un sottoinsieme finito. Questo fatto però pone il problema della convergenza della serie (4.26). Ulteriormente bisogna anche dimostrare che la serie (4.26) converge ad una soluzione del problema: questo fatto non è ovvio, mentre è ovvio, per linearità quando n varia su un insieme finito.

Formalmente dunque la soluzione del problema di Dirichlet interno è data dalla *serie*

$$\phi(\rho, \theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\rho/R)^n (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)),$$

dove i numeri reali α_n, β_n sono i *coefficienti di Fourier* della funzione reale f riferiti alle funzioni seno e coseno sul segmento $[-\pi, \pi]$ ovvero, equivalentemente, $[0, 2\pi]$:

$$f(\theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)) ,$$

con, quindi:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta.$$

Che è lo stesso che dire che vale lo sviluppo di Fourier in termini di esponenziali:

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2\pi}},$$

e:

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} (f_n + f_{-n}), \quad \beta_n = i \sqrt{\frac{1}{2\pi}} (f_n - f_{-n}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dobbiamo ora dimostrare che la funzione cosicostituita è effettivamente soluzione del problema di Dirichlet, ovvero che è di classe $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, che è armonica in Ω e che coincide con f su $\partial\Omega$. Prima di tutto dimostriamo l'armonicità di ϕ in Ω . Dobbiamo in particolare mostrare che è giustificato derivare sotto il segno di serie. Di fatto, nell'ipotesi che la funzione f sia limitata, i suoi coefficienti di Fourier α_n, β_n sono limitati, sia ha cioè che

$$|\alpha_n| \leq M, \quad |\beta_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Infatti, dalle definizioni date sopra:

$$|\alpha_0| \leq \frac{\sup |f|}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 d\theta, \quad |\alpha_n| \leq \frac{\sup |f|}{\pi} \int_0^{2\pi} |\cos(n\theta)| d\theta, \quad \beta_n = \frac{\sup |f|}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sin(n\theta)| d\theta,$$

da cui seguono le stime dette prima con $M = \sup |f|/\pi$, tenendo conto che le funzioni sin e cos sono limitate da 1.

Concludiamo che vale la seguente disuguaglianza per i termini della serie di Fourier di ϕ :

$$|(\rho/R)^n (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta))| < |\rho/R|^n 2M$$

Quindi nei punti interni al cerchio, cioè per $|\rho/R| < 1$, la serie di ϕ è *dominata*² dalla serie geometrica di costanti positive $2M \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho/R)^n$ che, come ben noto, converge a $(1 - (\rho/R))^{-1}$. Per il teorema della convergenza totale di Weierstrass, la serie che definisce ϕ converge assolutamente ed uniformemente all'interno del cerchio.

²Cioè i termini della serie di funzioni che definisce ϕ sono, in valore assoluto ed uniformemente nella variabile di tali funzioni, maggiorati dai corrispondenti termini della serie di costanti.

Possiamo ripetere lo stesso ragionamento anche per dimostrare la convergenza della serie delle derivate. Derivando k volte ogni termine della serie rispetto alla variabile θ otteniamo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\rho^n}{R^n} [\alpha^n n^k \cos(n\theta + k\pi/2) + \beta^n n^k \sin(n\theta + k\pi/2)] .$$

Tale serie è dominata dalla serie di costanti positive $2M \sum_{n=1}^{+\infty} (\rho/R)^n n^k$. Questa serie non è altro che la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} n^k x^n$ valutata per $x = \rho/R < 1$. Il raggio di convergenza della serie di potenze detta è r dove al solito, se il limite esiste: $1/r = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^k)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{k(\ln n)/n} = 1$. Pertanto la serie di costanti positive considerata converge. Concludiamo che la serie delle derivate converge uniformemente ed è giustificato dunque derivare sotto il segno di serie (infinite volte) rispetto a θ e le funzioni che si ottengono sono funzioni continue (congiuntamente in entrambe le variabili), dato che sono limiti uniformi di funzioni continue. Per quanto riguarda la derivazione rispetto alla variabile ρ vorremmo che valesse l'identità, per $k = 1, 2, \dots$:

$$\frac{\partial^k}{\partial \rho^k} \phi(\rho, \theta) = \sum_{n \geq k} R^{-k} \frac{n!}{(n-k)!} (\rho/R)^{n-k} (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)) . \quad (4.27)$$

È facile verificare che la serie a secondo membro (ottenuta passando formalmente sotto il simbolo di somma l'operatore $d^k/d\theta^k$ nella serie che definisce ϕ) è assolutamente convergente, in quanto è dominata dalla serie³ di costanti positive da $2MR^{-k} \sum_{n \geq k} \frac{n!}{(n-k)!} (\rho/R)^{n-k}$. Dunque per noti teoremi riguardanti lo scambio del simbolo di serie con quello di derivata, possiamo derivare, ad ogni ordine k sotto il segno di serie e l'identità (4.27) è vera e la funzione ottenuta è continua (congiuntamente in entrambe le variabili) perchè limite uniforme di funzioni continue. Per quanto riguarda le derivate seconde miste possiamo procedere nello stesso modo e risulta che

$$\frac{\partial^2 \phi(\rho, \theta)}{\partial \rho \partial \theta} = \frac{\partial^2 \phi(\rho, \theta)}{\partial \theta \partial \rho} = \frac{1}{R} \sum_{n \geq 1} n^2 (\rho/R)^{n-1} (\alpha_n \cos(n\theta + \pi/2) + \beta_n \sin(n\theta + \pi/2)) .$$

La serie a secondo membro converge uniformemente in quanto è dominata dalla serie di costanti positive convergente $2(M/R) \sum_{n \geq 1} n^2 (\rho/R)^{n-1}$ come si verifica subito verificando che il raggio di convergenza della serie di potenze $2(M/R) \sum_{n \geq 1} n^2 x^{n-1}$ è $r = 1$. Abbiamo provato che ϕ è almeno di classe $C^2(\Omega)$ e che, per costruzione, soddisfa l'equazione di Laplace in Ω .

Resta da verificare la continuità sul bordo di Ω della soluzione costruita in questo modo. Per dimostrare questa proprietà dobbiamo imporre delle ipotesi aggiuntive su f . Sappiamo infatti dalla teoria delle serie di Fourier (vedi la proposizione 6.2) che se f è continua e di classe C^1 a tratti su $\partial\Omega$, allora i suoi coefficienti di Fourier α_n, β_n soddisfano la seguente disuguaglianza:

$$\sum_n |\alpha_n + i\beta_n| < \infty,$$

³Si tratta, a meno di una costante moltiplicativa e di un numero finito di termini, della serie di Taylor in $x = 0$ della derivata k -esima della funzione $(1 - (\rho/R)x)^{-1}$ valutata per $x = 1$. La serie di Taylor della funzione detta ha cerchio di convergenza $|(\rho/R)x| < 1$ e $x = 1$ cade in tale cerchio essendo $\rho/R < 1$.

e quindi, in particolare, anche:

$$\sum_n |\alpha_n|, \sum_n |\beta_n| \leq \sum_n \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} = \sum_n |\alpha_n + i\beta_n| < \infty.$$

La funzione ϕ è, per costruzione, il limite di una serie di funzioni continue

$$\phi(\rho, \theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\rho/R)^n (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)).$$

Inoltre su tutto $\overline{\Omega}$, essendo $0 \leq \rho/R \leq 1$ su di esso, abbiamo:

$$(\rho/R)^n (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)) \leq (\rho/R)^n (|\alpha_n| + |\beta_n|) \leq |\alpha_n| + |\beta_n|.$$

Dato che la serie delle costanti positive $|\alpha_n| + |\beta_n|$ converge, abbiamo che la serie definente ϕ converge assolutamente ad una funzione continua su tutto $\overline{\Omega}$ come volevamo. In particolare sul bordo di Ω :

$$\phi(R, \theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)) = f(\theta),$$

dato che α_n, β_n sono i coefficienti di Fourier della funzione f e che tale serie converge ad f stessa puntualmente come garantito dalla proposizione 6.3 nelle ipotesi fatte su f . Abbiamo provato il seguente teorema.

Teorema 4.2. *Si consideri il problema di Dirichlet nel cerchio aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ di raggio R e centrato sull'origine:*

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \phi \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \\ \phi|_{\partial\Omega} = f & f \in C^0(\partial\Omega) \text{ e } C^1 \text{ a tratti, assegnata.} \end{cases} \quad (4.28)$$

Esiste (ed è unica) la soluzione e si esprime come la somma della serie, che converge assolutamente e uniformemente in $\overline{\Omega}$,

$$\phi(\rho, \theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)) \quad (4.29)$$

dove i coefficienti α_n e β_n sono dati da:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta.$$

◇

Vediamo come scrivere la soluzione ottenuta con il teorema precedente facendo uso di un nucleo di Poisson. Possiamo riorganizzare la forma della soluzione espressa come serie nel modo che segue, tenendo conto dell'espressione esplicita dei coefficienti di Fourier della funzione f :

$$\phi(\rho, \theta) = \alpha_0 + \sum_{n \geq 1} (\rho/R)^n (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta + \sum_{n \geq 1} (\rho/R)^n \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta') \cos(n\theta') \cos(n\theta) d\theta' + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta') \sin(n\theta') \sin(n\theta) d\theta' \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta + \sum_{n \geq 1} (\rho/R)^n \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta') (\cos(n\theta') \cos(n\theta) + \sin(n\theta') \sin(n\theta)) d\theta' \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta + \sum_{n \geq 1} (\rho/R)^n \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta') \cos(n(\theta' - \theta)) d\theta'
\end{aligned}$$

Lavorando in Ω , cioè per $0 \leq \rho < R$, possiamo scambiare il simbolo di serie con quello di integrale, dato che la serie converge uniformemente come è immediato dimostrare tenendo conto è dominata dalle serie di costanti $M \sum_{n \geq 1} (\rho/R)^n$ che converge per $0 \leq \rho/R < 1$, per $M \geq \sup |f|/\pi$. In questo modo otteniamo:

$$\phi(\rho, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} (\rho/R)^n \cos(n(\theta - \theta')) \right) d\theta'. \quad (4.30)$$

Possiamo calcolare la somma della serie nell'integrale come segue:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} (\rho/R)^n \cos(n(\theta - \theta')) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (\rho/R)^n (e^{in(\theta - \theta')} + e^{in(\theta' - \theta)}) \\
&= \frac{1}{2} \left(-1 + \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho/R)^n e^{in(\theta - \theta')} + \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho/R)^n e^{in(\theta' - \theta)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{1}{1 - (\rho/R)e^{i(\theta - \theta')}} + \frac{1}{1 - (\rho/R)e^{i(\theta' - \theta)}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{(1 - (\rho/R)e^{i(\theta - \theta')})(1 - (\rho/R)e^{i(\theta' - \theta)}) + (1 - (\rho/R)e^{i(\theta - \theta')}) + (1 - (\rho/R)e^{i(\theta' - \theta)})}{(1 - (\rho/R)e^{i(\theta - \theta')})(1 - (\rho/R)e^{i(\theta' - \theta)})} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1 - (\rho/R)^2}{1 - 2(\rho/R) \cos(\theta - \theta') + (\rho/R)^2} = \frac{1}{2} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2\rho R \cos(\theta - \theta') + \rho^2}.
\end{aligned}$$

Definiamo allora il **nucleo di Poisson**:

$$N_\Omega(\rho, \theta, R, \theta') = \frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2\rho R \cos(\theta - \theta') + \rho^2},$$

che può anche essere scritto come, se x è individuato dalle coordinate polari ρ, θ e $y \in \partial\Omega$ è individuato dalle coordinate polari R, θ' :

$$N_\Omega(x, y) = \frac{R^2 - \|x\|^2}{2\pi R \|x - y\|^2} \Big|_{y \in \partial\Omega}.$$

L'espressione è ovviamente la stessa che abbiamo ottenuto precedentemente con il metodo delle cariche immagini. Tenendo conto del fatto che l'elemento di lunghezza del bordo $\partial\Omega$ è $ds(y) = R d\theta'$, la formula (4.30) che definisce la soluzione ϕ in funzione del dato al bordo f può allora essere scritta come:

$$\phi(x) = \int_{\partial\Omega} N_{\Omega}(x, y) f(y) ds(y) \quad \text{se } x \in \Omega .$$

Capitolo 5

Equazioni iperboliche: alcuni risultati generali elementari per le equazioni di D'Alembert e di Klein-Gordon in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

In questo capitolo ci occuperemo di alcuni fatti generali riguardanti due equazioni del secondo ordine di tipo iperbolico: l'equazione di D'Alembert e quella di Klein-Gordon. La prima:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \Delta_{\mathbf{x}} \varphi = 0 \quad (5.1)$$

con $\varphi = \varphi(t, \mathbf{x})$, $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ è ben nota dalla fisica classica e descrive nello spaziotempo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, in una certa approssimazione, tutti i fenomeni di propagazione ondosa/elastica in mezzi estesi in \mathbb{R}^n (tipicamente $n = 1, 2, 3$). La costante c è la velocità di propagazione delle perturbazioni descritte dal campo φ , che dipende dal tipo di mezzo e di perturbazione. La seconda:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \Delta_{\mathbf{x}} \varphi - \mu^2 \varphi = 0, \quad (5.2)$$

dove $\mu = \frac{mc^2}{\hbar}$ con $\varphi = \varphi(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è un'equazione che nasce nella fisica moderna e descrive (se $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^4$ pensato come spaziotempo della relatività speciale e c è la velocità della luce) l'equazione di evoluzione relativistica per campo associato a particelle quantistiche di massa $m > 0$ e prive di spin e carica. Nel caso $m = 0$, ovviamente la forma della seconda equazione si riduce alla forma della prima. Le due equazioni sopra scritte possono essere leggermente modificate introducendo un *termine di sorgente* dato da una funzione nota $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \Delta_{\mathbf{x}} \varphi = \rho \quad (5.3)$$

e

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \Delta_{\mathbf{x}} \varphi - \mu^2 \varphi = \rho. \quad (5.4)$$

Nota importante. Nel seguito del capitolo Δ indicherà sempre e solo il laplaciano rispetto alle coordinate spaziali \mathbf{x} . Sopra abbiamo indicato tale operatore con $\Delta_{\mathbf{x}}$, ma d'ora in poi ometteremo l'indice \mathbf{x} . Nello stesso modo, il simbolo di gradiente ∇ significherà sempre $\nabla_{\mathbf{x}}$ e non includerà mai le derivate temporali.

5.1 L'equazione di D'Alembert come equazione della corda vibrante e della membrana vibrante.

L'equazione di D'Alembert descrive, in prima approssimazione, tutti i fenomeni di propagazione ondulatoria classici in mezzi estesi. A titolo di esempio, vogliamo mostrare come l'equazione di D'Alembert descriva le onde trasversali di deformazione che si propagano lungo una corda tesa e in una membrana tesa.

5.1.1 L'equazione per la corda oscillante per piccole deformazioni.

Consideriamo una corda orizzontale a riposo, in generale descritta da $y = y(x)$ in un sistema di coordinate x, y solidale con un sistema di riferimento inerziale, con y verticale. La coordinata x può variare in tutto l'asse reale, sulla semiretta reale oppure in un intervallo chiuso ad interno non vuoto $[a, b]$ e, negli ultimi due casi, sono imposte condizioni al bordo sul bordo del dominio, tipicamente l'annullamento della deformazione verticale, come nel caso delle corde degli strumenti musicali a corda. Sia $\lambda > 0$, costante (nel tempo e nel punto della corda) la densità lineare di massa della corda lungo x e sia $\tau = \|\mathbf{T}\|$ il valore costante (nel tempo e nel punto della corda) del modulo della tensione \mathbf{T} della corda¹. Supponiamo che la corda, al tempo $t = 0$, venga deformata in una funzione $y = y(x)$ con $|y(x)|$ “molto piccolo” nel senso che preciseremo nel seguito, e che poi venga lasciata libera (sempre verificando le eventuali condizioni al bordo). A causa dell'elasticità del mezzo, accade che la configurazione della corda varierà nel tempo e sarà descritta da una funzione $y = y(t, x)$. Vogliamo ricavare, dalle leggi della dinamica, l'equazione a cui deve soddisfare questa funzione assumendo che il modulo della tensione τ e la densità λ rimangano costanti e che le deformazioni trasversali siano piccole. Consideriamo un punto x_0 e quindi un pezzo di corda relativo all'intervallo $[x_0 - h, x_0 + h]$. Su tale porzione di corda agisce la tensione ai due estremi: $\mathbf{T}(x_0 + h)$ e $\mathbf{T}(x_0 - h)$. Entrambi i vettori saranno uscenti dalla porzione di corda e saranno in ogni punto tangenti alla corda. Si osservi che quindi le componenti lungo l'asse x di tali vettori hanno segno opposto. In prima approssimazione l'accelerazione nella direzione \mathbf{e}_y della porzione di corda è $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, mentre la massa della porzione di corda è $2h\lambda$. La seconda equazione della dinamica afferma allora che deve valere, in prima approssimazione:

$$2h\lambda \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (\mathbf{T}(x_0 + h) + \mathbf{T}(x_0 - h)) \cdot \mathbf{e}_y, \quad (5.5)$$

¹Ricordiamo che la tensione \mathbf{T} in un punto della corda viene definita, a meno del segno, come la forza che, tagliando idealmente la corda nel punto considerato, un'estremo della corda tagliata esercita sull'altro.

Il secondo membro si può riscrivere come:

$$(\mathbf{T}(x_0 + h) + \mathbf{T}(x_0 - h)) \cdot \mathbf{e}_y = \tau(\sin \alpha(x_0 + h) - \sin \alpha(x_0 - h)),$$

dove $\alpha(x_0 + h)$ e $\alpha(x_0 - h)$ sono gli angoli che $\mathbf{T}(x_0 + h)$ e $-\mathbf{T}(x_0 - h)$ individuano rispetto a \mathbf{e}_x e quindi, approssimando $\sin \alpha$ con $\tan \alpha$ tenendo conto che lavoriamo con piccoli $|y|$ e tenendo conto che: $\tan \alpha(x_0 + h) = \frac{\partial y}{\partial x}|_{x_0+h}$ e $\tan \alpha(x_0 - h) = \frac{\partial y}{\partial x}|_{x_0-h}$, (5.5) può essere riscritta come:

$$\frac{\lambda}{\tau} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\frac{\partial y}{\partial x}|_{x_0+h} - \frac{\partial y}{\partial x}|_{x_0-h}}{2h}.$$

In realtà l'identità trovata è solo approssimata. Tuttavia, nel limite per $h \rightarrow 0$, ci si aspetta che diventi rigorosamente valida. In tal caso, si trova l'equazione:

$$\frac{\lambda}{\tau} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Questa è l'equazione di D'Alembert in \mathbb{R}^2 per le perturbazioni ondose trasversali della corda:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$$

in cui la *velocità di propagazione delle perturbazioni* c (vedremo più avanti il significato di tale nome) è data da:

$$c = \sqrt{\frac{\tau}{\lambda}}. \quad (5.6)$$

Osservazioni 5.1. Nel caso in cui sulla corda agisca anche la forza di gravità, sulla porzione di corda usata per ottenere l'equazione di D'Alembert agisce anche la forza verticale $-\lambda 2hg\mathbf{e}_y$. In questo caso, ripetendo il ragionamento fatto sopra, l'equazione finale che si ottiene è quella di D'Alembert con sorgente:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\lambda}{\tau} g.$$

Si noti che $-\lambda g$ è la forza di gravità per unità di lunghezza agente sulla corda nella direzione verticale. In generale, come si prova facilmente, se sulla corda agisce qualche densità lineare di forza normale ad essa (componenti tangenti produrrebbero deformazioni longitudinali che non consideriamo nel nostro modello), individuata dalla funzione $f = f(t, x)$ nella direzione verticale, l'equazione che si ottiene alla fine è:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{f(t, x)}{\tau}. \quad (5.7)$$

5.1.2 L'equazione per la membrana oscillante per piccole deformazioni.

Consideriamo una membrana orizzontale a riposo, descritta da $z = z(x, y)$ in generale, rispetto ad un sistema di coordinate x, y, z solidale con un sistema di riferimento inerziale, con z verticale. Le coordinate x e y variano su tutto il piano \mathbb{R}^2 oppure in un certo dominio dato un insieme $\bar{\Omega}$ dove $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto (non necessariamente limitato) e $\partial\Omega$ è una curva sufficientemente regolare. Nel caso di $\partial\Omega \neq \emptyset$, si impongono su di esso opportune condizioni al bordo, tipicamente l'annullarsi della deformazione verticale $z|_{\partial\Omega} = 0$, come accade per le membrane dei tamburi. Sia $\mu > 0$, costante (nel tempo e nel punto della membrana) la densità superficiale di massa della membrana e sia $\tau = \|\mathbf{T}\|$ il valore costante (nel tempo e nel punto della membrana) del modulo della tensione \mathbf{T} della membrana assunta essere isotropa². Supponiamo che la membrana, al tempo $t = 0$, venga deformata in una funzione $z = z(x, y)$ con $|z(x)|$ “molto piccolo” nel senso che vedremo poi, e che poi venga lasciata libera (sempre soddisfacendo le eventuali condizioni al bordo su $\partial\Omega$). A causa dell'elasticità del mezzo, accade che la configurazione della membrana varierà nel tempo e sarà descritta da una funzione $z = z(t, x, y)$. Vogliamo ricavare, dalle leggi della dinamica, l'equazione a cui deve soddisfare questa funzione assumendo che il modulo della tensione τ e la densità μ rimangano costanti e che le deformazioni trasversali siano piccole. Consideriamo un punto p_0 di membrana individuato da (x_0, y_0) e quindi un pezzo di membrana rettangolare, di lati $2h$ e $2k$, centrato in p_0 , con proiezioni dei lati sul piano $z = 0$ che risultano essere parallele agli assi x e y (il tutto approssimativamente con approssimazione tanto migliore quanto h e k sono presi piccoli). Su tale porzione di membrana agisce la tensione sui 4 lati. Approssimativamente, su ciascun lato possiamo pensare la tensione costante, pari al valore che assume nel punto medio del lato: $\mathbf{T}(x_0 - h, y_0)$, $\mathbf{T}(x_0 + h, y_0)$, $\mathbf{T}(x_0, y_0 + k)$, $\mathbf{T}(x_0, y_0 - k)$. Questi vettori saranno uscenti dalla porzione di membrana perpendicolarmente ai lati e saranno in ogni punto tangenti alla membrana stessa. In prima approssimazione l'accelerazione nella direzione \mathbf{e}_z della porzione di corda è $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$, mentre la massa della porzione di corda è $4hk\mu$. La seconda equazione della dinamica afferma allora che deve valere, in prima approssimazione:

$$4hk\mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 2k(\mathbf{T}(x_0 + h, y_0) + \mathbf{T}(x_0 - h, y_0)) \cdot \mathbf{e}_z + 2h(\mathbf{T}(x_0, y_0 + k) + \mathbf{T}(x_0, y_0 - k)) \cdot \mathbf{e}_z, \quad (5.8)$$

Il primo addendo secondo membro si può riscrivere come:

$$2k(\mathbf{T}(x_0 + h, y_0) + \mathbf{T}(x_0 - h, y_0)) \cdot \mathbf{e}_y = 2k\tau(\sin \alpha(x_0 + h, y_0) - \sin \alpha(x_0 - h, y_0)),$$

dove $\alpha(x_0 + h, y_0)$ e $\alpha(x_0 - h, y_0)$ sono gli angoli che $\mathbf{T}(x_0 + h, y_0)$ e $-\mathbf{T}(x_0 - h, y_0)$ individuano rispetto a \mathbf{e}_x e quindi, approssimando $\sin \alpha$ con $\tan \alpha$ tenendo conto che lavoriamo con piccoli $|z|$ e tenendo conto che: $\tan \alpha(x_0 + h, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}|_{(x_0+h, y_0)}$ e $\tan \alpha(x_0 - h, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}|_{(x_0-h, y_0)}$, e

²Ricordiamo che la tensione \mathbf{T} in un punto p della membrana attraversato dalla curva γ viene definita, a meno del segno, come densità lineare di forza che, tagliando idealmente la membrana lungo γ è esercitata nel punto p dall'altro lembo della membrana. L'ipotesi di mezzo isotropo, per quanto riguarda la tensione, corrisponde alla richiesta che la tensione in p abbia modulo indipendente dalla scelta della curva γ che passa per p e sia sempre perpendicolare ad essa.

procedendo nello stesso modo per le due tensioni valutate sui lati paralleli all'asse y , la (5.8) può essere riscritta come:

$$\frac{\mu}{\tau} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}|_{(x_0+h, y_0)} - \frac{\partial z}{\partial x}|_{(x_0-h, y_0)}}{2h} + \frac{\frac{\partial z}{\partial y}|_{(x_0, y_0+k)} - \frac{\partial z}{\partial y}|_{(x_0, y_0-k)}}{2k}.$$

In realtà l'identità trovata è solo approssimata. Tuttavia, nel limite per $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ ci si aspetta che diventi rigorosamente valida. In tal caso, si trova l'equazione:

$$\frac{\mu}{\tau} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Questa è l'equazione di D'Alembert in \mathbb{R}^3 per le perturbazioni ondose trasversali della membrana:

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \Delta_{(x,y)} z = 0,$$

in cui la *velocità di propagazione delle perturbazioni* c è data da:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}. \quad (5.9)$$

Osservazioni 5.2.

(1) Si noti che, a differenza del caso della corda, ora le dimensioni di τ sono pari ad una forza diviso una lunghezza e quelle di μ sono pari ad una massa diviso una superficie, per cui v definita sopra ha correttamente le dimensioni di una velocità.

(2) Nel caso in cui sulla membrana agisca anche la forza di gravità, sulla porzione di corda usata per ottenere l'equazione di D'Alembert agisce anche la forza verticale $-\lambda 4hk g \mathbf{e}_z$. In questo caso, ripetendo il ragionamento fatto sopra, l'equazione finale che si ottiene è quella di D'Alembert con sorgente:

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \Delta z = \frac{\mu}{\tau} g.$$

Si osservi che $-\mu g$ è la forza di gravità per unità di superficie che agisce sulla membrana in direzione verticale. In generale, si vede facilmente che, se sulla membrana agisce qualche densità superficiale di forza normale alla superficie individuata dalla funzione $f = f(t, x)$ nella direzione verticale, l'equazione che si ottiene alla fine è:

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \Delta z = -\frac{f(t, x)}{\tau}. \quad (5.10)$$

5.1.3 *L'equazione per la vibrazione di un tamburo ideale di topologia arbitraria.

In questa sezione useremo alcuni concetti elementari di *geometria differenziale riemanniana ed analisi globale*, tuttavia l'argomento e le nozioni matematiche che saranno richieste sono largamente al di fuori delle competenze usuali di uno studente del secondo anno di matematica. Di

conseguenza il contenuto di questa sezione è completamente indipendente dalla parte rimanente delle dispense che si occupa degli argomenti standard.

Consideriamo un tamburo descritto da una varietà differenziabile M bidimensionale di classe C^∞ , connessa, compatta, orientabile, embedded nello spazio tridimensionale \mathbb{R}^3 . Indicheremo con g la metrica riemanniana indotta su M dalla metrica standard di \mathbb{R}^3 . Possiamo pensare ad una superficie sferica, una superficie torica o una superficie bidimensionale di genere arbitrario. Assumiamo che questa superficie sia costituita da un materiale elastico che, rispetto ad una certa configurazione di riposo fissata, possa deformarsi leggermente nella direzione normale alla superficie stessa.

Se $p \in M$ rappresenta un punto in situazione non deformata e p^* la posizione dello stesso punto dopo la deformazione avvenuta al tempo t , $u(t, p)\mathbf{n}_p$ indica il vettore posizione di p^* , valutato a partire da p , dove \mathbf{n}_p è il versore normale uscente da M in p . In generale, se $A \subset M$, allora A^* indica l'insieme dei punti q^* individuati da $u(q)\mathbf{n}_q$ con $q \in A$.

Assumeremo al solito che il materiale sia omogeneo ed isotropo con una densità superficiale di massa μ ed una tensione τ entrambe costanti. *L'ipotesi di omogeneità ed isotropia è in realtà estremamente poco fisica, perché appare fisicamente improbabile per configurazioni di riposo differenti da quella di una superficie sferica ed in assenza di forze esterne.*

Consideriamo ora una piccola regione C attorno a $p \in M$ individuata, in coordinate polari geodetiche³ r, θ centrate in p , dal cerchio di raggio $r_0 > 0$. Su ogni punto q^* di ∂C^* agisce una densità lineare di forza $\tau \mathbf{m}_q$ diretta perpendicolarmente a ∂C^* e tangente a C^* in q^* . Approssimativamente la componente totale nella direzione \mathbf{n}_p di tutte le forze che agiscono sui punti $q^* \in \partial C^*$ se q ha coordinate (r_0, θ) è:

$$T \simeq \int_{-\pi}^{\pi} \tau \sin \alpha(\theta) r_0 d\theta,$$

dove $\alpha(\theta)$ è l'angolo tra la densità di forza e la normale a ∂C nel punto q in cui è applicata (abbiamo tenuto in particolare conto del fatto che $\mathbf{n}_q \rightarrow \mathbf{n}_p$ quando $r_0 \rightarrow 0$). Per piccole deformazioni:

$$\sin \alpha \simeq \tan \alpha \simeq \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Quindi approssimativamente e tanto più correttamente quanto r_0 è piccolo:

$$T \simeq \tau \oint_{\partial C} \frac{\partial u}{\partial r} dl \simeq \tau \oint_{\partial C} \nabla^{(M,g)} u \cdot \mathbf{t} dl,$$

dove $\nabla^{(M,g)}$ è la derivata covariante rispetto alla connessione di Levi-Civita della metrica g indotta da quella euclidea su M , \mathbf{t} è il versore in $T_q M$ normale a $\partial C \subset M$ e dl è la misura naturale della lunghezza d'arco in M (che coincide con quella valutata in \mathbb{R}^3 per costruzione). Applicando il teorema della divergenza rispetto alla metrica g , concludiamo che

$$T \simeq \tau \int_C \Delta^{(M,g)} u d\nu^{(M,g)},$$

³Se x, y indica un sistema di coordinate locali riemanniane con origine p e definite in un intorno di p , allora $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ dove $\theta \in (-\pi, \pi)$ e $r \in (0, R)$ per qualche $R > 0$ sufficientemente piccolo.

dove $\Delta^{(M,g)}$ è l'operatore di Laplace-Beltrami associato alla metrica g su M e $\nu^{(M,g)}$ la misura di Borel su M associata a g .

L'equazione del moto in \mathbb{R}^3 per la porzione C di tessuto, nella direzione normale a p è, tanto più precisamente quanto r_0 è piccolo:

$$\mu \left(\int_C d\nu^{(M,g)} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \simeq \tau \int_C \Delta^{(M,g)} u d\nu^{(M,g)} .$$

Di conseguenza:

$$\frac{\mu}{\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \simeq \frac{1}{\int_C d\nu^{(M,g)}} \int_C \Delta^{(M,g)} u d\nu^{(M,g)} .$$

Prendendo il limite per $r_0 \rightarrow 0$ troviamo l'equazione di D'Alembert per piccole deformazioni normali a M descritte dalla funzione $u = u(t, p)$:

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta^{(M,g)} u = 0 , \quad (5.11)$$

dove v è ancora data dalla (5.9). La differenza, importante, rispetto al caso della membrana piatta è che ora l'equazione di D'Alembert è scritta "sopra" una varietà differenziabile riemanniana e l'operatore di Laplace(-Beltrami) è quello riferito alla metrica di cui la varietà è dotata. Nel caso sia presente una forzante esterna, l'equazione ottenuta prende, al solito una sorgente:

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(t, p)}{\partial t^2} + \Delta^{(M,g)} u(t, p) = -\frac{f(t, p)}{\tau} , \quad (5.12)$$

dove f è la componente normale a M di una densità superficiale di forza agente su M che ha direzione normale in ogni punto (componenti tangenti provocherebbero deformazioni longitudinali che non trattiamo nel modello considerato).

Osservazione importante. L'equazione (5.11) ammette soluzioni palesemente non fisiche, come quella del tipo $u(t, p) = U_0$ con $U_0 \neq 0$ costante. Anche soluzioni che si ottengono da questa aggiungendo (dato che l'equazione è lineare) soluzioni apparentemente più fisiche sono similmente inaccettabili, perché ci si aspetta che il sistema deformato leggermente tenda a tornare nella sua configurazione iniziale indeformata, dato che è questo il meccanismo fisico che, nella pratica, assicura che le deformazioni rimangano piccole. In generale se $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione armonica su M , cioè soddisfa $\Delta^{(M,g)} \phi = 0$ (e le funzioni costanti sono un caso particolare di questo), allora:

$$u(t, p) := \phi(p) \quad \text{per ogni } p \in M \text{ e ogni } t \in \mathbb{R},$$

soddisfa (5.11), ma non ha evidentemente senso fisico per gli stessi motivi esposti sopra. Per dare un significato fisicamente sensato alle soluzioni dell'equazione (5.11) una scelta possibile è quella di restringersi a lavorare nell'ortogonale (rispetto al prodotto scalare di $L^2(M, d\nu^{(M,g)})$) al sottospazio delle funzioni armoniche, dove $\nu^{(M,g)}$ è la misura di Borel associata alla metrica g di M .

5.2 Condizioni iniziali ed al contorno.

I problemi tipici che si incontrano lavorando con equazioni iperboliche come (5.3) e (5.4) sono generalmente del seguente tipo.

Si cerca $\varphi \in C^2((\alpha, \beta) \times \overline{D})$ che soddisfi (5.3) oppure (5.4) in $(\alpha, \beta) \times \overline{D}$ per qualche $\rho \in C^0((\alpha, \beta) \times \overline{D})$ assegnata, dove:

(a) $(\alpha, \beta) \ni 0$

(b) $D \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto, non vuoto, (non necessariamente connesso) con \overline{D} compatto e ∂D regolare orientabile.

Il fatto di lavorare in D con \overline{D} compatto si dice *problema interno*. Si può anche considerare il caso del *problema esterno* in cui si lavora in $(\alpha, \beta) \times (\mathbb{R}^n \setminus \overline{D})$.

Riferendosi al solo problema interno, vengono quindi assegnate *condizioni iniziali* e *condizioni al bordo* sulla funzione φ .

Le **condizioni iniziali** corrispondono alla coppia di richieste:

$$\varphi(0, \mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x}), \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{(0, \mathbf{x})} = \varphi_1(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{D}, \text{ con } \varphi_0 \in C^2(\overline{D}) \text{ e } \varphi_1 \in C^1(\overline{D}) \text{ assegnate.} \quad (5.13)$$

Le **condizioni al bordo**, riferite all'insieme $S := (\alpha, \beta) \times \partial D$ con vettore normale uscente \mathbf{n} , possono essere di tre tipi distinti:

(i) $\varphi|_S = \psi$ con $\psi \in C^2(S)$ funzione assegnata tale che $\psi(0, \mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x})$;

(ii) $\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi|_S = \psi$ con $\psi \in C^1(S)$ funzione assegnata tale che $\psi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi_0|_S(\mathbf{x})$;

(iii) $a\varphi|_S + b\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi|_S = \psi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ costanti assegnate tali che $ab \neq 0$ e $\psi \in C^1(S)$ funzione assegnata tale che $\psi(0, \mathbf{x}) = a\varphi_0|_S + b\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi_0|_S$.

Osservazioni 5.3.

(1) Le condizioni dette si possono notevolmente indebolire per esempio assumendo più debolmente che $\varphi \in C^2((0, \beta) \times D) \cap C^1((0, \beta) \times \overline{D})$ (e che soddisfi in tale insieme (5.3) oppure (5.4) per qualche $\rho \in C^0((\alpha, \beta) \times D)$), con $\varphi_0 \in C^1(\overline{D})$ e $\varphi_1 \in C^0(\overline{D})$, e $\psi \in C^1(S)$ in (ii) e $C^0(S)$ in (i) e (iii). In questo caso bisogna assumere più precise ipotesi di regolarità sul dominio D al fine di avere teoremi di esistenza ed unicità.

(2) Si possono considerare casi in cui D non è limitato e sono assegnate condizioni iniziali. In questo caso le condizioni al contorno, che sono importanti per i teoremi di esistenza ed unicità sono, in generale, rimpiazzate da condizioni sull'andamento all'infinito spaziale (cioè per $|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty$ a t fissato) per il campo φ incognito. Nel caso in cui $D = \mathbb{R}$ e $(\alpha, \beta) = \mathbb{R}$, per l'equazione di D'Alembert non è necessario fissare alcun dato al contorno, come vedremo più avanti,

per avere un teorema di esistenza ed unicità.

(3) Esaminando il significato delle condizioni al contorno nel caso di una corda orizzontale, di lunghezza fissata, vibrante trasversalmente si traggono le seguenti conclusioni. Nel caso di condizioni al contorno di tipo (i) la funzione ψ (che in tal caso misura la deformazione trasversale della corda) definita sul bordo S si riduce ad una coppia di funzioni $u = u(t)$ e $v = v(t)$, definite sui due estremi della corda, che stabiliscono come oscilla la corda ai suoi estremi al variare del tempo. Le condizioni al contorno di tipo (ii), per la corda vibrante corrispondono a fissare l'andamento temporale della componente verticale della forza che agisce sulla corda agli estremi. Infatti, se τ è il modulo costante della tensione della corda e si lavora in regime di piccole deformazioni trasversali come abbiamo fatto nella sezione 5.1.1, allora $\tau \frac{\partial \psi}{\partial x}$ valutata agli estremi, non è altro che la componente trasversale (cioè verticale se la corda è tesa in orizzontale lungo l'asse x) della tensione che agisce sulla corda. Più precisamente, $\tau \frac{\partial \psi}{\partial x}$ valutata all'estremo destro è la componente verticale della forza che agisce su tale estremo applicata dall'esterno, mentre $\tau \frac{\partial \psi}{\partial x}$ valutata all'estremo sinistro è, con il segno cambiato, la componente verticale della forza che agisce su tale estremo applicata dall'esterno.

Le condizioni al contorno di tipo (iii) corrispondono a fissare una relazione (che dipende dal tempo) tra ciascuna forza che agisce ad ogni estremo e la deformazione della corda nello stesso estremo.

5.3 Bilancio energetico e teoremi di unicità.

5.3.1 Densità di energia ed equazione di continuità.

Consideriamo una funzione φ di classe $C^2(\Omega)$ dove $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ è un aperto sul quale la funzione soddisfa l'equazione di Klein-Gordon (5.4) e quindi in particolare l'equazione di D'Alembert (5.3) nel caso $\mu = 0$. Definiamo su Ω la funzione $E \in C^1(\Omega)$:

$$E(t, \mathbf{x}) := \frac{1}{2} \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} \right)^2 + \nabla \varphi(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi(t, \mathbf{x}) + \mu^2 \varphi(t, \mathbf{x})^2 \right]. \quad (5.14)$$

Chiameremo la funzione E **densità di energia** di φ . Questa funzione è di fondamentale importanza in matematica oltre che in fisica in quanto consente di provare dei teoremi di unicità per le soluzioni delle equazioni considerate.

Osservazioni 5.4.

(1) In realtà E descrive effettivamente la densità di energia associata a campo φ nel caso in cui esso sia il campo quantistico di Klein-Gordon. Negli altri casi, la grandezza E non ha sempre il significato di densità di energia anche se lo ha in certi casi importanti, per esempio quando φ descrive le deformazioni longitudinali di una sbarra elastica e l'equazione considerata è quella di D'Alembert piuttosto che quella di Klein-Gordon. In tal caso E è davvero la densità di energia elastica del mezzo continuo.

(2) Si osservi che $E(t, \mathbf{x}) \geq 0$ ovunque è definita e questo fatto sarà di cruciale importanza tra

poco.

(3) Nel caso in cui si lavori con funzioni a valori complessi, la densità di energia viene ridefinita come:

$$E(t, \mathbf{x}) := \frac{1}{2} \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial \overline{\varphi(t, \mathbf{x})}}{\partial t} \frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \nabla \overline{\varphi(t, \mathbf{x})} \cdot \nabla \varphi(t, \mathbf{x}) + \mu^2 \overline{\varphi(t, \mathbf{x})} \varphi(t, \mathbf{x}) \right]. \quad (5.15)$$

Proposizione 5.1. *Si consideri una funzione φ di classe $C^2(\Omega)$ dove $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ è un aperto sul quale la funzione soddisfa l'equazione di Klein-Gordon (5.4) e quindi in particolare l'equazione di D'Alembert (5.3) nel caso $\mu = 0$. La densità di energia E di φ soddisfa:*

$$\frac{\partial}{\partial t} E(t, \mathbf{x}) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \nabla \varphi \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rho(t, \mathbf{x}), \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in \Omega. \quad (5.16)$$

In particolare, nel caso in cui $n = 1$, la (5.16) si riduce a:

$$\frac{\partial}{\partial t} E(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rho(t, x), \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in \Omega. \quad (5.17)$$

◇

Dimostrazione. Per computo diretto, dalla definizione di E :

$$\frac{\partial}{\partial t} E = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \nabla \varphi \cdot \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} + \mu^2 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Dato che, dall'equazione di Klein-Gordon con sorgente:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta \varphi - \mu^2 \varphi - \rho,$$

sostituendo nell'espressione trovata sopra per la derivata temporale di E , abbiamo:

$$\frac{\partial}{\partial t} E = \frac{\partial \varphi}{\partial t} (\Delta \varphi - \mu^2 \varphi - \rho) + \nabla \varphi \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu^2 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

dove abbiamo anche scambiato l'ordine di due derivate essendo la funzione φ di classe C^2 . Il risultato ottenuto si può riscrivere:

$$\frac{\partial}{\partial t} E = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Delta \varphi + \nabla \varphi \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rho,$$

e cioè :

$$\frac{\partial}{\partial t} E(t, \mathbf{x}) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \nabla \varphi \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rho(t, \mathbf{x}).$$

Il caso $n = 1$ si dimostra nello stesso modo. □

Osservazioni 5.5.

(1) La proposizione precedente è valida anche per funzioni a valori complessi che soddisfano l'equazione di Klein-Gordon e si dimostra nello stesso modo, partendo dalla (5.15) invece che dalla (5.14). In tal caso la (5.16) deve essere modificata in:

$$\frac{\partial}{\partial t} E(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \nabla \cdot \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} \nabla \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \nabla \bar{\varphi} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} \rho(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \overline{\rho(t, \mathbf{x})} \right), \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in \Omega. \quad (5.18)$$

(2) In riferimento al teorema precedente (e quanto segue si estende facilmente al caso di funzioni a valori complessi), in assenza della sorgente ρ , l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial t} E(t, \mathbf{x}) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \nabla \varphi \right)$$

può essere riscritta in termini di un'equazione di continuità:

$$\frac{\partial}{\partial t} E(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot \mathbf{J}_E = 0,$$

dove $\mathbf{J}_E := -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \nabla \varphi$. Vediamo il significato fisico di tale equazione. Fissiamo un insieme $[t_1, t_2] \times \bar{V} \subset \Omega$, dove $V \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto non vuoto a chiusura compatta il cui bordo è una superficie regolare orientabile e $t_1 < t_2$. Un tale insieme esiste nell'intorno di ogni punto di Ω , dato che questo è aperto e che i cilindri aperti $(t_1, t_2) \times V$ sono una base della topologia di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, prendendo, per esempio, gli insiemi V come palle aperte di \mathbb{R}^n . Consideriamo il caso in cui non ci sia la sorgente ρ . Se integriamo l'equazione (5.16) sul volume V otteniamo:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} E(t, \mathbf{x}) d^n x = \int_V \nabla \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \nabla \varphi \right) d^n x.$$

La derivata parziale nel tempo può essere portata fuori dall'integrale, dato che $\frac{\partial}{\partial t} E$ è continua e quindi è limitata sul compatto $[t_1, t_2] \times \bar{V}$ e V ha misura finita (pari a quella di \bar{V})⁴. In questo modo, l'equazione trovata può essere riscritta:

$$\frac{d}{dt} \int_V E(t, \mathbf{x}) d^n x = \oint_{+\partial V} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \nabla \varphi \right) \cdot \mathbf{n} dS(x).$$

Questa è, a tutti gli effetti, un'equazione di conservazione (o bilancio) della grandezza che si ottiene integrando E su un volume. L'identità trovata dice che la variazione per unità di tempo dell'energia totale presente nel volume V è pari al flusso di energia entrante che passa attraverso la superficie che circonda V stesso. In questo senso $\mathbf{J}_E = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \nabla \varphi$ si interpreta come la densità di corrente di energia o altrimenti detta il campo di flusso di energia.

⁴Infatti, dato che E è continua e quindi limitata su \bar{V} per ogni fissato t , è sicuramente (assolutamente) integrabile secondo Lebesgue su tale insieme per ogni valore del parametro t , inoltre $\frac{\partial}{\partial t} E$ una funzione continua congiuntamente nelle due variabili ed è dunque limitata, uniformemente in t , da qualche costante $M \geq 0$ sul compatto $[t_1, t_2] \times \bar{V}$. Dato che la funzione costante $V \ni \mathbf{x} \mapsto M$ (pensata come funzione della sola \mathbf{x}) è non negativa ed integrabile su V , avendo quest'ultimo misura finita, siamo nelle ipotesi di poter calcolare la derivata di $t \mapsto \int_V \frac{\partial}{\partial t} E(t, \mathbf{x}) d^n x$, per ogni $t \in (t_1, t_2)$ passando la derivata in t sotto il segno di integrale (vedi la sezione B.2 in Appendice).

5.3.2 Teoremi di unicità.

Possiamo ora enunciare e provare un teorema di unicità per l'equazione di Klein-Gordon con sorgente (5.4) che include, come caso particolare l'equazione di D'Alembert con sorgente (5.3).

Teorema 5.1. *Sia $(\alpha, \beta) \ni 0$ e $D \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, non vuoto, con \overline{D} compatto e ∂D regolare orientabile. Si consideri il problema di determinare $\varphi \in C^2((\alpha, \beta) \times \overline{D})$ che soddisfi l'equazione differenziale di Klein-Gordon con sorgente:*

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \Delta \varphi - \mu^2 \varphi = \rho,$$

(incluso il caso di D'Alembert $\mu = 0$) dove la costante $\mu \geq 0$ e la funzione $\rho \in C^0((\alpha, \beta) \times \overline{D})$ sono assegnate. Supponendo ulteriormente che siano state imposte condizioni iniziali:

$$\varphi(0, \mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x}), \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{(0, \mathbf{x})} = \varphi_1(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{D}, \text{ con } \varphi_0 \in C^2(\overline{D}) \text{ e } \varphi_1 \in C^1(\overline{D}) \text{ assegnate,}$$

e condizioni al contorno di tipo (i) oppure (ii) oppure (iii), con la funzione ψ assegnata come in 5.2. Infine, se si assegnano condizioni al contorno di tipo (iii), le costanti a e b sono supposte soddisfare $ab > 0$ (e non solo $ab \neq 0$).

Se esiste una soluzione questa è unica. \diamond

Dimostrazione. Siano φ_1 e φ_2 due soluzioni dello stesso problema di sopra. La funzione $\phi := \varphi_1 - \varphi_2 \in C^2((\alpha, \beta) \times \overline{D})$ risolve allora l'equazione senza sorgente

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \Delta \phi - \mu^2 \phi = 0,$$

con condizioni iniziali:

$$\phi(0, \mathbf{x}) = 0, \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{(0, \mathbf{x})} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{D},$$

e condizioni al contorno rispettivamente: (i) $\phi|_S = 0$, oppure (ii) $\mathbf{n} \cdot \nabla \phi|_S = 0$, oppure (iii) $a\phi|_S + b\mathbf{n} \cdot \nabla \phi|_S = 0$ con $ab > 0$, dove $S := (\alpha, \beta) \times \partial D$.

Ragionando esattamente come in (2) di osservazioni 5.5 arriviamo a concludere che:

$$\frac{d}{dt} \int_D E(t, \mathbf{x}) d^n x = \oint_{+\partial D} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \phi \right) \cdot \mathbf{n} dS(x).$$

Si osservi che il secondo membro è una funzione continua di t come si prova subito dal teorema della convergenza dominata notando che ∂D ha misura finita e che la funzione integranda è congiuntamente continua in tutte le variabili (vedi la sezione B.2 in Appendice). Concludiamo che, per ogni $T \in (\alpha, \beta)$:

$$\int_D E(T, \mathbf{x}) d^n x = \int_0^T dt \oint_{+\partial D} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \phi \right) \cdot \mathbf{n} dS(x). \quad (5.19)$$

(In particolare, nel caso $n = 1$:

$$\int_D E(T, \mathbf{x}) dx = \int_0^T \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_b - \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_a \right) dt. \quad (5.20)$$

dove a e b sono gli estremi dell'intervallo $D = (a, b)$.) Sopra abbiamo tenuto conto del fatto che, nelle nostre ipotesi E per il campo ϕ si annulla a $t = 0$ e quindi $\int_D E(0, \mathbf{x}) d^n x = 0$. Nel caso di condizioni al contorno di tipo (i) e (ii) il secondo membro di (5.19) è evidentemente nullo. Nel caso di condizioni al contorno di tipo (iii) si ottiene lo stesso risultato con un pò più di fatica come proveremo alla fine. Concludiamo che, nelle nostre ipotesi, per ogni tipo di condizione al contorno e per ogni $T \in (\alpha, \beta)$, vale $\int_D E(T, \mathbf{x}) d^n x = 0$ e quindi la funzione $E \geq 0$ deve essere quasi ovunque nulla. Essendo continua deve essere ovunque nulla. In definitiva abbiamo ottenuto che, per ogni $(t, \mathbf{x}) \in (\alpha, \beta) \times \overline{D}$:

$$E(t, \mathbf{x}) := \frac{1}{2} \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi(t, \mathbf{x})}{\partial t} \right)^2 + \nabla \phi(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \phi(t, \mathbf{x}) + \mu^2 \phi(t, \mathbf{x})^2 \right] = 0.$$

Dato che si tratta di una somma di addendi non negativi ogni addendo deve essere nullo separatamente. Se $\mu > 0$ concludiamo che $\phi = 0$ ovunque e quindi $\varphi_1 = \varphi_2$ su $(\alpha, \beta) \times \overline{D}$. Lo stesso risultato si ottiene se $\mu = 0$ osservando che, in virtù di quanto ottenuto sopra, le derivate temporali di ϕ devono annullarsi. Concludiamo (applicando il teorema di Lagrange) che per ogni fissato $\mathbf{x} \in \overline{D}$, $\phi(t, \mathbf{x}) = \phi(0, \mathbf{x})$ per ogni $t \in (\alpha, \beta)$. Ma $\phi(0, \mathbf{x}) = 0$ nelle nostre ipotesi. In definitiva $\varphi_1 = \varphi_2$ vale su $(\alpha, \beta) \times \overline{D}$ e quindi il teorema di unicità è provato.

Per concludere la dimostrazione proviamo che il secondo membro di (5.19) è nullo anche per condizioni al bordo di tipo (iii). Dato che $\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = -\frac{a}{b} \phi$, il secondo membro può ancora essere scritto,

$$-\int_0^T dt \oint_{+\partial D} \frac{a}{b} \frac{\partial \phi}{\partial t} \phi dS(x) = -\frac{a}{2b} \int_0^T dt \oint_{+\partial D} \frac{\partial \phi^2}{\partial t} dS(x) = -\frac{a}{2b} \int_0^T dt \frac{d}{dt} \oint_{+\partial D} \phi^2 dS(x).$$

Dove abbiamo usato note conseguenze del teorema della convergenza dominata (vedi la sezione B.2 in Appendice). In definitiva, dato che $\phi^2(0, \mathbf{x}) = 0$ su \overline{D} :

$$\int_D E(T, \mathbf{x}) d^n x = -\frac{a}{2b} \int_0^T dt \frac{d}{dt} \oint_{+\partial D} \phi^2 dS(x) = -\frac{a}{2b} \oint_{+\partial D} \phi^2(T, x) dS(x).$$

Si osservi che se $ab > 0$ significa che a e b hanno lo stesso segno e pertanto:

$$-\frac{a}{2b} \oint_{+\partial D} \phi^2(T, x) dS(x) \leq 0.$$

D'altra parte, dato che $E \geq 0$ abbiamo anche che $\int_D E(T, \mathbf{x}) d^n x \geq 0$. Di conseguenza l'identità ottenuta:

$$\int_D E(T, \mathbf{x}) d^n x = -\frac{a}{2b} \oint_{+\partial D} \phi^2(T, x) dS(x),$$

implica che: $\int_D E(T, \mathbf{x}) d^n x = 0$. \square

Osservazioni 5.6.

(1) Il teorema di unicità provato è valido, e si dimostra nello stesso modo, per il caso di funzioni a valori complessi, usando la forma (5.15) della densità di energia.

(2) Con una procedura di limite ed eseguendo in ordine diverso alcune delle integrazioni fatte nella dimostrazione di sopra, il risultato presentato nel teorema si può estendere al caso in cui si richiede più debolmente $\varphi \in C^2((0, \beta) \times D) \cap C^1((0, \beta) \times \overline{D})$, con $\varphi_0 \in C^1(\overline{D})$ e $\varphi_1 \in C^0(\overline{D})$, e $\psi \in C^1(S)$ in (ii) e $C^0(S)$ in (i) e (iii). In questa situazione però è necessario assumere che il volume D sia più regolare e che sia ottenibile (in un preciso senso che non chiariremo qui) come limite di una successione di domini $D_1 \subset \dots \subset D_n \subset D_{n+1} \subset \dots \subset D$ in modo tale che $Vol(\partial D_n) \leq Vol(\partial D)$.

(3) Lavorando su tutto lo spazio \mathbb{R}^n , si può dimostrare, e noi lo faremo per l'equazione di D'Alembert sulla retta reale, che se al tempo $t = 0$ i dati iniziali sono a supporto compatto, allora la soluzione $\varphi = \varphi(t, \mathbf{x})$, dell'equazione di Klein-Gordon/D'Alembert senza sorgente su $(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n$, ha supporto compatto quando ristretta ad ogni insieme $[\alpha', \beta'] \times \mathbb{R}^n$, con $[\alpha', \beta'] \subset (\alpha, \beta)$. Questo risultato non è per nulla ovvio, per esempio non vale per equazioni paraboliche oppure per l'equazione di Schrödinger. In base a tale risultato il seguente teorema di unicità non risulta essere inutile.

Teorema 5.2. *Sia $(\alpha, \beta) \ni 0$. Si consideri il problema di determinare $\varphi \in C^2((\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n)$ che soddisfi l'equazione differenziale di Klein-Gordon:*

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \Delta \varphi - \mu^2 \varphi = 0,$$

(incluso il caso di D'Alembert $\mu = 0$) dove la costante $\mu \geq 0$ è assegnata. Supponendo ulteriormente che siano state imposte condizioni iniziali:

$$\varphi(0, \mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x}), \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{(0, \mathbf{x})} = \varphi_1(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \text{ con } \varphi_0 \in C_0^2(\mathbb{R}^n) \text{ e } \varphi_1 \in C_0^1(\mathbb{R}^n) \text{ assegnate.}$$

Se esiste una soluzione φ tale che ha supporto compatto quando ristretta ad ogni insieme $[\alpha', \beta'] \times \mathbb{R}^n$, con $[\alpha', \beta'] \subset (\alpha, \beta)$, tale soluzione è unica. \diamond

Dimostrazione. Siano φ_1 e φ_2 due soluzioni del problema. Consideriamo $\phi := \varphi_1 - \varphi_2 \in C^2((\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n)$. Questa è ancora una soluzione del problema, con dati iniziali nulli ed ha supporto compatto quando ristretta ad ogni insieme $[\alpha', \beta'] \times \mathbb{R}^n$, con $[\alpha', \beta'] \subset (\alpha, \beta)$. Fissato $[\alpha', \beta'] \subset (\alpha, \beta)$, dato che il supporto di ϕ ristretta a tale insieme è compatto e quindi limitato, consideriamo una palla chiusa di raggio finito e centrata nell'origine, $B \subset \mathbb{R}^n$ in modo tale che $[\alpha', \beta'] \times B$ includa il supporto di ϕ . Consideriamo poi una seconda palla aperta di raggio finito e centrata nell'origine, $D \subset \mathbb{R}^n$ che includa la palla chiusa B . Per costruzione, per ogni $T \in [\alpha', \beta']$, la funzione $\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \phi(T, \mathbf{x})$ si annulla su $D \cup \partial D$, ma anche nella corona sferica

aperta $D \setminus B$. Di conseguenza, si annulla con tutte le sue derivate (spaziali e temporali) fino a secondo ordine su ∂D . Lavorando come nella dimostrazione del teorema precedente abbiamo che, per ogni $T \in [\alpha', \beta']$:

$$\int_D E(T, \mathbf{x}) d^n x = \int_0^T dt \oint_{+\partial D} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \phi \right) \cdot \mathbf{n} dS(x) = 0,$$

dato che su $[0, T] \times \partial D$ la funzione ϕ e le sue derivate sono nulle. Ragionando come nel caso del teorema precedente si ha $\phi(T, \mathbf{x}) = 0$ per ogni $T \in (\alpha, \beta)$ e $\mathbf{x} \in \overline{D}$, ma quindi anche fuori da \overline{D} dato che fuori da tale insieme ϕ si annulla per ipotesi. Di conseguenza: $\varphi_1(t, \mathbf{x}) = \varphi_2(t, \mathbf{x})$ ovunque su $(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n$. \square

Osservazioni 5.7. È interessante notare che, nelle ipotesi del teorema, scegliendo cioè D abbastanza grande in modo tale che ∂D non intersechi mai il supporto di $\varphi(t, \mathbf{x})$ per $t \in (\alpha', \beta')$, abbiamo che $\mathcal{E} := \int_D E(t, \mathbf{x}) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} E(t, \mathbf{x}) d^n x$. In questo modo abbiamo una nozione di *energia totale* associata al campo φ e tale energia è conservata nel tempo essendo, come è provato nel teorema $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$. Il valore di \mathcal{E} dipende ovviamente dalla soluzione φ considerata.

Capitolo 6

Equazione di D'Alembert e di Klein-Gordon in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \times [a, b]$.

In questo capitolo studieremo il problema dell'equazione di D'Alembert sul dominio spaziale dato da tutto \mathbb{R} in assenza di condizioni al contorno. Successivamente discuteremo alcuni semplici risultati per l'equazione di D'Alembert e Klein-Gordon con un dominio spaziale dato da un segmento con l'aggiunta di condizioni al contorno, facendo uso di elementari teoremi della teoria della serie di Fourier. Nel caso dell'equazione di D'Alembert, estenderemo qualche risultato al caso di oscillazioni di membrane. Dopo avere mostrato come l'equazione di D'Alembert descriva anche le onde sonore nei gas in approssimazione adiabatica, useremo i risultati ottenuti per l'equazione di D'Alembert per descrivere, in modo piuttosto idealizzato e generale, il funzionamento di alcuni strumenti musicali a corde e cassa armonica facendo anche un breve excursus nella teoria matematica della musica.

6.1 Equazione di D'Alembert sulla retta reale senza condizioni al contorno.

Consideriamo l'equazione di D'Alembert in \mathbb{R}^2 e quindi con x che varia su tutta la retta reale. Benché si tratti di un caso molto particolare, è possibile in questo caso, scrivere esplicitamente la soluzione dell'equazione di D'Alembert. Inoltre molte delle proprietà di queste soluzioni hanno validità molto generale anche in dimensione maggiore ed in varietà ambiente (spazitempo) curve.

6.1.1 Assenza di sorgenti, formula di D'Alembert, domini di dipendenza.

Per prima cosa ci occupiamo del problema con soli dati iniziali ed in assenza di sorgenti (non ci sono dati al bordo in questo caso):

$$\begin{cases} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, & \varphi \in C^2(\mathbb{R}^2), \\ \varphi(0, x) = \phi_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x) = \phi_1(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (6.1)$$

dove $\phi_0 \in C^2(\mathbb{R})$ e $\phi_1 \in C^1(\mathbb{R})$ sono funzioni assegnate. Dimostreremo un teorema di esistenza ed unicità per il problema (6.1), dando esplicitamente l'espressione della soluzione in funzione dei dati iniziali. Successivamente, in un'osservazione, mostreremo anche che il problema è ben posto nel senso di Hadamard.

Per risolvere l'equazione differenziale di D'Alembert:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (6.2)$$

facciamo il cambiamento di coordinate $v := (x - ct)/2$ e $w = (x + ct)/2$ che si inverte in $x = v + w$ e $t = (w - v)/c$ e pertanto definisce una funzione biettiva C^∞ da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 con inversa C^∞ . Con questa scelta risulta:

$$\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$$

e quindi si ha, per ogni funzione $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial}{\partial w} \varphi(t(v, w), x(v, w)) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi(t, x) = \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \varphi(t, x).$$

Concludiamo che: $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ risolve (6.2) se e solo se la funzione $C^2(\mathbb{R}^2)$, definita come $\psi(v, w) := \varphi(t(v, w), x(v, w))$, risolve

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial v \partial w} = 0. \quad (6.3)$$

Abbiamo allora il seguenti due lemmi.

Lemma 6.1. *Sia $\Omega \in \mathbb{R}^2$ un aperto connesso per segmenti paralleli all'asse x (cioè, per ogni coppia di punti in Ω il segmento parallelo all'asse x che li congiunge è tutto incluso in Ω). Se $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è ovunque derivabile nella variabile x e soddisfa $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ ovunque su Ω , allora, su tutto Ω , $\phi(x, y) = F(y)$ per qualche funzione F della sola variabile y . \diamond*

Dimostrazione. Si considerino due punti $(x, y), (x', y) \in \Omega$, con y fissato arbitrariamente. Il teorema di Lagrange per la funzione $s \mapsto \phi(s, y)$ può essere applicato sul segmento chiuso parallelo all'asse x che connette (x, y) e (x', y) , dato che tale segmento è tutto incluso nel dominio

della funzione ϕ e che la funzione $s \mapsto \phi(s, y)$ è derivabile su tale segmento per ipotesi. Si ottiene allora $\phi(x, y) - \phi(x', y) = (x - x') \frac{\partial \phi}{\partial x} |_{(\xi, y)} = 0$, cioè $\phi(x, y) = \phi(x', y)$. Indichiamo allora con $F(y)$ il valore comune che ϕ assume sui punti in Ω appartenenti alla retta parallela all'asse x e tracciata alla generica quota y . Per costruzione, vale $\phi(x, y) = F(y)$ per ogni $(x, y) \in \Omega$. \square

Osservazioni 6.1. Il risultato è meno banale di quello che si potrebbe credere a prima vista, ed è per questo che lo abbiamo dimostrato esplicitamente. Infatti, se Ω non è connesso per segmenti paralleli all'asse x , la condizione $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ ovunque su Ω non assicura che si possa scrivere $\phi(x, y) = F(y)$ per qualche funzione F della sola variabile y ! Si consideri infatti l'aperto $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y \geq 0\}$ e su di esso la funzione $\phi = \phi(x, y)$ definita come segue.

(i) $\phi(x, y) = 0$ se $y < 0$,

(ii) $\phi(x, y) = 0$ se $x > 0$ e $y \geq 0$,

(iii) $\phi(x, y) = h(y)$ se $y \geq 0$ e $x < 0$, dove h è una qualsiasi (ma fissata) funzione $C^1([0, +\infty))$ che vale 0 per $y \in [0, 1/3]$ e 1 per $y \in [2/3, +\infty)$.

La funzione ϕ costruita in questo modo è in $C^1(\Omega)$ e soddisfa $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ ovunque su Ω , ma non è possibile scrivere $\phi(x, y) = F(y)$ per qualche funzione F della sola variabile y : se ciò fosse possibile avremmo $1 = \phi(-1, 1) = F(1) = \phi(1, 1) = 0$.

Lemma 6.2. La funzione $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ risolve l'equazione (6.2) se e solo se è della forma

$$\varphi(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad \text{per ogni } (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad (6.4)$$

dove $f, g \in C^2(\mathbb{R})$. \diamond

Dimostrazione. Per quanto detto prima dell'enunciato del lemma 6.1, definita la funzione in $C^2(\mathbb{R}^2)$ data da $\psi(v, w) := \varphi(t(v, w), x(v, w))$, è sufficiente dimostrare che le soluzioni di (6.3) sono tutte e sole della forma $\psi(v, w) = k(v) + h(w)$ dove $k, h \in C^2(\mathbb{R})$ e quindi definire $f(x - ct) := k((x - ct)/2)$ e $g(x + ct) := h((x + ct)/2)$. Dimostriamo quanto detto. Se $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ soddisfa la (6.3), poniamo $G(u, w) := \frac{\partial \psi}{\partial w}$. Valendo $\frac{\partial G(v, w)}{\partial v} = 0$, per $(v, w) \in \mathbb{R}^2$ che è sicuramente connesso per segmenti paralleli all'asse v , per il lemma 6.1 concludiamo che $\frac{\partial \psi}{\partial w} = F(w)$ per una certa funzione F . Tale funzione deve essere C^1 , e quindi integrabile, dato che $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Dato che \mathbb{R}^2 è anche connesso per segmenti paralleli all'asse w , possiamo allora scrivere, per v, w_0 fissati:

$$\int_{w_0}^w \frac{\partial \psi}{\partial w}(v, w') dw' = \int_{w_0}^w F(w') dw'.$$

Da cui:

$$\psi(v, w) = \psi(v, w_0) + \int_{w_0}^w F(w') dw',$$

che possiamo riscrivere:

$$\psi(v, w) = k(v) + h(w),$$

dove $k(v) := \psi(v, w_0)$ e $h(w) := \int_{w_0}^w F(w') dw'$. Le funzioni k e h risultano essere funzioni $C^2(\mathbb{R})$ per costruzione. Viceversa, se $\psi(v, w) = k(v) + h(w)$ per ogni $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ con $k, h \in C^2(\mathbb{R})$,

allora $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e risolve (6.3), come si verifica immediatamente. \square

Dato che ora abbiamo la classe completa delle soluzioni dell'equazione (6.2), non ci resta che verificare se esistano, in tale classe, delle soluzioni che soddisfino anche le condizioni iniziali del problema (6.1). Arriviamo in tal modo al seguente teorema di esistenza ed unicità di D'Alembert.

Teorema 6.1. *Esiste ed è unica la soluzione φ del problema (6.1) per ogni scelta delle condizioni iniziali $\phi_0 \in C^2(\mathbb{R})$ e $\phi_1 \in C^1(\mathbb{R})$. Tale soluzione si esprime tramite la **formula di D'Alembert**:*

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{2} [\phi_0(x - ct) + \phi_0(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \phi_1(\xi) d\xi. \quad (6.5)$$

◇

Dimostrazione. Sappiamo dal lemma 6.2 che, se esiste, la soluzione deve avere forma $\varphi(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct)$, dove $f, g \in C^2(\mathbb{R})$. Vogliamo determinare f e g in funzione delle condizioni iniziali. Per $t = 0$ deve allora risultare $\phi_0(x) = f(x) + g(x)$ e quindi $\phi_0'(x) = f'(x) + g'(x)$. Dato che vale anche $\phi_1(x) = -cf'(x) + cg'(x)$, ricaviamo subito: $f'(x) = \frac{1}{2c}(c\phi_0'(x) - \phi_1(x))$ e $g'(x) = \frac{1}{2c}(c\phi_0'(x) + \phi_1(x))$. Possiamo integrare queste espressioni ottenendo, se a, b sono costanti reali,

$$f(x) = a + \frac{1}{2}\phi_0(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x \phi_1(\xi) d\xi, \quad g(x) = b + \frac{1}{2}\phi_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x \phi_1(\xi) d\xi.$$

Di conseguenza, se esiste una soluzione al problema è nella classe di funzioni, parametrizzata dalle costanti $A \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(t, x) = A + \frac{1}{2}\phi_0(x - ct) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} \phi_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2}\phi_0(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} \phi_1(\xi) d\xi.$$

Si osservi ogni funzione di tale classe è C^2 per costruzione e soddisfa necessariamente (6.2) per ogni scelta di $A \in \mathbb{R}$, dato che è proprio della forma richiesta nel lemma 6.2. La prima condizione iniziale è soddisfatta solo se $A = 0$, valendo $\varphi(0, x) = A + \phi_0(x)$, e la seconda condizione iniziale è sempre soddisfatta, valendo: $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x) = \phi_1(x)$. In definitiva l'unica soluzione al problema (6.1) è la funzione della classe di sopra con $A = 0$. Possiamo riscrivere la soluzione come:

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{2}\phi_0(x - ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^0 \phi_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2}\phi_0(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} \phi_1(\xi) d\xi,$$

e quindi:

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{2} [\phi_0(x - ct) + \phi_0(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \phi_1(\xi) d\xi.$$

□

Osservazioni 6.2.

(1) La forma generale della soluzione dell'equazione di D'Alembert ha comunque una struttura della forma:

$$\varphi(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct).$$

Il primo addendo a secondo membro rappresenta un profilo d'onda che procede da sinistra verso destra traslando senza deformarsi, alla velocità c (infatti, in un intervallo di tempo Δt , il profilo trasla di un intervallo di spazio $\Delta x = c\Delta t$). Questo tipo di onda è detta **onda progressiva**. Il secondo addendo a secondo membro rappresenta un profilo d'onda che procede da destra verso sinistra traslando senza deformarsi, alla velocità c . Questo tipo di onda è detta **onda regressiva**. In questo senso la costante c che appare nell'equazione di D'Alembert rappresenta la velocità di propagazione delle perturbazioni soluzioni dell'equazione. In dimensione spaziale maggiore di 1, la situazione è analoga, ma si assiste anche ad una deformazione del profilo della perturbazione; in ogni caso si riesce a provare che la costante c ha ancora lo stesso significato fisico, dopo avere introdotto la nozione di *velocità di fase*, della quale qui non ci occuperemo.

(2) Consideriamo il problema (6.1) e la sua soluzione espressa dalla formula di D'Alembert (6.5). Se $(a, b) \subset \mathbb{R}$ è limitato, si definisce in \mathbb{R}^2 il **dominio di dipendenza futuro** $D_+(a, b)$ come l'insieme chiuso dato dal triangolo di base $[a, b]$ sull'asse $t = 0$ e vertice nel semipiano $t > 0$ individuato dall'intersezione delle due rette che partono da a e b rispettivamente ed hanno inclinazione $1/c$ e $-1/c$ rispettivamente. Tale vertice ha coordinate $x_+ = (a+b)/2$ e $t_+ = (b-a)/(2c)$. Si definisce analogamente il **dominio di dipendenza passato** $D_-(a, b)$ come l'insieme chiuso dato dal triangolo di base $[a, b]$ sull'asse $t = 0$ e vertice nel semipiano $t < 0$ individuato dall'intersezione delle due rette che partono da a e b rispettivamente ed hanno inclinazione $-1/c$ e $1/c$ rispettivamente. Tale vertice ha coordinate $x_- = (a+b)/2$ e $t_- = -(b-a)/(2c)$. Il **dominio di dipendenza** $D(a, b)$ è, per definizione l'unione di $D_+(a, b)$ e $D_-(a, b)$. Si osservi che le rette di inclinazione $\pm 1/c$, che individuano il bordo di $D(a, b)$, sono *rette caratteristiche* per l'equazione di D'Alembert.

Se si considera un punto $(t_0, x_0) \in D_+(a, b)$, la formula di D'Alembert per in campo φ valutato in (t_0, x_0) , mostra che il valore $\varphi(t_0, x_0)$ dipende solo dal valore di ϕ_0 e ϕ_1 in $[a, b]$. Più precisamente, i valori rilevanti di ϕ_0 e ϕ_1 sono quelli che cadono nel sottointervallo $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0] \subset [a, b]$. Tale sottointervallo si ottiene intersecando con l'asse $t = 0$ le due rette caratteristiche emanate, verso il passato, da (t_0, x_0) . Un discorso analogo si può fare per il punto in $D_-(a, b)$.

La formula di D'Alembert implica quindi che, all'interno di $D(a, b)$, la funzione φ sia completamente determinata dalle due condizioni iniziali ristrette ad $[a, b]$, nel senso che, se alteriamo tali condizioni iniziali *fuori* da $[a, b]$, la soluzione φ non risulta essere alterata dentro $D(a, b)$.

L'esistenza di domini di dipendenza con le proprietà dette è comune alla teoria di tutte le equazioni differenziali a derivate parziali del secondo ordine di tipo iperbolico su varietà differenziabili Lorentziane, cioè su spaziotempo (generalmente curvi), quando la forma quadratica dell'equazione è data dalla stessa metrica dello spaziotempo. Si tratta di uno dei punti di partenza per sviluppare la *teoria della causalità* in teoria dei campi in ambiente relativistico generale.

(3) La formula di D'Alembert implica che il problema iperbolico (6.1) sia ben posto nel senso di Hadamard. Sappiamo già che la soluzione esiste ed è unica, dobbiamo quindi studiare la dipendenza continua dai dati iniziali. L'ambiente naturale in cui studiare questo problema è un dominio di dipendenza. Consideriamo due set di condizioni iniziali ϕ_0, ϕ_1 e $\tilde{\phi}_0, \tilde{\phi}_1$, indichiamo con φ e $\tilde{\varphi}$ le corrispondenti soluzioni dell'equazione di D'Alembert, fissiamo un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e l'associato dominio di dipendenza $D(a, b)$. Dalla formula di D'Alembert segue immediatamente

che, se $(t, x) \in D(a, b)$

$$|\varphi(t, x) - \widetilde{\varphi}(t, x)| \leq \frac{1}{2} \sup_{\xi \in [a, b]} |\phi_0(\xi) - \tilde{\phi}_0(\xi)| + \frac{1}{2} \sup_{\xi \in [a, b]} |\phi_0(\xi) - \tilde{\phi}_0(\xi)| + \frac{1}{2c} \sup_{\xi \in [a, b]} |\phi_1(\xi) - \tilde{\phi}_1(\xi)| \int_{x-ct}^{x+ct} d\xi.$$

L'ultimo integrale vale t e quindi è maggiorato da $T_{[a, b]}$ pari all'altezza del triangolo $D_+(a, b)$. In definitiva abbiamo trovato che, se $\|\cdot\|_{\infty A}$ indica la norma dell'estremo superiore calcolata restringendo il dominio delle funzioni all'insieme A ,

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{\infty D(a, b)} \leq \|\phi_0 - \tilde{\phi}_0\|_{\infty [a, b]} + T_{[a, b]} \|\phi_1 - \tilde{\phi}_1\|_{\infty [a, b]}. \quad (6.6)$$

Se deriviamo entrambi i membri della formula di D'Alembert nella variabile t otteniamo che

$$\partial_t \varphi(t, x) = \frac{c}{2} [-\phi'_0(x - ct) + \phi'_0(x + ct)] + \frac{1}{2}(\phi_1(x + ct) + \phi_1(x - ct)).$$

In conseguenza di quanto trovato abbiamo che:

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \right\|_{\infty D(a, b)} \leq c \|\phi'_0 - \tilde{\phi}'_0\|_{\infty [a, b]} + \|\phi_1 - \tilde{\phi}_1\|_{\infty [a, b]}.$$

In modo analogo abbiamo anche che:

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \right\|_{\infty D(a, b)} \leq \|\phi'_0 - \tilde{\phi}'_0\|_{\infty [a, b]} + \frac{1}{c} \|\phi_1 - \tilde{\phi}_1\|_{\infty [a, b]}.$$

Valgono, e si ottengono con la stessa procedura, delle disuguaglianze per le derivate seconde:

$$\left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} \right\|_{\infty D(a, b)} \leq \|\phi''_0 - \tilde{\phi}''_0\|_{\infty [a, b]} + \frac{1}{c} \|\phi'_1 - \tilde{\phi}'_1\|_{\infty [a, b]},$$

$$\left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial t^2} \right\|_{\infty D(a, b)} \leq c^2 \|\phi''_0 - \tilde{\phi}''_0\|_{\infty [a, b]} + c \|\phi'_1 - \tilde{\phi}'_1\|_{\infty [a, b]},$$

$$\left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial t \partial x} \right\|_{\infty D(a, b)} \leq c \|\phi''_0 - \tilde{\phi}''_0\|_{\infty [a, b]} + \|\phi'_1 - \tilde{\phi}'_1\|_{\infty [a, b]}.$$

Queste relazioni mostrano come, prendendo condizioni iniziali vicine fino ad un certo ordine di differenziabilità, si ottengono soluzioni vicine fino all'ordine di differenziabilità considerato. Questo è proprio il senso della dipendenza continua dai dati iniziali proposta da Hadamard. Questa proprietà si generalizza a equazioni differenziali di tipo iperbolico in dimensione ed ambienti molto più generali.

(4) La formula di D'Alembert definisce una funzione φ su \mathbb{R}^2 anche se le due funzioni ϕ_0 e ϕ_1 non sono C^2 in qualche punto isolato di \mathbb{R} attorno al quale ϕ_1 sia comunque integrabile. Perché esista φ definita dal secondo membro della formula di D'Alembert è, a rigore, sufficiente che ϕ_1 sia integrabile. Si vede facilmente che se x_0 è uno dei punti isolati di singolarità di ϕ_0 o ϕ_1 ,

il secondo membro della formula di D'Alembert è una funzione ovunque C^2 che soddisfa l'equazione di D'Alembert e le condizioni iniziali, eccetto che sulle rette caratteristiche che escono dal punto $(0, x_0)$ (e sulle rette analoghe che escono dagli altri punti isolati di singolarità). In questo senso *le singolarità delle condizioni iniziali si propagano lungo le curve caratteristiche*. Questo fatto è piuttosto generale e vale per equazioni differenziali di tipo iperbolico in dimensione ed ambienti molto più generali.

L'osservazione (3) di sopra ha un'importante conseguenza precedentemente preannunciata. Dato $[a, b] \subset \mathbb{R}$, pensato come retta a $t = 0$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, definiamo lo **sviluppo causale** di $[a, b]$, indicato con $J(a, b) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, come l'insieme (chiuso) dei punti di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ che possono essere raggiunti da una retta di pendenza in valore assoluto $\geq 1/c$ emanata da $[a, b]$ (quindi per esempio la retta $x = x_0 \in [a, b]$ costante, per $t \in \mathbb{R}$).

$J(a, b)$ risulta essere l'unione dei due coni infiniti, uno di vertice con coordinate $x_+ = (a + b)/2$ (cioè il punto medio di (a, b)) e $t_+ = (b - a)/(2c)$, emanato verso il passato, e l'altro di vertice di coordinate $x_- = x_+$ e $t_- = -t_+$ emanato verso il futuro. Si osservi ancora che $\mathbb{R}^2 \setminus J(a, b)$ è l'unione di tutti i domini di dipendenza $D(c, d)$ con $c > b$ oppure $d < a$.

Teorema 6.2. *Se nel problema (6.1) le condizioni iniziali sono scelte a supporto compatto: $\phi_0 \in C_0^2(\mathbb{R})$ e $\phi_1 \in C_0^1(\mathbb{R})$, e $[a, b] \supset \text{supp}\phi_0 \cup \text{supp}\phi_1$, allora la soluzione φ del problema è nulla fuori da $J(a, b)$. Di conseguenza, per ogni fissato $[\alpha, \beta]$ con $[\alpha, \beta] \ni 0$:*

- (a) *il supporto della soluzione φ ristretta a $[\alpha, \beta] \times \mathbb{R}$ è compatto;*
- (b) *per ogni fissato $t \in [\alpha, \beta]$, il supporto di $\mathbb{R} \ni \mathbf{x} \mapsto \varphi(t, \mathbf{x})$ è compatto in \mathbb{R} . \square*

Dimostrazione. Dalla (6.6), scegliendo $\tilde{\varphi}$ come la funzione ovunque nulla (che quindi risolve il problema con dati iniziali ovunque nulli), troviamo:

$$\|\varphi\|_{\infty D(a', b')} \leq \|\phi_0\|_{\infty [a', b']} + T_{[a', b']} \|\phi_1\|_{\infty [a', b']}.$$

Fissiamo ora un qualsiasi punto (t_0, x_0) fuori da $J(a, b)$ con $t_0 \geq 0$. Per definizione di $J(a, b)$, se $a' = x_0 - ct_0$ e $b' = x_0 + ct_0$, allora $[a', b']$ non interseca mai $[a, b]$. Dato che $[a, b]$ contiene i supporti di ϕ_0 e ϕ_1 , tali funzioni sono nulle in $[a', b']$. Concludiamo che

$$0 \leq \|\varphi\|_{\infty D(a', b')} \leq \|\phi_0\|_{\infty [a', b']} + T_{[a', b']} \|\phi_1\|_{\infty [a', b']} = 0 + 0 = 0$$

e quindi, in particolare, dato che $(t_0, x_0) \in D(a', b')$, $\varphi(t_0, x_0) = 0$. Fissiamo infine il compatto $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ con $[\alpha, \beta] \ni 0$. Tenendo conto della forma di $J(a, b)$ che è dato dall'unione di due coni come precisato sopra, segue subito che il supporto di φ ristretta alla regione chiusa tra le due rette $t = \alpha$ e $t = \beta$, è contenuto nell'unione dei due trapezi chiusi di base minore in comune data da $[a, b]$ e basi maggiori individuate dalla porzione delle rette $t = \alpha$ e $t = \beta$ che cadono in $J(a, b)$. Tale insieme è evidentemente limitato, pertanto il supporto di φ ristretta alla regione chiusa tra le due rette $t = \alpha$ e $t = \beta$, che è un insieme chiuso per definizione, è anch'esso compatto. Il supporto di $\mathbb{R} \ni \mathbf{x} \mapsto \varphi(t, \mathbf{x})$, con $t \in [\alpha, \beta]$, è un chiuso sottoinsieme di un compatto ed è pertanto anch'esso compatto. \square

Osservazioni 6.3. Come già osservato precedentemente, ma ora possiamo essere più chiari, le due proprietà (a) e (b) sono valide anche in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ per le soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon e d'Alembert quando i dati iniziali hanno supporto compatto (e tale fatto vale in maniera molto generale per soluzioni di equazioni iperboliche su uno spaziotempo curvo con la proprietà della "globale iperbolicità"). Nel caso generale però, la dimostrazione di (a) e (b) è molto più complicata.

6.1.2 Equazione di D'Alembert su tutta la retta con sorgente.

Consideriamo ora il problema con sorgente, data dalla funzione f :

$$\begin{cases} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = f(t, x), & \varphi \in C^2(\mathbb{R}^2), \\ \varphi(0, x) = \phi_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x) = \phi_1(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (6.7)$$

dove $\phi_0 \in C^2(\mathbb{R})$ e $\phi_1 \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$ sono funzioni assegnate.

Abbiamo un primo risultato, abbastanza semplice, che riguarda l'unicità della soluzione.

Teorema 6.3. *Se esiste una soluzione al problema (6.7) con fissati dati $\phi_0 \in C^2(\mathbb{R})$ e $\phi_1 \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$, allora è unica. \diamond*

Dimostrazione. Se φ_1 e φ_2 risolvono il problema (6.7) con gli stessi dati $\phi_0 \in C^2(\mathbb{R})$ e $\phi_1 \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$ allora $\varphi := \varphi_1 - \varphi_2$ risolve il problema (6.1) con condizioni iniziali nulle. In base al teorema 6.1 deve essere $\varphi(t, x) = 0$ ovunque, dato che la soluzione ovunque nulla risolve il problema posto ed è l'unica a farlo. Pertanto $\varphi_1(t, x) = \varphi_2(t, x)$ per ogni $(t, x) \in \mathbb{R}^2$. \square

Passiamo a dimostrare un teorema di esistenza nel caso in cui $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Possiamo decomporre la funzione φ in due parti $\varphi = \phi + \Phi$, in cui ϕ soddisfa il problema omogeneo

$$\begin{cases} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0, & \phi \in C^2(\mathbb{R}^2), \\ \phi(0, x) = \phi_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t}(0, x) = \phi_1(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (6.8)$$

mentre Φ soddisfa il problema con sorgente, ma con dati iniziali nulli

$$\begin{cases} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = f(t, x), & \Phi \in C^2(\mathbb{R}^2), \\ \Phi(0, x) = 0 & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, x) = 0 & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (6.9)$$

Dovrebbe essere ovvio che $\varphi = \phi + \Phi$ soddisfa (6.7) se le due funzioni hanno le proprietà richieste. La funzione ϕ esiste sicuramente in base al teorema 6.1. Mostriamo ora che esiste anche una funzione Φ che risolve (6.9). Consideriamo infatti:

$$\Phi(t, x) := -\frac{c}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} d\xi f(\tau, \xi) . \quad (6.10)$$

Si osservi che l'integrale può essere riscritto (anche se $t \leq 0$) come l'integrale doppio di Riemann (o Lebesgue)

$$\Phi(t, x) := -\frac{c}{2} \text{sign}(t) \int_{A(t,x)} f(\tau, \xi) d\tau d\xi ,$$

dove $\text{sign}(t) := 1$ se $t > 0$, $\text{sign}(t) := -1$ se $t < 0$, $\text{sign}(t) = 0$ se $t = 0$ e il dominio d'integrazione $A(t, x)$ nel piano (τ, ξ) è un compatto essendo dato dal triangolo di base $[x - ct, x + ct]$ sull'asse $\tau = 0$ e vertice (t, x) , e quindi la funzione continua f è dunque integrabile su tale dominio. Si noti che quindi $A(t, x) = D_+(x - ct, x + ct)$ se $t \geq 0$, oppure $A(t, x) = D_-(x - ct, x + ct)$ se $t \leq 0$. Vale, applicando i soliti teoremi di passaggio della derivata sotto il segno di integrale ove necessario,

$$-\partial_t \left(-\frac{c}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} d\xi f(\tau, \xi) \right) = \frac{c}{2} \int_{x-c(t-t)}^{x+c(t-t)} d\xi f(t, \xi) + \frac{c}{2} \int_0^t d\tau \partial_t \left(\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} d\xi f(\tau, \xi) \right) ,$$

e quindi

$$-\partial_t \Phi(t, x) = 0 + \frac{c^2}{2} \int_0^t d\tau [f(\tau, x + c(t - \tau)) + f(\tau, x - c(t - \tau))] . \quad (6.11)$$

Passando alla derivata seconda, ed usando esplicitamente il fatto che $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned} -\frac{2}{c^2} \partial_t^2 \Phi(t, x) &= \partial_t \int_0^t d\tau [f(\tau, x + c(t - \tau)) + f(\tau, x - c(t - \tau))] \\ &= [f(t, x + c(t - t)) + f(t, x - c(t - t))] + c \int_0^t d\tau [\partial_x f(\tau, x + c(t - \tau)) - \partial_x f(\tau, x - c(t - \tau))] . \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto:

$$-\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Phi(t, x) = f(t, x) + \frac{c}{2} \int_0^t d\tau [\partial_x f(\tau, x + c(t - \tau)) - \partial_x f(\tau, x - c(t - \tau))] . \quad (6.12)$$

Similmente:

$$\partial_x \Phi(t, x) = -\partial_x \frac{c}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} d\xi f(\tau, \xi) = -\frac{c}{2} \int_0^t d\tau [f(\tau, x + c(t - \tau)) - f(\tau, x - c(t - \tau))] ,$$

e quindi:

$$\partial_x^2 \Phi(t, x) = -\frac{c}{2} \int_0^t d\tau [\partial_x f(\tau, x + c(t - \tau)) - \partial_x f(\tau, x - c(t - \tau))] . \quad (6.13)$$

Sommando membro a membro (6.12) e (6.13) otteniamo:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = f.$$

Da (6.10) e (6.11) abbiamo immediatamente che Φ soddisfa anche le condizioni iniziali nulle del problema (6.9) come volevamo. Si osservi che la funzione Φ risulta essere $C^2(\mathbb{R}^2)$, le derivate seconde in x e t sono state calcolate sopra e si prova facilmente che sono continue, le derivate miste si calcolano analogamente e forniscono:

$$\partial_x \partial_t \Phi(t, x) = \partial_t \partial_x \Phi(t, x) = -\frac{c^2}{2} \int_0^t d\tau [\partial_x f(\tau, x + c(t - \tau)) + \partial_x f(\tau, x - c(t - \tau))],$$

che è una funzione continua se $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Abbiamo provato il seguente teorema.

Teorema 6.4. *Si consideri il problema (6.7) dove $\phi_0 \in C^2(\mathbb{R})$ e $\phi_1 \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ sono funzioni assegnate. Esiste ed è unica la soluzione φ di tale problema e si esprime come:*

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{2} [\phi_0(x - ct) + \phi_0(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \phi_1(\xi) d\xi - \frac{c}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} d\xi f(\tau, \xi).$$

□

Osservazioni 6.4. La formula (6.10), come già osservato può essere scritta come

$$\Phi(t, x) := -\frac{c}{2} \text{sign}(t) \int_{A(t,x)} f(\tau, \xi) d\tau d\xi,$$

dove $A(t, x)$ è un dominio compatto dato da $D_+(x - ct, x + ct)$ se $t \geq 0$, oppure $D_-(x - ct, x + ct)$ se $t \leq 0$. Possiamo riscrivere la formula che determina Φ come

$$\Phi(t, x) := \int_{\mathbb{R}^2} G(t, x|\tau, \xi) f(\tau, \xi) d\tau d\xi,$$

dove $G(t, x|\tau, \xi)$ non è altro che la funzione caratteristica, nel piano (τ, ξ) , di $D_+(x - ct, x + ct)$ se $t \geq 0$, oppure $D_-(x - ct, x + ct)$ se $t \leq 0$, moltiplicata per il fattore $-(c/2)\text{sign}(t)$. Tale funzione (in realtà è più propriamente pensabile come una funzione generalizzata o distribuzione) si chiama **funzione di Green** (con condizioni di annullamento sulla superficie $t = 0$) dell'operatore di D'Alembert su \mathbb{R}^2 :

$$\square := -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 + \partial_x^2.$$

Le funzioni di Green per le equazioni iperboliche possono essere definite (con vari dati iniziali) anche in dimensione maggiore ed in ambienti più generali. Esse giocano un ruolo importante negli sviluppi della teoria specie nelle teorie relativistiche (come dimostrato da Riesz, Hadamard e Leray, Hörmander).

6.2 Dalla separazione delle variabili alla serie di Fourier.

Consideriamo ora il problema di dover risolvere l'equazione di D'Alembert senza sorgente per la funzione $\varphi = \varphi(t, x)$ quando il dominio spaziale è un intervallo $[-L/2, L/2] \subset \mathbb{R}$ e $t \in (\alpha, \beta) \ni 0$, nella situazione in cui, oltre a condizioni iniziali a $t = 0$, sono imposte *condizioni al contorno di periodicità*:

$$\varphi(t, -L/2) = \varphi(t, L/2), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, -L/2) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, L/2), \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, -L/2) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, L/2) \quad \forall t \in (\alpha, \beta) \quad (6.14)$$

La terza condizione segue dalla prima e dall'equazione differenziale stessa. Dato che l'equazione è:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

possiamo tentare di risolverla, con la procedura detta di *separazione delle variabili*, assumendo una forma particolare delle soluzioni del tipo

$$\varphi(t, x) = f(t)g(x).$$

Inserendo nell'equazione di sopra si arriva subito all'identità, che vale quando le funzioni f e g non si annullano,

$$\frac{1}{c^2 f(t)} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} = \frac{1}{g(x)} \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2}.$$

Dato che i due membri dell'identità ottenuta sono funzione di due variabili diverse, i due membri devono essere funzioni costanti separatamente. Otteniamo in tal modo le due equazioni, per qualche costante $E \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = c^2 E f(t), \quad \frac{d^2 g(x)}{dx^2} = E g(x).$$

La seconda equazione fornisce la classe di soluzioni

$$g_E(x) := C_+(E)e^{\sqrt{E}x} + C_-(E)e^{-\sqrt{E}x}. \quad (6.15)$$

Tuttavia dobbiamo ancora imporre le condizioni di periodicità su $\varphi(t, x) = f(t)g(x)$ che, nel caso in esame implicano le richieste che la funzione g_E soddisfi

$$g_E(-L/2) = g_E(L/2) \quad \text{e} \quad \frac{dg_E}{dx}(-L/2) = \frac{dg_E}{dx}(L/2).$$

Se $E > 0$ in (6.15), le due condizioni scritte sopra non sono mai soddisfatte (nel caso generico di costanti $C_{\pm}(E) \neq 0$). Nel caso in cui $E \leq 0$, gli esponenti diventano complessi:

$$\pm i\sqrt{-E}x, \quad x \in [-L/2, L/2],$$

e pertanto le funzioni g_E sono periodiche. Affinché risultino essere periodiche, con tutte le derivate, sul segmento di lunghezza L (non importa quali siano i suoi estremi, ciò vale per $[-L/2, L/2]$ come per $[0, L]$ o altro), è necessario e sufficiente che $\sqrt{-E}L/(2\pi)$ sia un numero naturale. Quindi deve essere $E = -(2\pi n/L)^2$ con $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. In questo modo si trova subito che, etichettando le funzioni g_E con l'indice $n \in \mathbb{N}$ invece che E , esse possono solo essere del tipo:

$$g_0(x) := C_0, \quad g_n(x) := C_+(n)e^{i\frac{2\pi n}{L}x} + C_-(n)e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}.$$

Per tenere conto dei due segni degli esponenti è conveniente usare un unico esponenziale e fare variare n in \mathbb{Z} invece che in \mathbb{N} . Abbiamo allora che le funzioni g_n ammissibili, hanno tutte la forma:

$$g_0(x) := C_0, \quad g_n(x) := C_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (6.16)$$

L'equazione per la funzione f_E , che ora indicheremo con f_n , è ora:

$$\frac{d^2 f_n(t)}{dt^2} = -c^2 \left(\frac{2\pi n}{L} \right)^2 f_n(t),$$

che ha come risultato la classe di soluzioni:

$$f_0(t) := D_0' t + D_0, \quad f_n(t) := D_n e^{i\frac{2\pi n}{L}ct}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (6.17)$$

Ognuna delle funzioni, con $A_0, A_0', A_n^{(\pm)} \in \mathbb{C}$:

$$\varphi_0(t) = A_0 t + A_0, \quad \varphi_n(t, x)_{\pm} := A_n^{(\pm)} e^{i\frac{2\pi n}{L}x} e^{\pm i\frac{2\pi n}{L}ct}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (6.18)$$

è una possibile soluzione dell'equazione di D'Alembert in $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$ con condizioni al contorno periodiche sul segmento $[-L/2, L/2]$. Anche se queste soluzioni sono complesse, possiamo sempre ridurci al caso reale prendendo delle combinazioni lineari di esse con coefficienti opportuni, ricordando che $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$ e $-i(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = 2 \sin \theta$. Dato che stiamo lavorando con un'equazione differenziale lineare omogenea, combinazioni lineari di soluzioni saranno ancora soluzioni. Quest'ultima osservazione potrebbe essere utile anche per cercare di soddisfare le condizioni iniziali, cioè la forma che φ e la sua derivata temporale devono assumere all'istante $t = 0$. Tuttavia, è intuitivo pensare che se le condizioni iniziali sono assegnate in termini di funzioni arbitrarie, non sarà possibile trovare una combinazione lineare *finita* di soluzioni della forma (6.18) che soddisfi anche tali condizioni iniziali. Si può pensare che ciò sia invece possibile considerando anche combinazioni lineari *infinite*. Questa idea è quella che ha condotto Fourier ad inventare la teoria della serie omonima (lavorando però con un'equazione differente – ma con analoghe caratteristiche per quanto riguarda l'applicazione della teoria della serie di Fourier – l'equazione del calore). L'idea fondamentale è quella di sviluppare le funzioni periodiche f definite su un intervallo $[-L/2, L/2] \subset \mathbb{R}$ (ma l'approccio si generalizza su varietà toroidali compatte k -dimensionali) con una serie di funzioni i cui termini siano funzioni esponenziali $e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$ con opportuni coefficienti complessi e con $n \in \mathbb{Z}$:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x}.$$

Nel caso della nostra funzione φ soluzione periodica dell'equazione di D'Alembert, ci si aspetta che essa abbia una forma, che assicura automaticamente la periodicit  in x di φ :

$$\varphi(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(t) e^{i \frac{2\pi n}{L} x}.$$

La dipendenza temporale di φ (e quindi il fatto che φ soddisfi l'equazione di D'Alembert) si scarica tutta nei coefficienti complessi $C_n(t)$. Ci aspettiamo, da quanto visto sopra, che la forma di tali coefficienti sia proprio una combinazione lineare finita di funzioni di t del tipo di quelle in (6.17). Le infinite costanti arbitrarie che appaiono in tutte queste combinazioni lineari dovranno anche essere fissate in modo tale da soddisfare le condizioni iniziali. Dopo aver enunciato alcuni risultati ben noti della teoria delle serie di Fourier, torneremo all'equazione di D'Alembert e di Klein-Gordon per vedere come si conclude il discorso cominciato sopra sulle soluzioni periodiche dell'equazione di Klein-Gordon e D'Alembert.

6.3 Alcuni risultati elementari sulla serie di Fourier.

Richiamiamo qui alcuni semplici risultati della teoria della serie di Fourier dal punto di vista della teoria degli *spazi di Hilbert* (vedi per es. [Mo10]). Tutti questi argomenti saranno approfonditi in corsi avanzati di analisi.

Supponiamo che una funzione $f : [-L/2, L/2] \rightarrow \mathbb{C}$ si possa sviluppare in serie di Fourier, per il momento lavorando del tutto formalmente senza farci domande sul tipo di convergenza:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i \frac{2\pi n}{L} x}}{\sqrt{L}}. \quad (6.19)$$

Abbiamo introdotto il fattore $1/\sqrt{L}$ per pura convenienza. Vogliamo determinare la forma dei coefficienti $f_n \in \mathbb{C}$. Moltiplicando membro a membro per $\frac{e^{-i \frac{2\pi m}{L} x}}{\sqrt{L}}$ abbiamo:

$$f(x) \frac{e^{-i \frac{2\pi m}{L} x}}{\sqrt{L}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i \frac{2\pi n}{L} x}}{\sqrt{L}} \frac{e^{-i \frac{2\pi m}{L} x}}{\sqrt{L}}. \quad (6.20)$$

Tenendo infine conto delle **relazioni di ortogonalit ** (vedi la sezione C in Appendice):

$$\frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} e^{-i \frac{2\pi m}{L} x} e^{i \frac{2\pi n}{L} x} dx = \delta_{nm}, \quad (6.21)$$

ed integrando i due membri di (6.20), ammettendo di poter scambiare il simbolo di integrale con quello di somma in (6.20) (questo   sicuramente possibile se f   una combinazione lineare finita di esponenziali oppure se la serie converge uniformemente), giungiamo alla conclusione che:

$$\int_{-L/2}^{L/2} f(x) \frac{e^{-i \frac{2\pi m}{L} x}}{\sqrt{L}} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \int_{-L/2}^{L/2} \frac{e^{i \frac{2\pi n}{L} x}}{\sqrt{L}} \frac{e^{-i \frac{2\pi m}{L} x}}{\sqrt{L}} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \delta_{nm} = f_m.$$

Cambiando nome all'indice:

$$f_n = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} f(x) dx. \quad (6.22)$$

I numeri complessi f_n , con $n \in \mathbb{Z}$, individuati da (6.22) quando esistono, sono detti **coefficienti di Fourier della funzione** f . Ora che abbiamo un candidato per i coefficienti di Fourier f_n , ci si può chiedere in quale senso la serie (6.19) converga.

6.3.1 La serie di Fourier nello spazio di Hilbert $L^2([-L/2, L/2], dx)$.

La teoria della serie di Fourier, a livello più astratto, viene sviluppata nell'insieme di funzioni $f : [-L/2, L/2] \rightarrow \mathbb{C}$ misurabili che siano **a quadrato sommabile**, cioè soddisfino:

$$\int_{[-L/2, L/2]} |f(x)|^2 dx < +\infty, \quad (6.23)$$

rispetto alla misura dx di Lebesgue. L'insieme di funzioni determinato in tal modo si indica con $\mathcal{L}^2([-L/2, L/2], dx)$. È importante osservare che questo insieme di funzioni include tutte le funzioni misurabili limitate, a causa del fatto che la misura di Lebesgue di $[-L/2, L/2]$ è finita. Infatti, se $f : [-L/2, L/2] \rightarrow \mathbb{C}$ è misurabile ed è limitata in valore assoluto da $M < +\infty$ (basterebbe che fosse *essenzialmente limitata* da M per ottenere quanto segue), allora f è a quadrato sommabile essendo:

$$\int_{[-L/2, L/2]} |f(x)|^2 dx \leq M \int_{[-L/2, L/2]} dx = ML < +\infty.$$

Ricordiamo la seguente definizione generale.

Definizione 6.1. Se X è uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{C} , un'applicazione $(|) : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ è detta **forma quadratica hermitiana** se valgono le proprietà seguenti:

- (1) $(u|av + bw) = a(u|v) + b(u|w)$ per ogni $a, b \in \mathbb{C}$ e ogni $u, v, w \in X$;
- (2) $(au|v) = \overline{a}(u|v)$ per ogni $a \in \mathbb{C}$ e ogni $u \in X$;
- (3) $(u|v) = \overline{(v|u)}$ per ogni $u, v \in X$ (per cui $(u|u) \in \mathbb{R}$ in particolare).

Tale forma quadratica hermitiana è detta **prodotto scalare** su X se valgono le due ulteriori proprietà:

- (4) $(u|u) \geq 0$ per ogni $u \in X$;
- (5) $(u|u) = 0$ per $u \in X$ implica che $u = 0$.

◇

Dalle proprietà (1)-(4) si prova la validità della **disuguaglianza di Cauchy-Schwarz**:

$$|(u|v)|^2 \leq (u|u)(v|v) \quad \text{per ogni } u, v \in X.$$

Da tale disuguaglianza si dimostra facilmente che $\|x\| := \sqrt{(x|x)}$, con $x \in X$ è una *norma* su X se $(|)$ è un prodotto scalare su X . Nel caso in cui valgano tutte le proprietà del prodotto scalare eccetto la stretta positività (5), allora $\| \cdot \|$ risulta essere una *seminorma*.

$\mathcal{L}^2([-L/2, L/2], dx)$ risulta essere uno spazio vettoriale complesso dotato della forma quadratica hermitiana:

$$(f|g) := \int_{[-L/2, L/2]} \overline{g(x)} f(x) dx, \quad \text{se } f, g \in \mathcal{L}^2([-L/2, L/2], dx). \quad (6.24)$$

In riferimento alla definizione di sopra, questo non è un prodotto scalare hermitiano unicamente per il fatto che $(f|f) = 0$ implica che $f(x) = 0$ quasi ovunque, ma non necessariamente ovunque. Si rimedia al problema identificando funzioni che differiscono tra di loro solo quando valutate su un (arbitrario) insieme di misura nulla in $[-L/2, L/2]$, e lavorando con classi (di equivalenza) di funzioni piuttosto che con funzioni. Lo spazio vettoriale con prodotto scalare hermitiano che si ottiene da $\mathcal{L}^2([-L/2, L/2], dx)$ quozientando rispetto alla relazione di equivalenza che identifica due funzioni se differiscono su un (qualsiasi) insieme di misura nulla, si indica con $L^2([-L/2, L/2], dx)$. Tale spazio vettoriale complesso risulta anche essere *completo* (vedi la sezione 1.1.3) [Ru82] nella topologia normata indotta dalla norma associata al prodotto scalare suddetto (dove ora, più propriamente f indica una classe di equivalenza di funzioni):

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_{[-L/2, L/2]} |f(x)|^2 dx}.$$

La completezza rende, per definizione, lo spazio vettoriale complesso $L^2([-L/2, L/2], dx)$ dotato del prodotto scalare $(\cdot|\cdot)$ uno **spazio di Hilbert** complesso.

Definizione 6.2. Uno spazio vettoriale H sul campo \mathbb{C} dotato di un prodotto scalare hermitiano $(\cdot|\cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ in modo tale che H risulti essere completo rispetto alla topologia della norma $\|x\| := \sqrt{(x|x)}$, con $x \in H$, è detto **spazio di Hilbert** (complesso). \diamond

Si osservi che la definizione di $\mathcal{L}^2([-L/2, L/2], dx)$ e $L^2([-L/2, L/2], dx)$ e le loro proprietà generali sono indipendenti dalla teoria della serie di Fourier.

Come ultimo ingrediente che caratterizza gli spazi di Hilbert e riveste un ruolo importante nell'interpretazione della serie di Fourier quando lo spazio di Hilbert sia $L^2([-L/2, L/2], dx)$, introduciamo la nozione di *base hilbertiana*. Ricordiamo che un insieme di vettori $\{u_j\}_{j \in J} \subset X$, dove X è uno spazio con prodotto scalare $(\cdot|\cdot)$, è detto un **insieme** o **sistema di vettori ortonormali** quando: $(u_j|u_k) = \delta_{jk}$ per $j, k \in J$.

Proposizione 6.1. Sia H uno spazio di Hilbert con prodotto scalare $(\cdot|\cdot)$ e J un insieme di cardinalità qualsiasi. Se $\{u_j\}_{j \in J} \subset H$ è un insieme di vettori ortonormali, allora i seguenti fatti sono equivalenti e, se valgono, $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ viene detto **base hilbertiana** di H .

(a) Se $v \in H$ allora:

$$\|v\|^2 = \sum_{j \in J} |(u_j|v)|^2,$$

dove nella somma a secondo membro solo una quantità al più numerabile di numeri $(u_j|v)$ risulta essere non nulla.

(b) Se $v \in H$ allora:

$$v = \sum_{j \in J} (u_j|v) u_j,$$

dove la convergenza della serie è nella topologia associata alla norma $\| \cdot \|$ e solo una quantità al più numerabile di v_n risulta essere non nulla.

(c) Se $v, v' \in H$ allora:

$$(v|v') = \sum_{j \in J} \overline{(u_j|v)} (u_j|v'),$$

dove la convergenza della serie è assoluta e solo una quantità al più numerabile di $(u_j|v)$ e $(u_j|v')$ risulta essere non nulla.

Risulta infine che, se solo una quantità al più numerabile di $c_j \in \mathbb{C}$ è non nulla, la serie

$$\sum_{j \in J} c_j u_j$$

converge a qualche $v \in H$, nel senso della topologia di H indotta dalla norma $\| \cdot \|$, se e solo se $\sum_{j \in \mathbb{N}} |c_j|^2 < +\infty$. In tal caso risulta anche $c_j = (u_j|v)$.

Osservazioni importanti.

(1) Dato che le serie numeriche considerate sopra sono assolutamente convergenti, non importa l'ordine con cui si esegue la somma della serie. Per esempio, in riferimento alla serie in (c), consideriamo solo una quantità numerabile di addendi, etichettati sull'insieme numerabile di indici $J_0 \subset J$, che include i termini non nulli tra tutti i numeri $(u_j|v)$ e $(u_j|v')$. È allora sufficiente numerare gli indici di J_0 con un'arbitraria funzione biettiva $h : \mathbb{N} \rightarrow J_0$ e sommare la serie su $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \overline{(u_{j(m)}|v)} (u_{j(m)}|v'),$$

che si ottiene in tal modo. Il valore comune delle somme di tali serie che si ottengono comunque fissiamo la funzione biettiva h è, per definizione, il numero

$$\sum_{j \in J} \overline{(u_j|v)} (u_j|v).$$

(2) Tenuto anche conto di quanto appena scritto in (1), l'identità $v = \sum_{j \in J} (u_j|v) u_j$ significa:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| v - \sum_{m=0}^N (u_{j(m)}|v) u_{j(m)} \right\| = 0,$$

dove la funzione $j = j(m)$, con $m \in \mathbb{N}$, è una qualunque funzione che etichetta i soli coefficienti non nulli $(u_j|v)$ (oppure una quantità numerabile di coefficienti che includono quelli non nulli se questi ultimi sono in numero finito).

(3) L'identità in (a) non è altro che una versione astratta ed infinitodimensionale del *teorema*

di Pitagora. Mentre l'identità in (b) non è altro che la decomposizione di un vettore su una base ortonormale nel caso infinitodimensionale. Infine (c) esprime il prodotto scalare hermitiano eseguito su una base ortonormale infinitodimensionale in termini delle infinite componenti dei vettori.

(4) Esistono infinite basi hilbertiane per ogni spazio di Hilbert e, per un fissato spazio di Hilbert, hanno tutte la stessa cardinalità. Gli spazi di Hilbert che, come $L^2([-L/2, L/2], dx)$, ammettono una base hilbertiana numerabile sono detti essere **separabili**. Questa proprietà equivale alla proprietà topologica per lo spazio di Hilbert di ammettere un sottoinsieme denso e numerabile.

In riferimento alla serie di Fourier, risulta [Ru82] che vale il seguente teorema fondamentale.

Teorema 6.5. *L'insieme delle funzioni $\frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}}$ definite su $[-L/2, L/2]$ per $n \in \mathbb{N}$ individua una base Hilbertiana numerabile di $L^2([-L/2, L/2], dx)$.*

Di conseguenza, in riferimento alla definizione (6.22) dei coefficienti di Fourier di una funzione a valori complessi $f : [-L/2, L/2] \rightarrow \mathbb{C}$ valgono i fatti seguenti.

(a) $f \in \mathcal{L}^2([-L/2, L/2], dx)$ se e solo se:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|^2 < +\infty, \quad (6.25)$$

ed in tal caso vale:

$$\int_{[-L/2, L/2]} |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|^2. \quad (6.26)$$

(b) $f \in \mathcal{L}^2([-L/2, L/2], dx)$ se e solo se:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{[-L/2, L/2]} \left| f(x) - \sum_{|n| \leq N} f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} \right|^2 dx \rightarrow 0. \quad (6.27)$$

(c) Se $f, g \in \mathcal{L}^2([-L/2, L/2], dx)$ e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sono i rispettivi coefficienti di Fourier, allora:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{g}_n f_n = \int_{[-L/2, L/2]} \overline{g(x)} f(x) dx \quad (6.28)$$

dove la serie a primo membro converge assolutamente. \diamond

Osservazioni 6.5.

(1) A meno di non interpretare la serie di Fourier come serie di *distribuzioni*, il senso più generale con il quale si intende la convergenza della serie (6.19) è quello in (6.27). Questo tipo di convergenza, detta **convergenza (della serie) in $L^2([-L/2, L/2], dx)$** . Si tratta della nozione di convergenza nella topologia normata indotta dalla norma $\|\cdot\|_2$ sopra definita. Si osservi che, come spiegato sopra, in questo caso la funzione f deve pensarsi come una classe di equivalenza di funzioni che differiscono su insiemi di misura nulla (alternativamente si può anche interpretare

la $\| \cdot \|_2$ come una *seminorma* sullo spazio vettoriale complesso $\mathcal{L}^2([-L/2, L/2], dx)$ e, in questo caso, la convergenza della serie di Fourier è quella relativa alla topologia indotta da tale seminorma. Topologia che, come per tutte le seminorme che non sono norme, non è di Hausdorff).

(2) Tenuto conto delle relazioni (6.21), la proprietà (a) afferma proprio che la classe di funzioni $[-L/2, L/2] \ni x \mapsto e_n(x) := e^{i2\pi nx/L}/\sqrt{L}$, per $n \in \mathbb{Z}$, è una *base hilbertiana*, dello spazio di Hilbert $L^2([-L/2, L/2], dx)$. In particolare, le relazioni (6.21) non dicono altro che i vettori e_n formano un sistema ortonormale rispetto al prodotto scalare naturale (6.24) di $L^2([-L/2, L/2], dx)$:

$$(e_m | e_n) = \delta_{mn} .$$

Come precisato nell'osservazione precedente, la (6.27) si può trascrivere come:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| f - \sum_{|n| \leq N} f_n e_n \right\|_2 = 0 , \quad (6.29)$$

che si trova scritta frequentemente come, semplicemente:

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e_n . \quad (6.30)$$

È importante notare che, in generale, la convergenza in L^2 *non implica la convergenza puntuale della serie*. Per questo motivo non abbiamo scritto l'argomento di f ed e_n in (6.30), le quali funzioni, tra l'altro, sono individuate a meno di insiemi di misura nulla.

(3) $L^2([0, L], dx)$ (che non è altro che $L^2([-L/2, L/2], dx)$ con una banale traslazione dell'asse x di $L/2$ e pertanto quanto stiamo per dire vale anche per $L^2([-L/2, L/2], dx)$ con ovvie modifiche) ammette altre due basi hilbertiane (quindi necessariamente numerabili) interessanti. Sono rispettivamente date da:

$$\left\{ s_n \mid s_n(x) := \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) , x \in [0, L] , n = 1, 2, \dots \right\} ,$$

e

$$\left\{ c_n \mid c_n(x) := \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) , x \in [0, L] , n = 0, 1, 2, \dots \right\} ,$$

per le quali valgono dunque, rispettivamente, $(s_m | s_n) = \delta_{mn}$ e $(c_m | c_n) = \delta_{mn}$ (vedi la sezione C in Appendice) insieme a $\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|^2$, avendo definito, rispettivamente, $f_n := (s_n | f)$ oppure $f_n := (c_n | f)$ per ogni vettore $f \in L^2([0, L], dx)$.

6.3.2 Convergenza uniforme della serie di Fourier e derivazione sotto il simbolo di serie.

Dato che vogliamo sviluppare in serie di Fourier le soluzioni dell'equazione di D'Alembert e Klein-Gordon, siamo più che altro interessati alla convergenza *puntuale* della serie di Fourier ed

alla possibilità di *derivare sotto il segno di serie*. Mostriamo come si possano ottenere serie di Fourier con queste proprietà rafforzando le ipotesi di regolarità delle funzioni sviluppate in serie di Fourier. Ricordiamo (vedi la definizione 1.3) che una funzione continua definita su $[a, b]$ si dice C^k **a tratti** su $[a, b]$ se esiste un numero finito di punti $a := t_1 < t_2 < \dots < t_m := b$, in modo tale che $f|_{[t_l, t_{l+1}]} \in C^k([t_l, t_{l+1}]; \mathbb{C})$ per $l = 0, \dots, m-1$ (quindi, in particolare, esistono le derivate sinistre e destre fino all'ordine k anche sui bordi di $[t_l, t_{l+1}]$ per (2) in osservazioni 1.1). Si osservi che, se $k > 0$, la derivata k -esima di f (pensata come derivata destra o sinistra agli estremi di ogni sottointervallo $[t_k, t_{k+1}]$) può non essere continua su $[a, b]$ ma i valori che essa assume formano un insieme limitato.

Il primo risultato è stabilito nella seguente proposizione.

Proposizione 6.2. *Sia $N = 0, 1, \dots$ fissato e $f : [-L/2, L/2] \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione con i seguenti requisiti:*

(i) $f \in C^N([-L/2, L/2]; \mathbb{C})$,

(ii) f sia C^{N+1} a tratti su $[-L/2, L/2]$,

(iii) f sia periodica su $[-L/2, L/2]$ con tutte le sue derivate fino alla derivata N -esima inclusa, cioè:

$$f(-L/2) = f(L/2), \quad \frac{d^k f}{dx^k} \Big|_{x=-L/2} = \frac{d^k f}{dx^k} \Big|_{x=L/2} \quad \text{se } k = 1, \dots, N.$$

Se f_n sono i coefficienti di Fourier di f dati da (6.22) e $f_n^{(k)}$ indica l'analogo coefficiente di Fourier della funzione $\frac{d^k f}{dx^k}$, allora vale quanto segue.

(a) Per $k = 0, 1, \dots, N+1$, vale:

$$f_n^{(k)} = \left(\frac{2\pi i}{L}\right)^k n^k f_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (6.31)$$

(b) La serie di Fourier di f e delle sue derivate fino all'ordine $k = N+1$ può essere derivata sotto il simbolo di serie (interpretando la convergenza delle serie nel senso di L^2), dato che risulta, per $k = 0, 1, \dots, N+1$:

$$f_n^{(k)} \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} = \frac{d^k}{dx^k} \left(f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} \right).$$

(c) Per $k = 0, 1, \dots, N$ vale:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^k |f_n| < +\infty. \quad (6.32)$$

◇

Dimostrazione. (a) Fissiamo $k = 1, \dots, N+1$. Dalla (6.22) integrando per parti (su ogni sottointervallo chiuso nel quale esistono le derivate k -esime, se $k = N+1$, e poi sommando i contributi dei vari sottointervalli) abbiamo che:

$$f_n^{(k)} = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{d^k f}{dx^k} \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} dx = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}} \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} \right) dx - \int_{-L/2}^{L/2} \frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}} \frac{d}{dx} \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} dx.$$

Il secondo integrale da sinistra risulta essere nullo dato che:

$$[-L/2, L/2] \ni x \mapsto \frac{d^{k-1} f e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{dx^{k-1} \sqrt{L}}$$

è una funzione periodica su $[-L/2, L/2]$ per ipotesi. Abbiamo trovato che:

$$f_n^{(k)} = - \int_{-L/2}^{L/2} \frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}} \frac{d}{dx} \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} dx .$$

Possiamo iterare $k - 1$ volte la procedura, con lo stesso risultato, fino ad ottenere, alla fine

$$f_n^{(k)} = (-1)^k \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \frac{d^k}{dx^k} \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} dx = (-1)^k \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \left(-i\frac{2\pi n}{L}\right)^k \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} dx .$$

Abbiamo quindi trovato che

$$f_n^{(k)} = \left(i\frac{2\pi n}{L}\right)^k \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} dx = \left(\frac{2\pi ni}{L}\right)^k \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} dx = \left(\frac{2\pi i}{L}\right)^k n^k f_n ,$$

che è la (6.31).

(b) Il calcolo diretto mostra che

$$\frac{d^k}{dx^k} \left(f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} \right) = \left(\frac{2\pi i}{L}\right)^k n^k f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} .$$

Da (a) abbiamo allora che, come enunciato nella tesi:

$$\frac{d^k}{dx^k} \left(f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} \right) = f_n^{(k)} \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} .$$

Questo risultato implica banalmente che si possa derivare sotto il segno di serie, interpretando però la convergenza nel senso di L^2 , dato che lo sviluppo di Fourier di $\frac{d^k f}{dx^k}$ si scrive:

$$\frac{d^k}{dx^k} \sum_n f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} = \frac{d^k f}{dx^k} = \sum_n f_n^{(k)} \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} = \sum_n \frac{d^k}{dx^k} \left(f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} \right) .$$

Si osservi che le funzioni $d^k f/dx^k$ considerate sopra ammettono sviluppo di Fourier nel senso di $L^2([-L/2, L/2], dx)$ dato che appartengono a tale spazio essendo funzioni (misurabili) limitate, per costruzione, definite su un insieme di misura finita.

(c) Da (6.31) abbiamo anche che, se $n \neq 0$ e se $k = 1 \dots, N + 1$,

$$2 \left| n^{k-1} f_n \right| = 2 \left| n^k f_n \right| \frac{1}{|n|} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^k 2 \frac{|f_n^{(k)}|}{|n|} \leq \left(\frac{L}{2\pi}\right)^k \left(|f_n^{(k)}|^2 + \frac{1}{n^2} \right) ,$$

dove abbiamo banalmente usato la disuguaglianza

$$0 \leq \left(|f_n^{(k)}| - \frac{1}{|n|} \right)^2 = |f_n^{(k)}|^2 + \frac{1}{n^2} - 2 \frac{|f_n^{(k)}|}{|n|}.$$

Concludiamo che, se $k - 1 = 0, 1, 2, \dots, N$ e dove $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |n^{k-1} f_n| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^k \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |f_n^{(k)}|^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} \right) < +\infty,$$

ossia cambiando il nome di $k - 1$ in k ed assumendo ora $k = 0, 1, 2, \dots, N$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |n^k f_n| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^{k+1} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |f_n^{(k+1)}|^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} \right) < +\infty.$$

A commento del $< +\infty$, si osservi che la seconda serie a secondo membro converge come ben noto, mentre la prima serie a secondo membro converge per (a) del teorema (6.5), dato che ogni funzione $\frac{d^{k+1}f}{dx^{k+1}}$, per $k = 0, \dots, N$ è limitata in valore assoluto da qualche numero $M < +\infty$ per ipotesi e quindi è in $L^2([-L/2, L/2], dx)$, avendo $[-L/2, L/2]$ misura finita:

$$\int_{[-L/2, L/2]} \left| \frac{d^{k+1}f}{dx^{k+1}} \right|^2 dx \leq \int_{[-L/2, L/2]} M^2 dx = M^2 L < +\infty.$$

□

Abbiamo poi il seguente utile risultato che discende dalla precedente proposizione.

Proposizione 6.3. *Sia $N = 0, 1, \dots$ fissato e $f : [-L/2, L/2] \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione con i seguenti requisiti:*

- (i) $f \in C^N([-L/2, L/2]; \mathbb{C})$,
- (ii) f sia C^{N+1} a tratti su $[-L/2, L/2]$,
- (iii) f sia periodica su $[-L/2, L/2]$ con tutte le sue derivate fino alla derivata N -esima inclusa nel senso di (iii) della proposizione 6.2.

Allora gli sviluppi di Fourier, per $k = 0, 1, \dots, N$:

$$\frac{d^k f}{dx^k}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n^{(k)} \frac{e^{i \frac{2\pi n}{L} x}}{\sqrt{L}}$$

convergono puntualmente, assolutamente ed uniformemente su $[-L/2, L/2]$ (dove $f_n^{(k)}$ è l' n -esimo coefficiente di Fourier di $\frac{d^k f}{dx^k}$ (con $f_k^{(0)} := f_k$)).

In particolare, la serie di Fourier di $\frac{d^k f}{dx^k}$ coincide con la derivata della somma della serie di $\frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}}$ per $k = 1, \dots, N$. ◇

Dimostrazione. Nelle ipotesi fatte, prendendo $k = 0$ in (6.32), abbiamo che

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n| < +\infty,$$

pertanto la serie di funzioni per $x \in [-L/2, L/2]$,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i \frac{2\pi n}{L} x}}{\sqrt{L}}$$

è termine a termine dominata dalla serie di costanti convergente

$$\frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n| < +\infty,$$

dove abbiamo usato il fatto che $|e^{i \frac{2\pi n}{L} x}| = 1$. Come conseguenza di un ben noto teorema di Weierstrass, esisterà una funzione $g : [-L/2, L/2] \rightarrow \mathbb{C}$ con

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i \frac{2\pi n}{L} x}}{\sqrt{L}},$$

in cui la convergenza della serie è assoluta ed uniforme e quindi g è continua perché limite uniforme di funzioni continue. Si osservi che, moltiplicando per $\frac{e^{-i \frac{2\pi m}{L} x}}{\sqrt{L}}$ i due membri dell'identità trovata abbiamo ancora una serie che converge uniformemente

$$g(x) \frac{e^{-i \frac{2\pi m}{L} x}}{\sqrt{L}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i \frac{2\pi n}{L} x}}{\sqrt{L}} \frac{e^{-i \frac{2\pi m}{L} x}}{\sqrt{L}},$$

dato che possiamo usare la stessa stima e lo stesso teorema usato precedentemente (l'esponenziale per il quale abbiamo moltiplicato ha modulo 1). Tenendo conto del fatto che le serie uniformemente convergenti di funzioni continue definite su compatti possono essere integrate sotto il segno di integrale, concludiamo che:

$$g_m := \int_{-L/2}^{L/2} g(x) \frac{e^{-i \frac{2\pi m}{L} x}}{\sqrt{L}} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \int_{-L/2}^{L/2} \frac{e^{i \frac{2\pi(n-m)x}}{L}} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \delta_{nm} = f_m$$

dove abbiamo fatto uso della (6.21). Ne segue che la funzione $g - f$ ha coefficienti di Fourier tutti nulli e quindi, dalla (6.26), abbiamo immediatamente che:

$$\int_{[-L/2, L/2]} |f(x) - g(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 0 = 0.$$

Concludiamo che $|f(x) - g(x)|^2 = 0$ quasi ovunque, cioè $f(x) - g(x) = 0$ quasi ovunque. Data la continuità di f e g , dovrà essere $f(x) - g(x) = 0$ ovunque e cioè $f(x) = g(x)$ su $[-L/2, L/2]$. Abbiamo ottenuto che, *nel senso della convergenza puntuale*, vale su $[-L/2, L/2]$:

$$f(x) = (g(x) =) \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i \frac{2\pi n}{L} x}}{\sqrt{L}}.$$

Se $N \geq 1$, possiamo fare lo stesso ragionamento anche per la serie:

$$\frac{df}{dx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n^{(1)} \frac{e^{i \frac{2\pi n}{L} x}}{\sqrt{L}},$$

tenendo conto che, essendo per (6.31),

$$f_n^{(1)} = \frac{2\pi i}{L} n f_n,$$

deve valere:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n^{(1)}| = \frac{2\pi}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n f_n| < +\infty,$$

dove abbiamo applicato (6.32) ristretta al caso $k = 1$. In questo modo, seguendo la stessa strada seguita per la serie della funzione f , si prova che la serie di Fourier di $\frac{df}{dx}$ converge assolutamente ed uniformemente a $\frac{df}{dx}$. Si procede nello stesso modo, usando (6.31) e (6.32) per ogni ordine di derivazione k fino a $k = N$ (e non oltre dato che non è assicurato che valga (6.32) per $k = N + 1$). \square

In realtà si può provare che la serie di Fourier converge puntualmente sotto ipotesi molto più deboli di quelle che abbiamo usato sopra (anche se questo non garantisce la convergenza uniforme). Si ha a tal proposito il seguente classico teorema di Dirichlet che citiamo senza dimostrazione.

Teorema 6.6. (Teorema di Dirichlet) *Sia $f : [-L/2, L/2] \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione con i seguenti requisiti:*

- (i) *sia limitata,*
- (ii) *sia continua eccetto un numero finito di punti $x_k \in (-L/2, L/2)$, $k = 1, \dots, p$ in cui esistono finiti il limite destro $f(x_k^+)$ ed il limite sinistro $f(x_k^-)$,*
- (iii) *ammetta in ogni punto derivata destra e sinistra, usando nei punti di discontinuità il limite destro e sinistro per il calcolo del rapporto incrementale da destra e da sinistra.*

Sotto queste ipotesi la serie di Fourier di f (6.19), con coefficienti di Fourier dati da (6.22), soddisfa,

(a) *per ogni $x \in (L/2, L/2) \setminus \{x_1, \dots, x_p\}$:*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i \frac{2\pi n}{L} x}}{\sqrt{L}} = f(x), \tag{6.33}$$

(b) per ogni $k = 1, \dots, p$,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i \frac{2\pi n}{L} x_k}}{\sqrt{L}} = \frac{f(x_k^-) + f(x_k^+)}{2}, \quad (6.34)$$

(c) per $x = \pm L/2$ la serie converge a $\frac{f(-L/2) + f(L/2)}{2}$. \diamond

6.3.3 Serie di Fourier in seni e coseni

Osserviamo che la teoria della serie di Fourier può essere sviluppata usando le funzioni trigonometriche invece che gli esponenziali complessi e cioè è particolarmente utile quando la funzione da sviluppare è reale, dato che i coefficienti dello sviluppo, che indicheremo sotto con α_n e β_n , risultano essere reali in tal caso. Si procede partendo dalla relazione:

$$e^{i \frac{2\pi n}{L} x} = \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) + i \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right). \quad (6.35)$$

Ammettendo che la serie di Fourier della funzione $f : [-L/2, L/2] \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i \frac{2\pi n}{L} x}}{\sqrt{L}} \quad (6.36)$$

converga puntualmente e dove la serie è interpretata come il limite, per $N \rightarrow +\infty$, delle ridotte troncate a $|n| \leq N$, tenendo conto della (6.35), possiamo riscrivere la stessa serie come:

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\alpha_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) + \beta_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) \right), \quad (6.37)$$

dove, tenendo conto della definizione (6.22), semplicemente abbiamo definito, se $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$\alpha_0 := \frac{f_0}{\sqrt{L}}, \quad \alpha_n := \frac{f_n + f_{-n}}{\sqrt{L}}, \quad \beta_n := i \frac{f_n - f_{-n}}{\sqrt{L}}, \quad (6.38)$$

Dalla stessa definizione (6.22) risulta immediatamente che $f_{-n} = \overline{f_n}$ se f è una funzione reale. In tal caso, dalle definizioni (6.38) segue subito che i coefficienti α_n e β_n sono reali.

Ci si può chiedere se la (6.38) valga anche nel senso della nozione di convergenza nello spazio di Hilbert $L^2([-L/2, L/2], dx)$ quando la serie di Fourier a secondo membro di (6.37) non converge puntualmente, ma f è comunque misurabile ed a quadrato sommabile. La risposta è positiva ed è basata sul fatto che l'insieme delle funzioni reali:

$$\frac{1}{\sqrt{L}}, \quad \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right), \quad \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

è una base hilbertiana dello spazio di Hilbert complesso $L^2([-L/2, L/2])$. In particolare valgono le relazioni di ortogonalità (vedi la sezione C in Appendice):

$$\int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{L} x\right) dx = \int_{-L/2}^{L/2} \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{L} x\right) dx = \frac{L \delta_{nm}}{2}, \quad (6.39)$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.40)$$

Tenuto conto di ciò, la norma L^2 della funzione f si esprime, sulla base detta, come:

$$\|f\|_2^2 = \int_{-L/2}^{L/2} |f(x)|^2 dx = \frac{L}{2} \left[2|\alpha_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2) \right].$$

Osservazioni 6.6. Abbiamo sempre lavorato sul segmento $[-L/2, L/2]$. Tuttavia, tenendo conto dell'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue, segue facilmente che tutto quello che abbiamo visto può essere ripetuto per il segmento $[a, a + L]$ sostituendo sistematicamente $a, a + L$ a $-L/2, L/2$ negli estremi di integrazione di tutti gli integrali considerati (per esempio lo spazio di Hilbert rilevante sarà ora dato da $L^2([a, a + L], dx)$) e definendo tutte le funzioni trigonometriche (inclusi gli esponenziali immaginari) sul segmento $[a, a + L]$.

6.4 Il problema su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$ con condizioni al bordo periodiche.

Consideriamo ora il problema di determinare le soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon o D'Alembert nell'insieme $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$ una volta imposte condizioni iniziali e condizioni di periodicità ai bordi del compatto $[-L/2, L/2]$. L'esistenza di soluzioni sarà provata facendo uso della teoria della serie di Fourier sviluppata precedentemente in particolare la proposizione 6.2 ed il la proposizione 6.3.

6.4.1 Teorema di unicità.

Abbiamo un primo teorema di unicità.

Teorema 6.7. *Si consideri il seguente problema su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$ con $\mu \geq 0$ costante fissata,*

$$\begin{cases} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \mu^2 \varphi = 0, & \varphi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2], \mathbb{C}), \\ \varphi(t, -L/2) = \varphi(t, L/2), & \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, -L/2) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, L/2) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ \varphi(0, x) = \phi_0(x) & \forall x \in [-L/2, L/2], \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x) = \phi_1(x) & \forall x \in [-L/2, L/2], \end{cases} \quad (6.41)$$

dove $\phi_0 \in C^2([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ e $\phi_1 \in C^1([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ sono funzioni assegnate che soddisfano le condizioni di periodicità¹:

$$\phi_0(-L/2) = \phi_0(L/2), \quad \frac{\partial \phi_0}{\partial x}(-L/2) = \frac{\partial \phi_0}{\partial x}(L/2), \quad \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}(-L/2) = \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}(L/2) \quad (6.42)$$

e

$$\phi_1(-L/2) = \phi_1(L/2), \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(-L/2) = \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(L/2). \quad (6.43)$$

Se esiste una soluzione al problema posto, essa è unica. In particolare, se i dati iniziali ϕ_0 e ϕ_1 sono funzioni a valori reali, la soluzione φ , se esiste, è a valori reali. \diamond

Dimostrazione. Se una soluzione φ del problema, ammesso che esista, è complessa, possiamo sempre decomporla in parte reale ed immaginaria: $\varphi(t, x) = \text{Re}\varphi(t, x) + i\text{Im}\varphi(t, x)$. Data la natura reale dell'equazione di Klein-Gordon, avremo anche che la parte reale $\text{Re}\varphi$ e quella immaginaria $\text{Im}\varphi$, che sono funzioni *reali* con la stessa regolarità di φ , soddisfano la stessa equazione di Klein-Gordon separatamente. Inoltre soddisfano le condizioni al contorno di periodicità e si raccordano, separatamente, alle parti reali ed immaginarie dei dati iniziali per costruzione. In base a ciò è sufficiente provare il teorema di unicità nel caso di φ reale (cioè per la parte reale ed immaginaria di φ separatamente, quando φ è complessa). Assumiamo dunque di lavorare con funzioni reali soluzioni del problema considerato con dati iniziali reali. La dimostrazione della proprietà di unicità, è, escluso un punto, uguale a quella del teorema 5.1 ponendo $(\alpha, \beta) := \mathbb{R}$, $D := [-L/2, L/2]$. L'unica differenza è che ora, se ϕ è la differenza di due soluzioni del problema posto, l'identità:

$$\int_0^T dt \oint_{+\partial D} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \phi \right) \cdot \mathbf{n} dS(x) = 0$$

nella dimostrazione del teorema 5.1 si scrive ora nella forma semplificata che deriva dalla (5.20):

$$\int_0^T dt \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{L/2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{-L/2} \right) = 0,$$

e questa identità vale banalmente in virtù delle condizioni di periodicità imposte sulle soluzioni del problema e quindi su ϕ .

Se la parte immaginaria dei dati iniziali è nulla, una soluzione del problema per la parte immaginaria di φ è la soluzione ovunque nulla. In base alla proprietà di unicità della soluzione, concludiamo che questa è l'unica soluzione e che quindi la parte immaginaria della soluzione (complessa a priori) φ è identicamente nulla. \square

¹La terza delle condizioni in (6.42) deve essere imposta a causa delle condizioni di periodicità per φ scritte sopra e della forma dell'equazione differenziale stessa valutata a $t = 0$. Infatti derivando due volte nel tempo la richiesta $\varphi(t, -L/2) = \varphi(t, L/2)$ si ottiene $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t, -L/2) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t, L/2)$; tenendo conto che deve anche valere l'equazione differenziale $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \mu^2 \varphi$ ed anche $\varphi(t, -L/2) = \varphi(t, L/2)$, si trova che: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, -L/2) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, L/2)$ e cioè, per $t = 0$, $\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}(-L/2) = \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}(L/2)$.

6.4.2 Esistenza delle soluzioni per dati iniziali sufficientemente regolari.

Passiamo ad un teorema di esistenza per il problema (6.41) con i vincoli (6.42) e (6.43). In realtà dovremo rinforzare le condizioni di regolarità sui dati iniziali per poter usare i risultati presentati prima relativi alla serie di Fourier. In riferimento al problema (6.41) con i vincoli (6.42) e (6.43), supponiamo che una soluzione φ esista e che sia sviluppabile in serie di Fourier per ogni tempo $t \in \mathbb{R}$. In tal caso avremo uno sviluppo del tipo:

$$\varphi(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(t) \frac{e^{i \frac{2\pi n}{L} x}}{\sqrt{L}}. \quad (6.44)$$

Vogliamo trovare la forma delle funzioni del tempo C_n e poi le vogliamo fissare in modo tale da rispettare i dati iniziali. Si osservi che, ammesso che la serie converga puntualmente, le condizioni di periodicità in $\pm L/2$ sono già automaticamente rispettate, data la periodicità di ogni funzione: $x \mapsto e^{i \frac{2\pi n}{L} x}$. Assumendo che si possa derivare fino al secondo ordine sotto il segno di somma, risulta subito che:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \mu^2 \varphi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i \frac{2\pi n}{L} x}}{\sqrt{L}} \left\{ -\frac{1}{c^2} \frac{d^2 C_n}{dt^2} - \left[\left(\frac{2\pi n}{L} \right)^2 + \mu^2 \right] C_n \right\} = 0.$$

Consideriamo allora il set infinito di equazioni:

$$\frac{d^2 C_n}{dt^2} = -c^2 \left[\left(\frac{2\pi n}{L} \right)^2 + \mu^2 \right] C_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (6.45)$$

Se i C_n le soddisfano, se il secondo membro di (6.44) converge puntualmente e se si possono passare sotto il segno di integrale le derivate di φ fino al secondo ordine dando luogo a funzioni continue (è richiesto che $\varphi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2], \mathbb{C})$), allora il secondo membro di (6.44) definisce una soluzione dell'equazione di Klein-Gordon con le richieste condizioni di periodicità. Queste ultime valgono in quanto le funzioni $e^{i 2\pi n x/L}$ sono evidentemente periodiche con tutte le loro derivate di ogni ordine, pertanto, somme di tali funzioni saranno ancora periodiche. Nel caso di somme infinite, cioè serie, la periodicità varrà se le serie convergono puntualmente. Nel caso in esame, se la serie a secondo membro di (6.44) converge puntualmente e convergono le serie fino alle delle derivate prime in x (e si può scambiare l'operatore di derivata con il simbolo di serie), allora siamo sicuri che, fino alla derivate prime in x è soddisfatto il vincolo di periodicità ai bordi di $[-L/2, L/2]$ per la soluzione.

In generale il candidato per la soluzione φ data dalla serie a secondo membro di (6.44) sarà a valori complessi. Tuttavia se le condizioni iniziali sono rappresentate da funzioni reali e se la soluzione rispetta tali condizioni iniziali, il secondo membro di (6.44) definisce una funzione reale come garantito dal teorema di unicità sopra dimostrato.

Le soluzioni di (6.45) sono tutte e sole della forma

$$C_n(t) = C_n^{(+)} e^{-i E_n t} + C_n^{(-)} e^{i E_n t}, \quad E_n := c \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{L} \right)^2 + \mu^2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (6.46)$$

se $\mu > 0$, dove $C_n^{(\pm)} \in \mathbb{C}$ sono costanti arbitrarie. Se $\mu = 0$, abbiamo le soluzioni di sopra quando $n \neq 0$, con la differenza che ora:

$$C_0(t) = At + C_0. \quad (6.47)$$

dove $A, C_0 \in \mathbb{C}$ sono costanti arbitrarie. In definitiva, un candidato soluzione per $\mu > 0$ è dato dalla popolare formula:

$$\varphi(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} + \frac{C_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{-i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} \right) \quad (6.48)$$

dove, nel secondo esponenziale abbiamo scambiato n con $-n$, dato che la somma opera su tutto \mathbb{Z} e $E_n = E_{-n}$, ciò non altera il risultato, purché le due serie

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} \quad \text{e} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{C_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{-i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} \quad (6.49)$$

convergono separatamente, cosa che proveremo tra poco. Nel caso $\mu = 0$, il candidato soluzione si deve modificare in:

$$\varphi(t, x) = At + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} + \frac{C_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{-i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} \right), \quad (6.50)$$

dove come prima, le due serie che si ottengono separando i due addendi nel termine generico della serie convergono separatamente, e $\sqrt{L}C_0 = C_0^{(+)} + C_0^{(-)}$. Si osservi che abbiamo trovato, nel caso $\mu = 0$, una forma di soluzione che è combinazione lineare di funzioni del tipo (6.18), come già discusso nella sezione 6.2. Sempre ammettendo che le due serie (6.49) convergono e che si possano derivare sotto il segno di somma nella variabile t , andiamo a valutare i coefficienti $C_n^{(\pm)}$ in modo da soddisfare le condizioni iniziali. Da (6.48) e ricordando che $\varphi(0, x) = \phi_0(x)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x) = \phi_1(x)$ abbiamo che deve essere, dove scambiamo nuovamente n con $-n$ nel secondo esponenziale e teniamo conto che se le due serie in (6.49) convergono separatamente allora la somma di esse coincide con la somma della serie che ha come elementi la somma dei corrispondenti elementi delle due serie (e la stessa cosa accade per le serie delle derivate in t),

$$\phi_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{C_n^{(+)} + C_{-n}^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{i\frac{2\pi n}{L}x}, \quad \phi_1(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} iE_n \frac{-C_n^{(+)} + C_{-n}^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{i\frac{2\pi n}{L}x}. \quad (6.51)$$

La seconda formula ha un ulteriore addendo A a secondo membro se $\mu = 0$. Per ottenere la seconda identità abbiamo derivato in t sotto il segno di somma le due serie in (6.49) assumendo che ciò fosse possibile, e poi abbiamo posto $t = 0$ nel risultato. Si osservi che le due espressioni trovate non sono altro che gli sviluppi di Fourier di ϕ_0 e ϕ_1 , i cui coefficienti di Fourier, rispettivamente, $\phi_{(0)n}$ e $\phi_{(1)n}$ sono stati scritti in funzione dei $C_{n\pm}$. Più precisamente

$$\phi_{(0)n} = C_n^{(+)} + C_{-n}^{(-)}, \quad \phi_{(1)n} = iE_n(-C_n^{(+)} + C_{-n}^{(-)}) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \text{se } \mu > 0,$$

oppure

$$\phi_{(0)n} = C_n^{(+)} + C_{-n}^{(-)} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \phi_{(1)n} = iE_n(-C_n^{(+)} + C_{-n}^{(-)}) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \phi_{(1)0} = A \quad \text{se } \mu = 0,$$

Queste relazioni si invertono in:

$$C_n^{(+)} = \frac{1}{2}\phi_{(0)n} + \frac{i}{2E_n}\phi_{(1)n}, \quad C_n^{(-)} = \frac{1}{2}\phi_{(0)-n} - \frac{i}{2E_n}\phi_{(1)-n} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (6.52)$$

se $\mu > 0$. Se $\mu = 0$ le identità di sopra valgono solo per $n \neq 0$, e vale anche:

$$C_0^{(+)} + C_0^{(-)} = \phi_{(0)0}, \quad A = \phi_{(1)0}. \quad (6.53)$$

Se $\mu = 0$, non è necessario conoscere $C_0^{(+)}$ e $C_0^{(-)}$ separatamente ai fini della costruzione della soluzione φ , dato che nel secondo membro di (6.48) compare solo la loro somma $C_0^{(+)} + C_0^{(-)}$.

Nota. Possiamo riassumere tutto come segue. Supponiamo che i dati iniziali ϕ_0 e ϕ_1 (assunti soddisfare (6.42) e (6.43)) siano sviluppabili in serie di Fourier convergenti puntualmente alle stesse ϕ_0 e ϕ_1 . Consideriamo ancora la funzione φ definita dal secondo membro di (6.48) (o (6.50) se $\mu = 0$) dove i coefficienti $C_n^{(\pm)}$ soddisfano (6.52) (e (6.53) se $\mu = 0$). Se le due serie (6.49) in cui spezziamo la serie a secondo membro di (6.48) (o (6.50) se $\mu = 0$) convergono puntualmente e definiscono funzioni $C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]; \mathbb{C})$ le cui derivate fino al secondo ordine possono essere calcolate derivando sotto il simbolo di somma, allora φ definito in (6.48) (o (6.50) se $\mu = 0$) è una soluzione del problema (6.41). Tutte queste richieste sono soddisfatte pur di assumere che i dati iniziali siano sufficientemente regolari come chiarito nel seguente teorema.

Teorema 6.8. *Si consideri il problema con condizioni al contorno periodiche (6.41) per la funzione $\varphi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2])$ con $\mu \geq 0$ costante fissata.*

Se si assume che i dati iniziali soddisfino $\phi_0 \in C^2([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ di classe C^3 a tratti su $[-L/2, L/2]$ e $\phi_1 \in C^1([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ di classe C^2 a tratti su $[-L/2, L/2]$ e che valgano le condizioni di periodicità sui dati iniziali (6.42) e (6.43), allora esiste (ed è unica) una soluzione φ al problema. φ è data dalla serie convergente puntualmente:

$$\varphi(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t)} + \frac{C_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{-i(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t)} \right),$$

se $\mu > 0$, oppure:

$$\varphi(t, x) = At + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t)} + \frac{C_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{-i(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t)} \right),$$

se $\mu = 0$. A secondo membro di entrambe le equazioni, $E_n := c\sqrt{\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 + \mu^2}$ e i coefficienti $C_{n\pm}$ sono definiti da:

$$C_n^{(+)} = \frac{1}{2}\phi_{(0)n} + \frac{i}{2E_n}\phi_{(1)n}, \quad C_n^{(-)} = \frac{1}{2}\phi_{(0)-n} - \frac{i}{2E_n}\phi_{(1)-n} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

se $\mu \neq 0$. Se $\mu = 0$ le identità di sopra valgono solo per $n \neq 0$, e vale:

$$C_0^{(+)} + C_0^{(-)} = \phi_{(0)0}, \quad A := \phi_{(1)0},$$

infine, $\phi_{(0)n}$ e $\phi_{(1)n}$ sono, rispettivamente i coefficienti di Fourier dei dati iniziali ϕ_0 e ϕ_1 . \diamond

Dimostrazione. È sufficiente verificare che tutte le richieste formulate nella **Nota** scritta prima dell'enunciato di questo teorema siano soddisfatte. Bisogna quindi verificare i due seguenti fatti:

(a) che ϕ_0 e ϕ_1 siano sviluppabili in serie di Fourier convergenti puntualmente alle stesse ϕ_0 e ϕ_1 ;

(b) che le due serie (6.49) in cui spezziamo la serie a secondo membro di (6.48) (o (6.50) se $\mu = 0$) convergano puntualmente e definiscano funzioni $C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]; \mathbb{C})$ le cui derivate fino al secondo ordine possono essere calcolate derivando sotto il simbolo di somma.

Ci restringeremo a lavorare per $\mu > 0$, dato che la dimostrazione per l'altro caso è banalmente simile.

Prima di tutto notiamo che (a) è vero dato che i dati iniziali sono $C^1([-L/2, L/2]; \mathbb{C})$ e quindi vale la proposizione 6.3. Non resta ora che provare (b). Nelle ipotesi fatte sulla regolarità di ϕ_0 e ϕ_1 , abbiamo dalla proposizione 6.2 che

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^h |\phi_{(0)n}| < \infty \quad \text{se } h = 0, 1, 2, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^k |\phi_{(1)n}| < \infty \quad \text{se } k = 0, 1. \quad (6.54)$$

D'altra parte, usando la definizione (6.52), essendo $E_n := c\sqrt{\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 + \mu^2}$, risulta che, per $|n|$ più grande di qualche fissato intero $M > 0$, $E_n > 1$ e quindi:

$$2 \left| C_n^{(\pm)} e^{\pm i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} \right| \leq |\phi_{(0)\pm n}| + \frac{1}{E_n} |\phi_{(1)\pm n}| \leq |\phi_{(0)\pm n}| + |\phi_{(1)\pm n}|.$$

Di conseguenza le serie di funzioni che appaiono in (6.48) sono dominate dalle serie di costanti positive convergenti, per (6.54), $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\phi_{(0)\pm n}| + |\phi_{(1)\pm n}|$. In base al teorema di Weistrass le due serie (6.49) in cui spezziamo la serie a secondo membro di (6.48) e quindi la serie stessa a secondo membro di (6.48), converge assolutamente ed uniformemente ad una funzione continua φ su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$. Consideriamo ora la funzione definita in tal modo:

$$\varphi(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{C_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{-i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)}.$$

Studiamo separatamente ognuna delle due serie a secondo membro. Possiamo derivare sotto il segno di serie rispetto alla variabile x (o t) se la serie delle derivate rispetto a x (o t) dei termini generici della serie iniziale converge uniformemente. Si osservi le derivate in x e t dei termini generici della serie definente φ sono funzioni continue. Se riusciamo a dominare la serie delle derivate in x e quella in t con serie di costanti convergenti, ragionando esattamente come prima usando il teorema di Weistrass, abbiamo non solo che φ è derivabile in x e t (e le derivate si calcolano scambiando la serie con il simbolo di derivata corrispondente), ma anche

che $\varphi \in C^1(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]; \mathbb{C})$. Infatti, in tal caso, le derivate di φ in x e t risulterebbero essere limiti di serie di funzioni continue convergenti uniformemente.

Le due serie delle derivate in x forniscono, a parte costanti moltiplicative comuni inessenziali,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{n C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t)} - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{n C_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{-i(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t)}.$$

D'altra parte, usando la definizione (6.52), per $|n|$ più grande di qualche fissato intero $M' > 0$ vale anche $E_n \geq c|n|$, e quindi:

$$2 \left| n C_n^{(\pm)} e^{\pm i(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t)} \right| \leq |n \phi_{(0) \pm n}| + \frac{|n|}{E_n} |\phi_{(1) \pm n}| \leq |n \phi_{(0) \pm n}| + \frac{1}{c} |\phi_{(1) \pm n}|.$$

Di conseguenza le due serie delle derivate in x (quella dei coefficienti $C_n^{(+)}$ e quella dei coefficienti $C_n^{(-)}$) sono dominate dalle due serie di costanti positive convergenti, per (6.54), date da $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n \phi_{(0) \pm n}| + \frac{1}{c} |\phi_{(1) \pm n}|$. In base al teorema di Weistrass la serie delle derivate in x converge assolutamente ed uniformemente ad una funzione continua φ su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$. Inoltre tale funzione deve coincidere con $\partial_x \varphi(t, x)$ dato che siamo nelle ipotesi di poter scambiare la derivata con il simbolo di somma nella serie che definisce φ .

Le serie delle derivate in t forniscono, a parte costanti moltiplicative comuni inessenziali,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{E_n C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t)} - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{E_n C_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{-i(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t)}.$$

D'altra parte, usando la definizione (6.52), per $|n|$ più grande di qualche fissato intero $N > 0$ vale anche $E_n \leq c\sqrt{n^2 + 3n^2} = 2c|n|$, e quindi:

$$\frac{2}{\sqrt{L}} \left| E_n C_n^{(\pm)} e^{\pm i(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t)} \right| \leq |E_n \phi_{(0) \pm n}| + |\phi_{(1) \pm n}| \leq 2c|n \phi_{(0) \pm n}| + |\phi_{(1) \pm n}|.$$

Di conseguenza le due serie delle derivate in t (quella dei coefficienti $C_n^{(+)}$ e quella dei coefficienti $C_n^{(-)}$) sono dominate dalle due serie di costanti positive convergenti, per (6.54), date da $\sum_{n \in \mathbb{Z}} 2c|n \phi_{(0) \pm n}| + |\phi_{(1) \pm n}|$. In base al teorema di Weistrass la serie delle derivate in t converge assolutamente ed uniformemente ad una funzione continua φ su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$. Inoltre tale funzione deve coincidere con $\partial_t \varphi(t, x)$ dato che siamo nelle ipotesi di poter scambiare la derivata con il simbolo di somma nella serie che definisce φ . La procedura può essere ripetuta per le derivate seconde, incluse quelle miste, si vede subito, in tal caso che le serie delle derivate seconde (di tipo fissato) sono comunque dominate da serie di costanti del tipo

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} A |n^2 \phi_{(0) \pm n}| + B |n \phi_{(1) \pm n}|,$$

con $A, B > 0$ dipendenti dal tipo di derivate. Queste serie di costanti convergono per (6.54). Si conclude, con lo stesso ragionamento di sopra, che $\varphi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2])$ e che la serie (6.48)

che definisce φ si può derivare termine a termine fino alle derivate seconde. Questo è quanto volevamo e conclude la dimostrazione provando che

$$\begin{aligned}\varphi(t, x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t)} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{C_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{-i(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t)} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t)} + \frac{C_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{-i(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t)} \right)\end{aligned}$$

è una soluzione del problema considerato. \square

Osservazioni 6.7. Il teorema di esistenza provato richiede ipotesi abbastanza forti sulla regolarità delle condizioni iniziali, sicuramente più forti di quelle usate nel precedente teorema di unicità. Ciò è dovuto alla procedura utilizzata per mostrare che la soluzione formale dell'equazione, ottenuta come una serie di Fourier (la cui convergenza è in generale solo nel senso dello spazio di Hilbert L^2), si possa derivare fino all'ordine voluto. È Possibile indebolire queste ipotesi adottando una procedura che si basa su tecniche matematiche più avanzate (vedi per esempio [V184]). In pratica si prova che la soluzione formale ottenuta come una serie di Fourier è una cosiddetta "soluzione debole" del problema (cioè una *distribuzione* o **funzione generalizzata** che risolve il problema di Cauchy considerato). Imponendo ipotesi di regolarità sui dati iniziali, si dimostra infine che tale funzione generalizzata è davvero una funzione differenziabile fino all'ordine voluto ed è pertanto una soluzione del problema di Cauchy in senso proprio.

6.4.3 Velocità di fase, frequenza, lunghezza d'onda.

Cosideriamo la forma generale della soluzione per il problema con condizioni al bordo periodiche nella decomposizione della soluzione per il problema con condizioni periodiche in $[-L/2, L/2]$ per $\mu = 0$, cioè per l'equazione di D'Alembert:

$$\varphi(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t)} + \frac{C_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{-i(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t)} \right),$$

Trascuriamo pure il termine At che non ci interessa qui e teniamo conto del fatto che ora $E_n = c\frac{2\pi|n|}{L}$. Si vede subito che φ è una sovrapposizione di onde del tipo:

$$e^{\pm i(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t)} = \cos\left(\frac{2\pi n}{L}(x - ct)\right) \pm i \sin\left(\frac{2\pi n}{L}(x - ct)\right) \quad \text{con } n > 0,$$

$$e^{\pm i(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t)} = \cos\left(\frac{2\pi n}{L}(x + ct)\right) \pm i \sin\left(\frac{2\pi n}{L}(x + ct)\right) \quad \text{con } n < 0.$$

Queste soluzioni hanno la stessa forma delle soluzioni dell'equazione di D'Alembert in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, cioè di soluzioni del tipo $f(x - ct)$ (onde progressive) oppure $g(x + ct)$ (onde regressive). Tuttavia ora, a parte la scelta di n , la loro forma funzionale è fissata: vedendole come funzioni reali,

possono solo essere seni oppure coseni. Come nel caso della teoria in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, c rappresenta la velocità di propagazione di tali profili, in questo caso si dice **velocità di fase** dell'onda φ_n . Consideriamo la soluzione $\varphi_n := \sin\left(\frac{2\pi n}{L}(x - ct)\right)$, per le altre analoghe soluzioni si possono fare discorsi analoghi. Se *fissiamo un punto* $x \in [-L/2, L/2]$ ed osserviamo, in quel punto, come oscilla φ_n , essa avrà un periodo di oscillazione $T_n = L/(nc)$. La **frequenza dell'onda** φ_n è, per definizione, l'inverso di tale periodo $\nu_n := nc/L$. Se invece, *a tempo fissato*, fotografiamo l'onda φ_n , essa sarà descritta da un senoide di periodo spaziale $\lambda_n = L/n$. Questo numero è detto **lunghezza d'onda** dell'onda φ_n . La lunghezza d'onda e la frequenza soddisfano la relazione, rispetto alla velocità di fase: $\lambda_n \nu_n = c$.

6.5 Il problema su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$ con condizioni al bordo di annullamento (e di Dirichlet)

Consideriamo ora il problema di determinare le soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon o D'Alembert nell'insieme $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$, una volta imposte condizioni iniziali e condizioni di annullamento ai bordi del compatto $[-L/2, L/2]$. Questo caso è fisicamente più interessante del precedente, dato che sistemi fisici comuni descritti dall'equazione di D'Alembert (es. le corde della chitarra), obbediscono a tali condizioni al contorno. L'esistenza di soluzioni sarà provata facendo uso della teoria della serie di Fourier sviluppata precedentemente. Alla fine discuteremo brevemente anche il caso di condizioni di Dirichlet generiche, dato che si può ricondurre al caso di condizioni di annullamento.

6.5.1 Teorema di unicità.

Abbiamo un primo teorema di unicità che si può enunciare in modo più generale anche ammettendo che l'equazione di Klein-Gordon abbia un termine di sorgente a secondo membro, lasciando immutata la dimostrazione, come è facile rendersi conto.

Teorema 6.9. *Si consideri il seguente problema su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$ con $\mu \geq 0$ costante fissata,*

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \mu^2 \varphi = 0, \quad \varphi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2], \mathbb{C}), \\ \varphi(t, L/2) = \varphi(t, -L/2) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ \varphi(0, x) = \phi_0(x) \quad \forall x \in [-L/2, L/2], \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x) = \phi_1(x) \quad \forall x \in [-L/2, L/2], \end{array} \right. \quad (6.55)$$

dove $\phi_0 \in C^2([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ e $\phi_1 \in C^1([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ sono funzioni assegnate che soddisfano le condizioni di annullamento al bordo²:

$$\phi_0(-L/2) = \phi_0(L/2) = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}(-L/2) = \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}(L/2) = 0 \quad (6.56)$$

²La seconda delle condizioni in (6.56) deve essere imposta a causa delle condizioni di annullamento al bordo di φ scritte sopra e della forma dell'equazione differenziale stessa valutata a $t = 0$.

e

$$\phi_1(-L/2) = \phi_1(L/2) = 0. \quad (6.57)$$

Se esiste una soluzione al problema posto, essa è unica. In particolare, se i dati iniziali ϕ_0 e ϕ_1 sono funzioni a valori reali, la soluzione φ , se esiste, è a valori reali. \diamond

Dimostrazione. Se una soluzione φ del problema, ammesso che esista, è complessa, possiamo sempre decomporla in parte reale ed immaginaria: $\varphi(t, x) = \text{Re}\varphi(t, x) + i\text{Im}\varphi(t, x)$. Data la natura reale dell'equazione di Klein-Gordon, avremo anche che la parte reale $\text{Re}\varphi$ e quella immaginaria $\text{Im}\varphi$, che sono funzioni *reali* con la stessa regolarità di φ , soddisfano la stessa equazione di Klein-Gordon separatamente. Inoltre soddisfano le condizioni al contorno di annullamento e si raccordano, separatamente, alle parti reali ed immaginarie dei dati iniziali per costruzione. In base a ciò è sufficiente provare il teorema di unicità nel caso di φ reale (cioè per la parte reale ed immaginaria di φ separatamente, quando φ è complessa). Assumiamo dunque di lavorare con funzioni reali soluzioni del problema considerato con dati iniziali reali. La dimostrazione della proprietà di unicità, è, escluso un punto, uguale a quella del teorema 5.1 ponendo $(\alpha, \beta) := \mathbb{R}$, $D := [-L/2, L/2]$. L'unica differenza è che ora, se ϕ è la differenza di due soluzioni del problema posto, l'identità

$$\int_0^T dt \oint_{+\partial D} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \phi \right) \cdot \mathbf{n} dS(x) = 0$$

nella dimostrazione del teorema 5.1 si scrive ora nella forma semplificata che deriva dalla (5.20):

$$\int_0^T dt \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{L/2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{-L/2} \right) = 0,$$

e questa identità vale banalmente in virtù delle condizioni di annullamento al bordo imposte sulle soluzioni del problema e quindi su ϕ .

Se la parte immaginaria dei dati iniziali è nulla, una soluzione del problema per la parte immaginaria di φ è la soluzione ovunque nulla. In base alla proprietà di unicità della soluzione, concludiamo che questa è l'unica soluzione e che quindi la parte immaginaria della soluzione (complessa a priori) φ è identicamente nulla. \square

6.5.2 Esistenza delle soluzioni per dati iniziali sufficientemente regolari.

Passiamo ora ad un teorema di esistenza la cui dimostrazione sfrutta il teorema 6.8 di esistenza nel caso di condizioni al contorno periodiche ed un trucco piuttosto ingegnoso. Cominciamo con un lemma.

Lemma 6.3. *Nelle stesse ipotesi del teorema 6.7 di unicità per il problema con condizioni al bordo periodiche, se le condizioni iniziali ϕ_0 e ϕ_1 , oltre a soddisfare le ipotesi del teorema, sono funzioni dispari, allora la soluzione φ , se esiste, è anch'essa una funzione dispari nella variabile x , cioè:*

$$\varphi(t, x) = -\varphi(t, -x), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times [-L/2, L/2]. \quad (6.58)$$

◇

Dimostrazione. Sia φ la soluzione, ammesso che esista, del problema (6.41), con condizioni iniziali $\phi_0 \in C^2([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ e $\phi_1 \in C^1([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ date da funzioni dispari che soddisfano i vincoli al contorno (6.42) e (6.43). Consideriamo la funzione, definita su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$:

$$\Phi(t, x) := \varphi(t, x) + \varphi(t, -x).$$

La soluzione φ è una funzione dispari nella variabile x se e solo se Φ è identicamente nulla. Dimostriamo che Φ è la funzione nulla se valgono le ipotesi del lemma. Si osservi che, per costruzione $\Phi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2], \mathbb{C})$. Inoltre, dato che nell'equazione di Klein-Gordon appaiono le derivate seconde unicamente, la funzione $(t, x) \mapsto \varphi(t, -x)$ soddisferà l'equazione di Klein Gordon (dato che è soddisfatta da φ), infine, come è facile verificare, dato che la riflessione $x \rightarrow -x$ è eseguita rispetto al centro del segmento $[-L/2, L/2]$, la funzione $(t, x) \mapsto \varphi(t, -x)$ sarà periodica (con la sua derivata prima spaziale) ai bordi di tale segmento, dato che lo è φ . Sommando membro a membro le due equazioni di Klein-Gordon per $\varphi(t, x)$ e $\varphi(t, -x)$, otteniamo che

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \mu^2 \Phi = 0.$$

Φ soddisferà anche le condizioni di periodicità ai bordi perché somma di funzioni periodiche. Per costruzione la funzione Φ soddisfa infine:

$$\Phi(0, x) = 0 \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, x) = 0, \quad \forall x \in [-L/2, L/2],$$

dato che le condizioni iniziali per φ sono per ipotesi delle funzioni dispari e quindi:

$$\Phi(0, x) = \varphi(0, x) + \varphi(0, -x) = \phi_0(x) + \phi_0(-x) = 0,$$

e anche

$$(\partial_t \Phi)(0, x) = (\partial_t \varphi)(0, x) + (\partial_t \varphi)(0, -x) = \phi_1(x) + \phi_1(-x) = 0.$$

In definitiva $\Phi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2])$ soddisfa l'equazione di Klein-Gordon, con dati iniziali nulli e condizioni periodiche al bordo. Usando il teorema 6.9 concludiamo che questa deve essere l'unica soluzione del problema detto, ma allora deve coincidere con la soluzione banale data dalla funzione ovunque nulla, notando che la soluzione nulla risolve lo stesso problema (con le stesse condizioni iniziali ed al bordo). \square

Possiamo ora enunciare e provare il teorema di esistenza. L'idea della dimostrazione è trasformare il problema con condizioni al bordo di annullamento in un problema con condizioni al bordo periodiche, ma definito su un dominio spaziale più grande. La soluzione determinata nel dominio più grande, che sappiamo esistere per il teorema 6.8, ristretta al dominio iniziale, sarà la soluzione del problema.

Teorema 6.10. *Si consideri il problema con condizioni al contorno di annullamento (6.55) per la funzione $\varphi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2], \mathbb{C})$ con $\mu \geq 0$ costante fissata.*

Se si assume che i dati iniziali soddisfino $\phi_0 \in C^2([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ di classe C^3 a tratti su $[-L/2, L/2]$ e $\phi_1 \in C^1([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ di classe C^2 a tratti su $[-L/2, L/2]$ e che valgano le condizioni di annullamento al bordo sui dati iniziali (6.56) e (6.57), allora esiste (ed è unica) una soluzione φ al problema. \diamond

Dimostrazione. Prima di tutto notiamo che tutti i risultati che abbiamo provato fino ad ora su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$, inclusi i teoremi di esistenza ed unicità in presenza di condizioni al bordo periodiche, valgono se si sostituisce $[-L/2, L/2]$ con un qualsiasi intervallo $[a, b]$, dove $a < b$. Anche le formule risolutive sono identiche con l'eccezione che il dominio d'integrazione $[-L/2, L/2]$ (per esempio nel calcolo dei coefficienti di Fourier) deve essere ovviamente rimpiazzato da $[a, b]$, ed il parametro L che appare, per esempio, negli esponenti deve essere sostituito con $b - a$. Con una traslazione di assi spaziali, portiamo il segmento $[-L/2, L/2]$ nel segmento $[0, L]$. Dimostreremo il teorema di esistenza in questo intervallo e poi torneremo sull'intervallo iniziale. La soluzione per l'intervallo $[-L/2, L/2]$ si otterrà banalmente con una traslazione di assi di $-L/2$.

Lavoriamo allora sul segmento $[0, L]$ sul quale definiamo le funzioni: $\tilde{\phi}_0(x) := \phi_0(x - L/2)$ e $\tilde{\phi}_1(x) := \phi_1(x - L/2)$ per ogni $x \in [0, L]$. Consideriamo poi il segmento di lunghezza doppia $[-L, L]$, estendiamo le funzioni $\tilde{\phi}_0$ e $\tilde{\phi}_1$ dal segmento $[0, L]$ a tutto il segmento $[-L, L]$ in modo tale che risultino funzioni dispari. Indichiamo le funzioni estese in questo modo con Φ_0 e Φ_1 . Ora passeremo dal problema con condizioni al bordo di annullamento su $[0, L]$ ad un nuovo problema sul segmento allargato $[-L, L]$ con condizioni al bordo *periodiche* del quale conosciamo già un teorema di esistenza. La soluzione che otterremo in quel caso, ristretta al dominio originale, sarà la soluzione del nostro problema.

Date le proprietà delle funzioni ϕ_0 e ϕ_1 di annullarsi in $x = 0$ e di essere, rispettivamente: C^2 e C^3 a tratti la prima, e C^1 e C^2 a tratti la seconda, con considerazioni elementari di analisi, si ha facilmente quanto segue. $\Phi_0 \in C^2([-L, L], \mathbb{C})$ (si noti che, riguardo alle derivate seconde, per il punto $x = 0$ vale la (6.56) che assicura che la derivata seconda in $x = 0$ esista e sia continua) ed è di classe C^3 a tratti su $[-L, L]$, $\Phi_1 \in C^1([-L, L], \mathbb{C})$ ed è di classe C^2 a tratti su $[-L, L]$. Infine sono soddisfatte le condizioni di periodicità al bordo di $[-L, L]$:

$$\Phi_0(-L) = \Phi_0(L) (= 0), \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}(-L) = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}(L), \quad \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2}(-L) = \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2}(L) (= 0)$$

e

$$\Phi_1(-L) = \Phi_1(L) (= 0), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(-L) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(L).$$

Si noti che le condizioni scritte sulle derivate prime sono conseguenza del fatto che le funzioni Φ_0 e Φ_1 sono funzioni dispari e quindi le loro derivate prime (in x) sono funzioni pari, le rimanenti condizioni sono anche conseguenza delle condizioni di annullamento al bordo delle funzioni ϕ_0 e ϕ_1 . Possiamo allora invocare il teorema 6.8 che assicura l'esistenza di una funzione $\Phi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L, L]; \mathbb{C})$ che soddisfi l'equazione di Klein-Gordon in tale insieme, che si raccordi

con i dati iniziali Φ_0 e Φ_1 al tempo $t = 0$ e che soddisfi condizioni di periodicità

$$\Phi(t, -L) = \Phi(t, L), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, -L) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, L) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La soluzione Φ è una funzione dispari in x per il lemma 6.3, dato che i dati iniziali sono funzioni dispari. Quindi, in particolare $\Phi(t, 0) = -\Phi(t, -0) = -\Phi(t, 0) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ per il fatto che Φ è dispari. Inoltre essendo Φ dispari ma anche periodica su $[-L, L]$, deve vale contemporaneamente $\Phi(t, L) = -\Phi(t, -L)$ e $\Phi(t, L) = \Phi(t, -L)$ e quindi $\Phi(t, L) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Se allora definiamo $\phi(t, x) := \Phi|_{\mathbb{R} \times [0, L]}(t, x)$, questa funzione soddisfa per costruzione:

$$\begin{cases} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \mu^2 \phi = 0, & \phi \in C^2(\mathbb{R} \times [0, L], \mathbb{C}), \\ \phi(t, 0) = \varphi(t, L) = 0 & \forall t \in \mathbb{R}, \\ \phi(0, x) = \tilde{\phi}_0(x) & \forall x \in [0, L], \\ \frac{\partial \phi}{\partial t}(0, x) = \tilde{\phi}_1(x) & \forall x \in [0, L]. \end{cases}$$

Di conseguenza, la funzione definita da $\varphi(t, x) := \phi(t, x + L/2)$ per ogni $(t, x) \in \mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$ soddisfa

$$\begin{cases} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \mu^2 \varphi = 0, & \varphi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2], \mathbb{C}), \\ \varphi(t, L/2) = \varphi(t, -L/2) = 0 & \forall t \in \mathbb{R}, \\ \varphi(0, x) = \phi_0(x) & \forall x \in [-L/2, L/2], \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x) = \phi_1(x) & \forall x \in [-L/2, L/2], \end{cases}$$

ed è quindi una soluzione del problema con condizioni al contorno di annullamento (6.55) con dati iniziali ϕ_0 e ϕ_1 . \square

Osservazioni 6.8.

(1) Studiamo la forma particolare dello sviluppo di Fourier della soluzione del problema considerato, *nel caso in cui il campo φ sia reale*, dato che si presta a qualche osservazione interessante dal punto di vista fisico, specialmente nel caso in cui $\mu = 0$, cioè per l'equazione di D'Alembert. Sotto opportune ipotesi di regolarità delle condizioni iniziali, la generica soluzione Φ del problema periodico su $\mathbb{R} \times [-L, L]$, come sappiamo dal teorema 6.8 è data dallo sviluppo di Fourier:

$$\Phi(t, x) = At + \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n^{(+)} \frac{e^{i \frac{\pi n}{L} x}}{\sqrt{2L}} e^{-i E_n t} + C_n^{(-)} \frac{e^{-i \frac{\pi n}{L} x}}{\sqrt{2L}} e^{i E_n t},$$

dove il termine At può apparire solo se $\mu = 0$. Tuttavia, nel caso in esame, dato che richiederemo che Φ sia una funzione dispari di x , l'unica possibilità è $A = 0$ anche nel caso $\mu = 0$, come si prova facilmente mantenendo tale termine nello sviluppo di Φ (per $\mu = 0$) e procedendo come facciamo nel seguito (omettendo però direttamente tale termine). Pertanto partiamo con la

generica soluzione:

$$\Phi(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n^{(+)} \frac{e^{i \frac{\pi n}{L} x}}{\sqrt{2L}} e^{-i E_n t} + C_n^{(-)} \frac{e^{-i \frac{\pi n}{L} x}}{\sqrt{2L}} e^{i E_n t}, \quad (6.59)$$

dove $E_n = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 + \mu^2}$. Dalla dimostrazione del teorema 6.10, sappiamo che la soluzione generica del problema con condizioni di annullamento al bordo su $[0, L]$ si ottiene restringendo la funzione Φ a $[0, L]$ sotto l'ipotesi che Φ sia *dispari*. Ma allora deve valere:

$$\Phi(t, x) = -\Phi(t, -x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} -C_n^{(+)} \frac{e^{-i \frac{\pi n}{L} x}}{\sqrt{2L}} e^{-i E_n t} - C_n^{(-)} \frac{e^{i \frac{\pi n}{L} x}}{\sqrt{2L}} e^{i E_n t}. \quad (6.60)$$

Sommando membro a membro con (6.59) e dividendo il risultato a metà si ottiene allora che:

$$\Phi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} i C_n^{(+)} e^{-i E_n t} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) - i C_n^{(-)} e^{i E_n t} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right). \quad (6.61)$$

Ora, tenendo conto del fatto che Φ è reale, possiamo ancora scrivere che:

$$\Phi(t, x) = \overline{\Phi(t, x)} = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{i C_n^{(+)}} e^{i E_n t} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) - \overline{i C_n^{(-)}} e^{-i E_n t} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \quad (6.62)$$

che, sommata membro a membro con (6.61), fornisce:

$$\Phi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} -\text{Im}\left(C_n^{(+)} e^{-i E_n t}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) + \text{Im}\left(C_n^{(-)} e^{i E_n t}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$

Se infine definiamo $C_n^{(\pm)} = \alpha_n^{(\pm)} + i \beta_n^{(\pm)}$, e decomponiamo gli esponenziali complessi $e^{\pm i E_n t} = \cos(E_n t) + i \sin(E_n t)$, con un semplice calcolo, l'identità trovata si riduce a:

$$\Phi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\alpha_n^{(-)} - \alpha_n^{(+)}\right) \sin(E_n t) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) + \left(\beta_n^{(-)} - \beta_n^{(+)}\right) \cos(E_n t) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$

Possiamo concludere che, per un' opportuna scelta delle costanti *reali* A_n e B_n etichettate su \mathbb{N} , la soluzione del problema con condizioni di annullamento al bordo di $[0, L]$ ha la struttura, se $(t, x) \in \mathbb{R} \times [0, L]$:

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} [A_n \sin(E_n t) + B_n \cos(E_n t)] \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right). \quad (6.63)$$

Sopra abbiamo omesso i termini con $n = 0$ dato che non forniscono alcun contributo essendo $\sin 0 = 0$, inoltre abbiamo tenuto conto del fatto che $E_n = E_{-n}$, $\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) = -\sin\left(\frac{-\pi n x}{L}\right)$ e questo consente di sommare sui naturali invece che sugli interi raccogliendo i coefficienti opportunamente.

Per inciso, come segue subito dalla (6.61) cambiando nome ai coefficienti e raccogliendoli tenendo conto del fatto che $E_n = E_{-n}$ e che $\sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right) = -\sin\left(\frac{-\pi nx}{L}\right)$, la (6.63) vale banalmente anche nel caso in cui si lavori con soluzioni complesse, pur di pensare i coefficienti A_n e B_n come numeri complessi. Infine, usando la formula di Eulero nell'espressione trovata (con A_n e B_n complessi), si ha anche che la soluzione generale complessa si può riscrivere come:

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} [D_n^{(+)} e^{-iE_n t} + D_n^{(-)} e^{iE_n t}] \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right), \quad (6.64)$$

dove, ancora, $D_n^{(\pm)} \in \mathbb{C}$ (l'unica differenza sostanziale con la (6.61) è che ora la somma su n è eseguita solo sui naturali non nulli invece che su \mathbb{Z}).

Tornando a (6.63), nel caso esplicitamente reale, mostriamo ora come individuare i coefficienti A_n e B_n in funzione dei dati iniziali. Con la stessa procedura che abbiamo usato nella dimostrazione del teorema 6.8 si riesce facilmente a dimostrare che la serie di sopra converge uniformemente, si può derivare sotto il segno di somma nella variabile t ottenendo una serie che converge ancora uniformemente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} [A_n \cos(E_n t) - B_n \sin(E_n t)] E_n \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right).$$

Specializzando le due serie per $t = 0$ si ha allora il legame con i dati iniziali:

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} B_n \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right), \quad \phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} E_n A_n \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right).$$

Moltiplicando entrambe le espressioni per $\sin\left(\frac{\pi mx}{L}\right)$ ed integrando su $[0, L]$, passando il simbolo di integrale sotto quello di serie, dato che ciò è concesso per via della uniforme convergenza della serie, si trova infine:

$$B_n = \sqrt{\frac{8}{L}} \int_0^L \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right) \phi_0(x) dx, \quad A_n = \sqrt{\frac{8}{LE_n^2}} \int_0^L \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right) \phi_1(x) dx \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad (6.65)$$

dove abbiamo tenuto conto dell'identità (vedi la sezione C in Appendice)

$$\int_0^L \sin\left(\frac{\pi mx}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

(2) Consideriamo esplicitamente il caso dell'equazione di D'Alembert, $\mu = 0$, per cui $E_n = c \left| \frac{\pi n}{L} \right|$. La decomposizione (6.63) di $\varphi(t, x)$ è interessante perché non è data in termini di onde regressive o progressive, come quelle che appaiono nella decomposizione della soluzione per il problema con condizioni periodiche in $[0, L]$:

$$e^{\pm i \left(\frac{2\pi n}{L} x - i E_n t \right)} = \cos\left(\frac{2\pi n}{L}(x - ct)\right) \pm i \sin\left(\frac{2\pi n}{L}(x - ct)\right) \quad \text{con } n > 0,$$

$$e^{\pm i\left(\frac{2\pi n}{L}x - iE_n t\right)} = \cos\left(\frac{2\pi n}{L}(x + ct)\right) \pm i \sin\left(\frac{2\pi n}{L}(x + ct)\right) \quad \text{se } n < 0.$$

Invece appaiono soluzioni dette **onde stazionarie** o **armoniche** (che non si vedono “propagare” nelle due direzioni come invece accade nel caso di condizioni periodiche):

$$A_n \sin\left(\frac{c\pi n}{L}t\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) + B_n \cos\left(\frac{c\pi n}{L}t\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \quad (6.66)$$

Queste onde hanno frequenze temporale:

$$\nu_n = \frac{cn}{2L},$$

dette **frequenze proprie** o **frequenze di risonanza** della corda. A differenza delle onde analoghe trovate per lo sviluppo delle soluzioni con condizioni periodiche, nelle onde stazionarie vi sono punti nello spazio, detti **nodi**, in cui *le onde si annullano per ogni valore del tempo*. Le posizioni $x_k^{(n)}$ dei nodi sono ottenute risolvendo $\sin(\pi n x_k^{(n)}/L) = 0$ su $[0, L]$ ed ottenendo quindi, per ogni fissato $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_k^{(n)} = \frac{k}{n}L$ per tutti i $k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$.

Un altro modo di scrivere la (6.66) è:

$$C_n \sin\left(\frac{c\pi n}{L}t + \delta_n\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \quad (6.67)$$

dove abbiamo introdotto le **fasi** $\delta_n \in (-\pi, \pi]$ e le **ampiezze** $C_n \geq 0$. Sviluppando la prima delle due funzioni seno, si ricavano le relazioni che legano i coefficienti reali C_n, δ_n ai coefficienti reali A_n, B_n :

$$C_n \cos \delta_n = A_n, \quad C_n \sin \delta_n = B_n.$$

La corrispondenza tra le coppie $(C_n, \delta_n) \in (0, +\infty) \times (-\pi, \pi]$ e le coppie $(A_n, B_n) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ risulta essere biunivoca³.

(3) Il teorema di esistenza provato richiede ipotesi abbastanza forti sulla regolarità delle condizioni iniziali, sicuramente più forti di quelle usate nel precedente teorema di unicità. È però possibile indebolire queste ipotesi usando procedure matematiche più avanzate esattamente come già osservato per il caso del problema con dati al bordo periodici.

6.5.3 Il caso di condizioni al bordo di Dirichlet

Passiamo a considerare brevemente il caso di condizioni di Dirichlet generiche invece che di annullamento. Abbiamo un primo teorema di unicità che si può enunciare in modo più generale anche ammettendo che l'equazione di Klein-Gordon abbia un termine di sorgente a secondo membro, lasciando immutata la dimostrazione, come è facile rendersi conto.

³Non è altro che la corrispondenza che associa coordinate polari piane e coordinate cartesiane piane.

Teorema 6.11. *Si consideri il seguente problema su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$ con $\mu \geq 0$ costante fissata,*

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \mu^2 \psi = 0, \quad \psi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2], \mathbb{C}), \\ \psi(t, L/2) = f(t), \quad \psi(t, -L/2) = g(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ \psi(0, x) = \psi_0(x) \quad \forall x \in [-L/2, L/2], \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(0, x) = \psi_1(x) \quad \forall x \in [-L/2, L/2], \end{array} \right. \quad (6.68)$$

dove $\psi_0 \in C^2([-L/2, L/2], \mathbb{C})$, $\psi_1 \in C^1([-L/2, L/2], \mathbb{C})$, $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ sono funzioni assegnate che soddisfano le condizioni⁴:

$$\psi_0(-L/2) = f(0), \quad \psi_0(L/2) = g(0),$$

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2}(-L/2) = \frac{1}{c^2} f''(0) + \mu^2 f(0), \quad \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2}(L/2) = \frac{1}{c^2} g''(0) + \mu^2 g(0) \quad (6.69)$$

e

$$\psi_1(-L/2) = f'(0), \quad \psi_1(L/2) = g'(0). \quad (6.70)$$

Se esiste una soluzione al problema posto, essa è unica. In particolare, se i dati iniziali ψ_0 , ψ_1 e f, g sono funzioni a valori reali, la soluzione ψ , se esiste, è a valori reali. \diamond

Dimostrazione. È la stessa data per il teorema 6.9, dato che la differenza di due soluzioni del problema considerato è una funzione che risolve il problema con condizioni al bordo di annullamento. \square .

Per quanto riguarda l'esistenza delle soluzioni proviamo che, *nel caso dell'equazione di D'Alembert*, la questione può essere riportata al problema con dati al bordo nulli, a parità di tutte le altre condizioni. Vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione 6.4. *Si consideri il problema su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$ con condizioni di Dirichlet dato dalla (6.68) assumendo le condizioni (6.69) e (6.70) e $\mu = 0$. ψ è una soluzione di tale problema se e solo se la funzione:*

$$\varphi(t, x) := \psi(t, x) - \frac{L-2x}{2L} f(t) - \frac{L+2x}{2L} g(t)$$

soddisfa il problema con condizioni di annullamento al bordo dato dalla (6.55) assumendo le condizioni (6.56) e (6.57), $\mu = 0$ e con condizioni iniziali:

$$\phi_0(x) = \psi_0(x) - \frac{L-2x}{2L} f(0) - \frac{L+2x}{L} g(0), \quad \phi_1(x) = \psi_1(x) - \frac{L-2x}{2L} f'(0) - \frac{L+2x}{L} g'(0).$$

⁴La seconda riga delle condizioni in (6.69) deve essere imposta a causa delle condizioni al bordo di ψ scritte sopra e della forma dell'equazione differenziale stessa valutata a $t = 0$.

Dimostrazione. La dimostrazione si esegue immediatamente per verifica diretta. \square

Osservazioni 6.9. Nella situazione generale in cui $\mu \neq 0$, si può enunciare un analogo teorema riconducendo il problema con condizioni al bordo generiche ad un problema con condizioni al bordo di annullamento ma con una sorgente a secondo membro dell'equazione di Klein-Gordon. Lasciamo l'ovvia formulazione al lettore.

Capitolo 7

Introduzione ai metodi dell'analisi spettrale e qualche applicazione all'acustica musicale.

In questo capitolo introdurremo alcune idee base delle procedure di soluzione dell'equazione di D'Alembert basate sulla teoria spettrale dell'operatore di Laplace. Alla fine useremo alcuni dei risultati trovati in questo e nel precedente capitolo per introdurre, molto generalmente, qualche elemento di acustica fisica. In particolare discuteremo, in modo un po' idealizzato, il funzionamento di alcuni strumenti musicali.

7.1 Generalizzazione della procedura di soluzione con la serie di Fourier su domini più generali.

Consideriamo il caso in cui si voglia studiare l'equazione di D'Alembert per una funzione $u = u(t, \mathbf{x})$ di classe $C^2(\mathbb{R} \times \overline{D})$, in generale con sorgente $S = S(t, \mathbf{x})$ assegnata di classe $C^0(\mathbb{R} \times \overline{D})$:

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta_{\mathbf{x}} u = S(t, \mathbf{x}), \quad (7.1)$$

dove $D \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme aperto connesso a chiusura compatta con bordo dato da una superficie C^∞ a tratti, orientabile, richiedendo che le soluzioni soddisfino condizioni di Dirichlet (cioè di annullamento su ∂D):

$$u|_{\partial D}(t, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}. \quad (7.2)$$

Tale richiesta implica che debba valere la condizione di compatibilità $S|_{\partial D}(t, \mathbf{x}) = 0$. Supporremo infine che valgano condizioni iniziali $u_0 \in C^1(\overline{D})$ e $u_1 \in C^0(\overline{D})$ compatibili con le condizioni di annullamento al bordo:

$$u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, \mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \in \overline{D}. \quad (7.3)$$

Anche se ci limiteremo alla situazione sopra esposta, si potrebbero fare considerazioni analoghe per altri tipi di condizioni al bordo; quanto diremo si può inoltre estendere facilmente al caso dell'equazione di Klein-Gordon.

Nel casistica che considereremo ricade in particolare la teoria della corda vibrante ad estremi fissi discussa nel capitolo precedente; in tal caso $\bar{D} = [0, L]$ e u rappresenta la (piccola) deformazione trasversale della corda. La teoria che considereremo include anche il caso di una membrana (di estensione limitata) vibrante a bordo fissato (vedi la sezione 5.1). In tal caso $D \subset \mathbb{R}^2$ è la proiezione sul piano orizzontale della membrana e u misura la (piccola) deformazione verticale (trasversale) della membrana. Il bordo della membrana è tenuto fermo, cioè u si annulla su ∂D .

Nel seguito ci occuperemo di descrivere una procedura che porta a costruire esplicitamente una soluzione della (7.1) per assegnati dati iniziali (7.3) e quando siano soddisfatte le condizioni al bordo (7.2). Tuttavia non potremo entrare in tutti i dettagli matematici necessari, dato che ciò richiederebbe tecniche avanzate di analisi funzionale ed in particolare di *teoria spettrale* [Mo10]. In ogni caso le idee che esporremo saranno sufficienti per descrivere il fenomeno fisico della *risonanza* che ha importanti conseguenze in fisica.

7.1.1 Autofunzioni del laplaciano con condizioni di Dirichlet e serie di Fourier generalizzata.

Assumendo che l'insieme $D \subset \mathbb{R}^n$ sia scelto come precisato sopra, definiamo il dominio per l'operatore di Laplace in modo da tenere automaticamente conto delle condizioni di annullamento al bordo (estendendo la teoria al caso di funzioni a valori complessi):

$$\mathcal{D} := \{f \in C^2(\bar{D}; \mathbb{C}) \mid f|_{\partial D} = 0\} \quad (7.4)$$

Questo insieme è evidentemente uno spazio vettoriale complesso.

Consideriamo l'operatore di Laplace $\Delta : \mathcal{D} \rightarrow C^0(\bar{D}; \mathbb{C})$. Su questo dominio l'operatore Δ è **hermitiano** rispetto al prodotto scalare di $L^2(\bar{D}; d^n x)$, cioè vale:

$$(f|\Delta g) = (\Delta g|f) \quad \text{se } f, g \in \mathcal{D}, \quad (7.5)$$

dato che ciò equivale a scrivere:

$$\int_D \bar{f} \Delta g \, d^n x = \int_D \overline{\Delta f} g \, d^n x \quad \text{se } f, g \in \mathcal{D}, \quad (7.6)$$

che, a sua volta, segue immediatamente dalla definizione di \mathcal{D} e dalla seconda identità di Green:

$$\int_D \bar{f} \Delta g \, d^n x - \int_D \overline{\Delta f} g \, d^n x = \oint_{+\partial D} (\bar{f} \nabla g - g \nabla \bar{f}) \cdot n dS = 0 \quad \text{essendo } f = g = 0 \text{ su } \partial D.$$

Un'**autofunzione** ϕ_λ di Δ con il dominio detto è una funzione in \mathcal{D} (a valori complessi quindi) non identicamente nulla tale che valga l'identità:

$$\Delta \phi_\lambda = \lambda \phi_\lambda, \quad (7.7)$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{C}$, detto **autovalore** di ϕ_λ .

Si osservi che se ϕ_λ è autofunzione associata a λ , ogni altra funzione $c\phi_\lambda$, con $c \in \mathbb{C}$ e $c \neq 0$ è ancora autofunzione dello stesso autovalore. Tuttavia tutte queste autofunzioni sono *linearmente dipendenti* per costruzione quando viste come vettori nello spazio vettoriale complesso \mathcal{D} . Comunque, in generale, può capitare di avere più autofunzioni *linearmente indipendenti* associate allo stesso autovalore. Il sottospazio vettoriale di \mathcal{D} generato dalle autofunzioni di un fissato autovalore si dice **autospazio** di quell'autovalore.

Proposizione 7.1. *Coseguentemente alle ipotesi fatte su D ed alla definizione di \mathcal{D} valgono i seguenti fatti:*

- (a) *gli autovalori di Δ sono reali,*
- (b) *gli autovalori di Δ sono strettamente negativi,*
- (c) *le autofunzioni corrispondenti ad autovalori differenti sono ortogonali.* \diamond

Dimostrazione. Per quanto riguarda la prova di (a) e (b) abbiamo che:

$$\begin{aligned} \lambda(\phi_\lambda|\phi_\lambda) &= (\phi_\lambda|\Delta\phi_\lambda) = \int_D \overline{\phi_\lambda} \Delta\phi_\lambda \, d^n x = \int_D \nabla \cdot (\overline{\phi_\lambda} \nabla\phi_\lambda) \, d^n x - \int_D \nabla\overline{\phi_\lambda} \cdot \nabla\phi_\lambda \, d^n x \\ &= - \int_D \nabla\overline{\phi_\lambda} \cdot \nabla\phi_\lambda \, d^n x, \end{aligned}$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo trascurato un integrale dato che è nullo come banale conseguenza del teorema della divergenza e del fatto che ϕ_λ si annulla su ∂D . Abbiamo ottenuto:

$$\lambda \int_D |\phi_\lambda|^2 \, d^n x = - \int_D \|\nabla\phi_\lambda\|^2 \, d^n x.$$

Si osservi che l'integrale a primo membro è strettamente positivo, dato che, per ipotesi ϕ_λ non è ovunque nulla (che equivale a dire che non è quasi ovunque nulla dato che è continua). Ne segue che $-\lambda \geq 0$. Se fosse $\lambda = 0$, la stessa identità trovata sopra proverebbe che $\nabla\phi_\lambda = 0$ quasi ovunque e quindi ovunque, dato che $\phi_\lambda \in C^1(\overline{D}; \mathbb{C})$. Di conseguenza avremmo che ϕ_λ sarebbe costante sull'aperto connesso D . Il fatto che ϕ_λ si annulli sul bordo insieme all'ipotesi di continuità su tutto \overline{D} implicherebbero che $\phi_\lambda = 0$ ovunque, cosa impossibile.

Per provare (c) basta osservare che, dalla definizione di autofunzione:

$$(\lambda - \lambda') \int_D \overline{\phi_\lambda} \phi_{\lambda'} \, d^n x = \int_D [(\Delta\overline{\phi_\lambda}) \phi_{\lambda'} - \overline{\phi_\lambda} \Delta\phi_{\lambda'}] \, d^n x = 0$$

a causa, come prima, della seconda identità di Green. Se $\lambda \neq \lambda'$, l'identità trovata implica che deve valere necessariamente:

$$(\phi_\lambda|\phi_{\lambda'}) := \int_D \overline{\phi_\lambda} \phi_{\lambda'} \, d^n x = 0.$$

□

L'insieme degli autovettori di Δ costituisce il cosiddetto **spettro puntuale** di Δ , che si indica con $\sigma_p(\Delta)$. Si osservi che gli elementi di tale insieme dipendono strettamente dal dominio che abbiamo scelto per Δ .

Osservazioni 7.1. Nel caso di $D = [0, L]$ e $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$ quanto trovato sopra si riduce a fatti che abbiamo già verificato. In quel caso gli autovalori sono della forma $\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$ con $n = 1, 2, \dots$, e le corrispondenti autofunzioni (individuate a meno di un fattore moltiplicativo) sono $\phi_n(x) := \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$.

Nel caso di $D = [0, L]$ e $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$, le autofunzioni del laplaciano, divise per la loro norma, in modo da definire vettori di norma unitaria, e quozientando lo spazio $\mathcal{L}^2([0, L], dx)$ rispetto alla relazione di equivalenza che identifica funzioni che differiscono su insiemi di misura nulla, risultano individuare una *base hilbertiana* di $L^2([0, L], dx)$. Ci si può chiedere se questo sia un fatto generale. La risposta è positiva: l'insieme degli autovettori ϕ_λ del laplaciano Δ con le ipotesi fatte su D e \mathcal{D} , se pensati come elementi dello spazio di Hilbert $L^2(D; d^n x)$, costituisce una base Hilbertiana di tale spazio. La prova di questo notevole fatto è un caso particolare del teorema di decomposizione spettrale per operatori non limitati densamente definiti [Mo10]. Si prova più precisamente la seguente proposizione, estendibili a contesti molto più generali.

Proposizione 7.2. *Se Δ è definito sul dominio \mathcal{D} (quindi con condizioni di annullamento) con $D \subset \mathbb{R}^n$ che rispetta le ipotesi suddette, gli autovalori $\lambda \in \sigma_p(\Delta)$ ed i corrispondenti autovettori ϕ_λ di Δ soddisfano i fatti seguenti.*

(a) *Si possono ordinare in una successione infinita strettamente decrescente che diverge a $-\infty$:*

$$0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n \rightarrow -\infty.$$

(b) *Per ogni autovalore $\lambda \in \sigma_p(\Delta)$ esistono solo un numero finito, d_λ , di autovettori $\phi_{\lambda, \alpha}$, $\alpha = 1, \dots, d_\lambda$, reciprocamente ortogonali (e tale numero corrisponde alla dimensione dell'autospazio di λ). Se si definisce:*

$$N(\Lambda) := \sum_{|\lambda_n| \leq \Lambda} d_{\lambda_n}$$

allora vale la stima di Weyl:

$$\frac{N(\Lambda)}{\Lambda^{n/2}} \rightarrow \frac{\text{Vol}(B^n) \text{Vol}(D)}{(2\pi)^n} \quad \text{se } \Lambda \rightarrow +\infty,$$

dove $\text{Vol}(M) := \int_M d^n x$ e B^n è la palla unitaria in \mathbb{R}^n .

(c) *L'insieme degli autovettori, scelti con norma unitaria $\{\phi_{\lambda, \alpha}\}_{\lambda \in \sigma_p(\Delta), \alpha=1, \dots, d_\lambda}$ individua una base hilbertiana di $L^2(D; d^n x)$. \diamond*

Il fatto che l'insieme di autofunzioni ϕ_λ costituisca una base hilbertiana di $L^2(D; d^n x)$ implica che, nel senso della convergenza di tale spazio di Hilbert, se $f \in L^2(D; d^n x)$, abbia senso lo

sviluppo di Fourier generalizzato:

$$f = \sum_{\lambda \in \sigma_p(\Delta)} \sum_{\alpha=1}^{d_\lambda} f_{\lambda,\alpha} \phi_{\lambda,\alpha} \quad \text{dove} \quad f_{\lambda,\alpha} := (f_{\lambda,\alpha}|f) = \int_D \overline{\phi_{\lambda,\alpha}(x)} f(x) d^n x. \quad (7.8)$$

I coefficienti $f_{\lambda,\alpha}$ sono i **coefficienti di Fourier** (generalizzati) di f rispetto alla base hilbertiana dei vettori $\phi_{\lambda,\alpha}$.

Osservazioni 7.2.

(1) Sotto opportune ipotesi di regolarità sull'aperto connesso $D \subset \mathbb{R}^n$ nel quale si cercano le autofunzioni di Δ con condizioni di annullamento al bordo, si riesce a dimostrare che la dimensione dell'autospazio del primo autovalore di Δ è sempre 1 e che ogni autofunzione di tale autospazio non si annulla mai se non su ∂D . Per quanto riguarda le autofunzioni dei rimanenti autospazi, esse si annullano su sottoinsiemi di D che non contengono punti interni¹ e sono funzioni $C^\infty(D; \mathbb{C})$ come segue dai teoremi di regolarità ellittica come il teorema A.2.

(2) Come nel caso di $D = [0, L]$, se sono soddisfatte ipotesi sui coefficienti $f_{\lambda,\alpha}$ che assicurano la convergenza puntuale della serie in (7.8), la funzione f a primo membro in (7.8) deve soddisfare le condizioni di annullamento al bordo $f|_{\partial D} = 0$ dato che tali condizioni sono soddisfatte da tutte le funzioni $\phi_{\lambda,\alpha}$ che appaiono nella serie.

(3)* Il fatto che $\{\phi_{\lambda,\alpha}\}_{\lambda \in \sigma_p(\Delta), \alpha=1, \dots, d_\lambda} \subset \mathcal{D}$ sia una base hilbertiana di $L^2(D, d^n x)$ implica immediatamente che \mathcal{D} sia denso in $L^2(D, d^n x)$ nella topologia metrica di quest'ultimo. Partendo da questo fatto è possibile provare che Δ definito su \mathcal{D} , pensato come sottospazio denso di $L^2(D, d^n x)$, goda della proprietà di essere *essenzialmente autoaggiunto* [Mo10], che rinforza la proprietà di hermiticità già menzionata.

7.1.2 *Autofunzioni dell'operatore di Laplace-Beltrami su una varietà riemanniana.

Consideriamo ora il caso trattato nella sezione 5.1.3 in cui si lavorava con una funzione $u = u(t, p)$ che descriveva le piccole deformazioni di una superficie chiusa $M \subset \mathbb{R}^3$ rappresentate un tamburo di topologia arbitraria. In tal caso l'operatore laplaciano viene sostituito dall'*operatore di Laplace-Beltrami* associato alla metrica g indotta da quella standard in \mathbb{R}^3 su M .

Più in generale considereremo il caso di una varietà C^∞ connessa e compatta, M , di dimensione n e dotata di una metrica riemanniana g di classe C^∞ . Indicheremo con $\Delta^{(M,g)}$ l'operatore di Laplace-Beltrami costruito con la connessione di Levi-Civita associata a g . In coordinate locali x^1, \dots, x^n , in cui la metrica è individuata dalla matrice di coefficienti $g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$ e con

¹Possiamo lavorare separatamente con la parte reale ed immaginaria delle autofunzioni dato che gli autovalori λ e i coefficienti di Δ sono reali. Se dunque $\Delta\phi_\lambda - \lambda\phi = 0$ (con $\lambda \leq 0$) e $\phi \in C^2(D)$ si annulla su un aperto $D_0 \subset D$ allora deve essere nulla sull'aperto connesso D dato che, per la proposizione 3.3, la funzione $\Phi(x, \mathbf{x}) := e^{\sqrt{-\lambda}x}\phi(\mathbf{x})$ deve essere nulla, in quanto è armonica in $n+1$ variabili sull'aperto connesso $\Omega := \mathbb{R} \times D$ e si annulla sull'aperto $A := \mathbb{R} \times D_0 \subset \Omega$.

inversa la matrice di coefficienti $g^{ij}(x^1, \dots, x^n)$ come ben noto vale:

$$\Delta^{(M,g)}u = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(g^{ij} \sqrt{\det g} \frac{\partial}{\partial x^i} u \right), \quad (7.9)$$

dove il determinante è quello della matrice di coefficienti g_{ij} . Definiamo il dominio per l'operatore di Laplace-Beltrami come:

$$\mathcal{D}_M := C^2(M; \mathbb{C}) \quad (7.10)$$

Si noti che non ci sono condizioni al contorno da imporre dato che la varietà M non ha bordo. Questo insieme è evidentemente uno spazio vettoriale complesso.

Su questo dominio l'operatore $\Delta^{(M,g)}$ è **hermitiano** rispetto al prodotto scalare di $L^2(\overline{\mathcal{D}_M}; d\nu^{(M,g)})$ dove $\nu^{(M,g)}$ è la misura di Borel associata a g su M , cioè vale:

$$\left(f \mid \Delta^{(M,g)} g \right) = \left(\Delta^{(M,g)} f \mid g \right) \quad \text{se } f, g \in \mathcal{D}_M, \quad (7.11)$$

che segue immediatamente dalla definizione di \mathcal{D}_M e dalla seconda identità di Green rispetto alla derivata covariante di Levi-Civita, tenuto conto del fatto che $\partial M = \emptyset$. Un **autofunzione** ϕ_λ di $\Delta^{(M,g)}$ con il dominio detto è al solito una funzione in \mathcal{D}_M (a valori complessi quindi) non identicamente nulla tale che valga l'identità:

$$\Delta^{(M,g)} \phi_\lambda = \lambda \phi_\lambda, \quad (7.12)$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{C}$, detto al solito **autovalore** di ϕ_λ .

Il sottospazio vettoriale di \mathcal{D}_M generato dalle autofunzioni di un fissato autovalore si dice al solito **autospatio** di quell'autovalore.

Proposizione 7.3. *Coseguentemente alle ipotesi fatte su M ed alla definizione di \mathcal{D}_M valgono i seguenti fatti:*

- (a) *gli autovalori di $\Delta^{(M,g)}$ sono reali,*
- (b) *gli autovalori di $\Delta^{(M,g)}$ sono strettamente negativi eccetto uno che è nullo,*
- (c) *le autofunzioni corrispondenti ad autovalori differenti sono ortogonali. \diamond*

Dimostrazione. La dimostrazione è la stessa che per la proposizione 7.1, usando la derivata covariante invece che quella ordinaria, osservando che in ogni caso esiste sempre un autovalore nullo che ha una qualsiasi funzione costante non nulla su M come autofunzione. \square

L'insieme degli autovettori di $\Delta^{(M,g)}$ costituisce al solito lo **spettro puntuale** di $\Delta^{(M,g)}$, $\sigma_p(\Delta^{(M,g)})$.

Come nel caso più elementare discusso precedentemente, l'insieme degli autovettori ϕ_λ di $\Delta^{(M,g)}$ con le ipotesi fatte su M e \mathcal{D}_M , se pensati come elementi dello spazio di Hilbert $L^2(M; d\nu^{(M,g)})$, costituisce una base Hilbertiana di tale spazio. Si prova più precisamente la seguente proposizione.

Proposizione 7.4. Se $\Delta^{(M,g)}$ è definito sul dominio \mathcal{D}_M con M che rispetta le ipotesi suddette, gli autovalori $\lambda \in \sigma_p(\Delta^{(M,g)})$ ed i corrispondenti autovettori ϕ_λ di $\Delta^{(M,g)}$ soddisfano i fatti seguenti.

(a) Si possono ordinare in una successione infinita strettamente decrescente che diverge a $-\infty$:

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n \rightarrow -\infty.$$

(b) Per ogni autovalore $\lambda \in \sigma_p(\Delta^{(M,g)})$ esistono solo un numero finito, d_λ , di autovettori $\phi_{\lambda,\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, d_\lambda$, reciprocamente ortogonali (e tale numero corrisponde alla dimensione dell'autospazio di λ). Se si definisce:

$$N(\Lambda) := \sum_{|\lambda_n| \leq \Lambda} d_{\lambda_n}$$

allora vale la stima di Weyl:

$$\frac{N(\Lambda)}{\Lambda^{n/2}} \rightarrow \frac{\text{Vol}(B^n) \text{Vol}_g(M)}{(2\pi)^n} \quad \text{se } \Lambda \rightarrow +\infty,$$

dove $\text{Vol}_g(M) := \int_M d\nu^{(g)}$ mentre B^n è la palla unitaria in \mathbb{R}^n .

(c) L'insieme degli autovettori, scelti con norma unitaria $\{\phi_{\lambda,\alpha}\}_{\lambda \in \sigma_p(\Delta), \alpha=1, \dots, d_\lambda}$ individua una base hilbertiana di $L^2(M; d\nu^{(M,g)})$. \diamond

Dunque, nel senso della convergenza di tale spazio di Hilbert, se $f \in L^2(D; d^n x)$ vale:

$$f = \sum_{\lambda \in \sigma_p(\Delta)} \sum_{\alpha=1}^{d_\lambda} f_{\lambda,\alpha} \phi_{\lambda,\alpha} \quad \text{dove} \quad f_{\lambda,\alpha} := (f_{\lambda,\alpha}|f) = \int_M \overline{\phi_{\lambda,\alpha}(p)} f(p) d\nu^{(M,g)}(p). \quad (7.13)$$

I coefficienti $f_{\lambda,\alpha}$ sono i **coefficienti di Fourier** (generalizzati) di f rispetto alla base hilbertiana dei vettori $\phi_{\lambda,\alpha}$.

Osservazioni 7.3.

(1) Le autofunzioni $\phi_{\lambda,\alpha}$ con $\lambda \neq 0$ si annullano al più su sottoinsiemi di M che non contengono punti interni come nel caso elementare discusso nella sezione precedente (e la prova è la stessa se si lavora in coordinate locali).

(2) Il fatto che $\{\phi_{\lambda,\alpha}\}_{\lambda \in \sigma_p(\Delta), \alpha=1, \dots, d_\lambda} \subset \mathcal{D}_M$ sia una base hilbertiana di $L^2(M, d\nu^{(M,g)})$ implica immediatamente che \mathcal{D}_M sia denso in $L^2(M, d\nu^{(M,g)})$ nella topologia metrica di quest'ultimo. Partendo da questo fatto è possibile provare che $\Delta^{(M,g)}$ definito su \mathcal{D}_M , pensato come sottospazio denso di $L^2(M, d\nu^{(M,g)})$, goda della proprietà di essere *essenzialmente autoaggiunto* [Mo10].

(3) Dalla prima parte di (b) segue che le funzioni armoniche complesse su M , cioè le funzioni $\phi \in C^2(M; \mathbb{C})$ che soddisfano $\Delta^{(M,g)}\phi = 0$ ovunque su M formano uno spazio vettoriale di dimensione finita: questo spazio vettoriale coincide con l'autospazio di $\Delta^{(M,g)}$ con autovalore nullo.

(4) Si dimostra facilmente, usando il teorema A.2, che ogni autovalore di $\Delta^{(M,g)}$ è in realtà una funzione $C^\infty(M; \mathbb{C})$ nelle nostre ipotesi su M e g .

7.1.3 Soluzione dell'equazione di D'Alembert con condizioni di Dirichlet tramite l'analisi spettrale: un caso semplificato.

Basandoci su quanto ottenuto nella sezione precedente, vogliamo cercare di scrivere la soluzione della (7.1) per assegnati dati iniziali (7.3) e quando siano soddisfatte le condizioni al bordo (7.2) partendo da uno sviluppo della forma (7.8). Il punto cruciale è che lo sviluppo detto assicura automaticamente – *purchè la serie converga puntualmente* – che la soluzione soddisfi le condizioni al bordo di annullamento.

Lavoreremo con la seguente ipotesi semplificatrice: la funzione sorgente $S \in C^0(\overline{D}; \mathbb{C})$ in (7.1) e le condizioni iniziali $\phi_0 \in C^1(\overline{D}; \mathbb{C})$ e $\phi_1 \in C^0(\overline{D}; \mathbb{C})$ in (7.3) sono assunte ammettere sviluppi (7.8) che contengono solo un *numero finito* di addendi, indipendente da t nel caso della funzione sorgente S .

Teorema 7.1. *Nelle ipotesi fatte inizialmente su D , si consideri l'equazione (7.1) per gli assegnati dati iniziali (7.3) e quando siano soddisfatte le condizioni al bordo (7.2). Se la funzione sorgente $S \in C^0(\overline{D}; \mathbb{C})$ e le condizioni iniziali $\phi_0 \in C^1(\overline{D}; \mathbb{C})$ e $\phi_1 \in C^0(\overline{D}; \mathbb{C})$ ammettono sviluppi di Fourier (7.8) che contengono solo un numero finito di addendi (indipendente da t per la funzione S), allora la soluzione esiste in $C^2(\mathbb{R} \times \overline{D}; \mathbb{C})$ ed è unica.*

Tale soluzione si esprime come:

$$u(t, \mathbf{x}) = \sum_{\lambda, \alpha} u_{\lambda, \alpha}(t) \phi_{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}), \quad (7.14)$$

dove le $\phi_{\lambda, \alpha}$ formano una base hilbertiana di autofunzioni di Δ su \mathcal{D} e le funzioni $u_{\lambda, \alpha} = u_{\lambda, \alpha}(t)$ sono le soluzioni dei corrispondenti problemi di Cauchy alle derivate ordinarie:

$$\frac{d^2 u_{\lambda, \alpha}}{dt^2} - v^2 \lambda u_{\lambda, \alpha} = -v^2 S_{\lambda, \alpha}(t), \quad u_{\lambda, \alpha}(0) = u_{\lambda, \alpha}^{(0)}, \quad \frac{du_{\lambda, \alpha}}{dt}(0) = u_{\lambda, \alpha}^{(1)}. \quad (7.15)$$

in cui i coefficienti $u_{\lambda, \alpha}^{(0)}$, $u_{\lambda, \alpha}^{(1)}$ sono i coefficienti di Fourier, rispetto alla base hilbertiana suddetta, delle condizioni iniziali u_0 e u_1 rispettivamente e, analogamente:

$$S_{\lambda, \alpha}(t) = \int_{\overline{D}} \overline{\phi_{\lambda, \alpha}}(\mathbf{x}) S(t, \mathbf{x}) d^n x. \quad (7.16)$$

◇

Dimostrazione. Assumendo che il problema ammetta una soluzione, partiamo dallo sviluppo della soluzione u . Si osservi che dato che $u \in C^0(\overline{D}; \mathbb{C})$ e che \overline{D} ha misura finita di Lebesgue, allora $u \in L^2(D, d^n x)$ e pertanto ha senso uno sviluppo del tipo (7.8), quindi nel senso della topologia hilbertiana, per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$u(t, \mathbf{x}) = \sum_{\lambda, \alpha} u_{\lambda, \alpha}(t) \phi_{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}). \quad (7.17)$$

Le condizioni iniziali impongono che, per ogni $\mathbf{x} \in \bar{D}$ valgano:

$$u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) \quad \text{insieme a} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}).$$

Ne consegue, moltiplicando la prima identità per $\phi_{\lambda, \alpha}$ ed integrando, che:

$$u_{\lambda, \alpha}(0) = u_{\lambda, \alpha}^{(0)},$$

dove i numeri $u_{\lambda, \alpha}^{(0)}$ sono quelli che appaiono nello sviluppo di Fourier (finito per ipotesi) della condizione iniziale u_0 :

$$u_0(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda, \alpha} u_{\lambda, \alpha}^{(0)} \phi_{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}). \quad (7.18)$$

Se assumiamo di poter passare la derivata temporale sotto il segno di serie nello sviluppo di u (7.17) (che a priori sappiamo essere solo nel senso di L^2 per ogni fissato t), la seconda condizione iniziale ci dice che:

$$\frac{du_{\lambda, \alpha}}{dt}(0) = u_{\lambda, \alpha}^{(1)},$$

dove i numeri $u_{\lambda, \alpha}^{(1)}$ sono quelli che appaiono nello sviluppo di Fourier (finito per ipotesi) della condizione iniziale u_1 :

$$u_1(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda, \alpha} u_{\lambda, \alpha}^{(1)} \phi_{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}). \quad (7.19)$$

Consideriamo ora lo sviluppo di Fourier (per ipotesi finito) della sorgente

$$S(t, x) = \sum_{\lambda, \alpha} S_{\lambda, \alpha}(t) \phi_{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}). \quad (7.20)$$

Le funzioni $S_{\lambda, \alpha} = S_{\lambda, \alpha}(t)$ sono funzioni continue. Ciò segue facilmente dal teorema della convergenza dominata, dato che tali funzioni sono ottenute come:

$$S_{\lambda, \alpha}(t) = \int_{\bar{D}} \overline{\phi_{\lambda, \alpha}}(\mathbf{x}) S(t, \mathbf{x}) d^n x,$$

in cui $S \in C^0(\mathbb{R} \times \bar{D}; \mathbb{C})$, \bar{D} ha misura finita e le funzioni $\overline{\phi_{\lambda, \alpha}}$ sono continue.

Se assumiamo di poter passare tutte le derivate fino al secondo ordine sotto il segno di somma in (7.17), l'equazione (7.1) diventa:

$$\sum_{\lambda, \alpha} \left(-\frac{1}{v^2} \frac{d^2 u_{\lambda, \alpha}}{dt^2} + \lambda u_{\lambda, \alpha} \right) \phi_{\lambda, \alpha} = \sum_{\lambda, \alpha} S_{\lambda, \alpha} \phi_{\lambda, \alpha}$$

e cioè

$$\sum_{\lambda, \alpha} \left(-\frac{1}{v^2} \frac{d^2 u_{\lambda, \alpha}}{dt^2} + \lambda u_{\lambda, \alpha} - S_{\lambda, \alpha} \right) \phi_{\lambda, \alpha} = 0.$$

Consideriamo allora il set infinito di equazioni differenziali:

$$\frac{d^2 u_{\lambda,\alpha}}{dt^2} - v^2 \lambda u_{\lambda,\alpha} = -v^2 S_{\lambda,\alpha}(t), \quad u_{\lambda,\alpha}(0) = u_{\lambda,\alpha}^{(0)}, \quad \frac{du_{\lambda,\alpha}}{dt}(0) = u_{\lambda,\alpha}^{(1)}.$$

Osserviamo che ognuna di queste equazioni ammette una ed una sola soluzione definita su tutto l'asse reale, dato che si tratta di un'equazione lineare del secondo ordine, in forma normale, non omogenea a coefficienti costanti, con termine noto continuo. Inoltre solo un numero *finito* di esse ha soluzione differente dalla funzione identicamente nulla, dato che solo un numero finito di funzioni $S_{\lambda,\alpha}$ e dati iniziali sono non nulli.

Se indichiamo con $U_{\lambda,\alpha} = U_{\lambda,\alpha}(t)$ le soluzioni delle equazioni suddette, la funzione:

$$U(t, x) := \sum_{\lambda,\alpha} U_{\lambda,\alpha}(t) \phi_{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}),$$

è ben definita, dato che la somma è finita, soddisfa l'equazione differenziale, le condizioni iniziali e le condizioni al bordo (in particolare perché le ipotesi fatte di poter passare le derivate sotto il segno di sono sempre soddisfatte essendo la somma finita). Essa è pertanto una soluzione della (7.1) con gli assegnati dati iniziali (7.3) che rispetta le condizioni al bordo (7.2). In base al teorema 5.1, questa è anche l'unica soluzione del problema posto. \square

Osservazioni 7.4.

(1) Il risultato trovato per la forma della soluzione funziona nelle ipotesi di sviluppi di Fourier contenente un numero finito di termini, per la sorgente e per le condizioni iniziali. Tuttavia, con opportune ipotesi, la procedura può essere estesa al caso generale, anche quando questi sviluppi non sono finiti [V184]. Tuttavia questa generalizzazione utilizza strumenti matematici (teoria delle distribuzioni) che escono dalla portata di questo corso elementare.

(2) In realtà abbiamo già trovato lo sviluppo (7.14) studiando il problema di Dirichlet sul segmento. Infatti, lo sviluppo (6.64) della soluzione dell'equazione di D'Alembert sul segmento con condizioni di Dirichlet non è altro che lo sviluppo (7.14) specializzato a tale situazione quando la sorgente S è identicamente nulla. Come già osservato le autofunzioni ϕ_λ sono, in quel caso, date dai sinusoidi $\sin(n\pi x/L)$ moltiplicati per il coefficiente di normalizzazione $1/\sqrt{2L}$. In (6.64), però, lo sviluppo di Fourier generalizzato sussiste *anche quando il numero di termini nello sviluppo è infinito* come abbiamo visto nel capitolo precedente.

La soluzione generale dell'equazione:

$$\frac{d^2 u_{\lambda,\alpha}}{dt^2} - v^2 \lambda u_{\lambda,\alpha} = -v^2 S_{\lambda,\alpha}(t)$$

è come ben noto data dalla somma della soluzione generale dell'equazione omogenea più una soluzione particolare dell'equazione di sopra. La soluzione generale dell'omogenea che, dal punto di vista fisico, corrisponde all'assenza di sorgente, o più debolmente all'assenza della funzione $S_{\lambda,\alpha}$, ha la forma:

$$u_{\lambda,\alpha}(t) = u_{\lambda,\alpha}^{(+)} e^{i2\pi\nu_\lambda t} + u_{\lambda,\alpha}^{(-)} e^{-i2\pi\nu_\lambda t}, \quad (7.21)$$

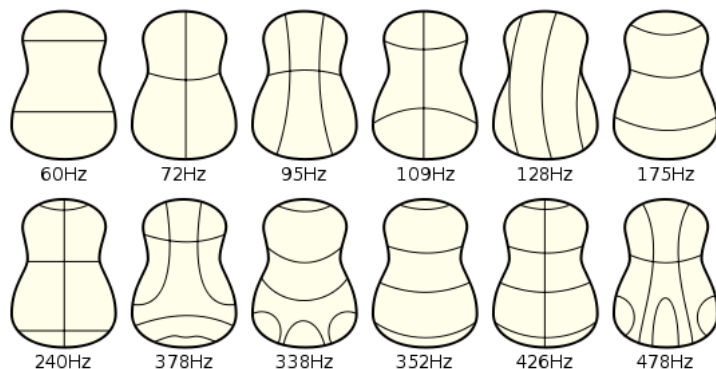


Figura 7.1: Modi di oscillazione di una faccia della chitarra individuati dalle linee nodali. Le frequenze in Hz sono le frequenze di risonanza dei modi normali con le linee nodali disegnate.

dove $u_{\lambda,\alpha}^{(\pm)} \in \mathbb{C}$ sono coefficienti arbitrari e i numeri strettamente positivi:

$$\nu_\lambda := \frac{v\sqrt{-\lambda}}{2\pi}, \quad (7.22)$$

sono detti **frequenze di risonanza** o **frequenze proprie** del sistema descritto dall'equazione di D'Alembert. Ad ognuna di tali funzioni corrisponde una soluzione dell'equazione di D'Alembert in $\mathbb{R} \times \overline{D}$, senza sorgente e con condizioni di Dirichlet:

$$u_{\lambda,\alpha}(t, \mathbf{x}) = \left(u_{\lambda,\alpha}^{(+)} e^{ic\sqrt{-\lambda}t} + u_{\lambda,\alpha}^{(-)} e^{-ic\sqrt{-\lambda}t} \right) \phi_{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}), \quad (7.23)$$

Queste soluzioni sono dette **modi normali di oscillazione** o **onde stazionarie** del sistema. Ogni autofunzione $\phi_{\lambda,\alpha}$ si annulla su superfici di dimensione $n - 1$ dette **superfici nodali**. Nel caso di una membrana oscillante, tali superfici sono dunque delle curve, le **curve nodali**. Nel caso di una corda vibrante si tratta di singoli punti: i *odi* che abbiamo già visto. Su questi sottoinsiemi di D le onde stazionarie sono sempre nulle. È possibile visualizzare sperimentalmente queste linee nodali nel caso di membrane vibranti. Riferendosi alle linee nodali si riescono ad identificare e distinguere, nella pratica sperimentale, i modi normali di un sistema.

7.1.4 Membrana rettangolare e membrana circolare.

Prendiamo ora in considerazione due situazioni bidimensionali nelle quali possiamo esemplificare la teoria precedentemente sviluppata: l'equazione di D'Alembert per le deformazioni trasversali di una membrana, piana a riposo, rettangolare o circolare, imponendo l'annullarsi della deformazione sul bordo di essa. Dal punto di vista fisico queste due membrane possono pensarsi come le membrane di tamburi. Diamo esplicitamente la forma delle autofunzioni, degli autovalori dell'operatore di Laplace e delle frequenze di risonanza.

Membrana rettangolare.

Nel caso della membrana rettangolare, di lati L_1 e L_2 , autofunzioni dell'operatore di Laplace

sono date dalle funzioni con norma unitaria:

$$\phi_{n,m}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4L_1L_2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right)$$

l'autovalore corrispondente è:

$$\lambda_{n,m} = - \left[\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2 \right], \quad n, m = 1, 2, 3, \dots$$

La verifica di tali fatti è immediata tenendo conto del fatto che:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Si può provare che questa classe di autofunzioni determina una base hilbertiana dello spazio di Hilbert $L^2([0, L_1] \times [0, L_2], dx dy)$. Dalla teoria spettrale [Mo10], il fatto che le autofunzioni trovate formino una base hilbertiana implica automaticamente che non ci possono essere altri autovalori del laplaciano (con le condizioni al bordo dette) oltre a quelli menzionati sopra.

Le frequenze di risonanza per piccole deformazioni di una membrana rettangolare di lati L_1 e L_2 sono dunque date da:

$$\nu_{n,m} = \frac{v}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2}, \quad n, m = 1, 2, 3, \dots \quad (7.24)$$

Membrana circolare.

Passiamo a considerare il caso di una membrana circolare di raggio $r_0 > 0$. In questo caso conviene lavorare in coordinate polari piane θ, r . In queste coordinate l'operatore di Laplace si scrive:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}. \quad (7.25)$$

Vista la simmetria del sistema, conviene cercare autofunzioni della forma: $\phi(\theta, r) = \Theta(\theta)R(r)$, dove la funzione di θ deve "chiudersi" dopo un giro completo, cioè deve avere periodo 2π o un multiplo intero di tale numero. L'equazione agli autovalori,

$$\Delta\phi = \lambda\phi,$$

si scrive, tenendo conto della (7.25):

$$R(r) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} + r \Theta(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} = \lambda \Theta(\theta) R(r),$$

da cui, nei punti in cui $\Theta(\theta)R(r) \neq 0$:

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} = \lambda r^2 - \frac{r^3}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r}.$$

Dato che il primo membro è solo funzione di θ mentre il secondo è solo funzione di r , concludiamo che deve essere, per qualche costante μ :

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2} = \mu, \quad \lambda r^2 - \frac{r^3}{R(r)} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} = \mu.$$

La prima equazione ammette soluzione:

$$\Theta(\theta) = Ce^{\sqrt{\mu}\theta} + C'e^{-\sqrt{\mu}\theta}.$$

Dato che tale funzione deve essere periodica con periodo 2π o un multiplo di esso, concludiamo che deve essere:

$$\mu = -n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e quindi:

$$\phi(\theta, r) = e^{in\theta} R(r), \quad n \in \mathbb{Z},$$

dove la funzione R soddisfa:

$$\lambda r^2 R(r) - r^3 \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} = -n^2 R(r)$$

cioè:

$$r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + r \frac{dR(r)}{dr} + (-\lambda r^2 - n^2) R(r) = 0.$$

Ricordando che $\lambda < 0$ per la proposizione 7.1 e definendo $\rho := \sqrt{-\lambda}r$, concludiamo che la funzione $R(\rho/\sqrt{-\lambda})$ soddisfa l'**equazione di Bessel**:

$$\rho^2 \frac{d^2 R(\rho/\sqrt{-\lambda})}{d\rho^2} + \rho \frac{dR(\rho/\sqrt{-\lambda})}{d\rho} + (\rho^2 - n^2) R(\rho/\sqrt{-\lambda}) = 0. \quad (7.26)$$

Le soluzioni di questa equazione sono ben note e sono tutte della forma:

$$R(\rho/\sqrt{-\lambda}) = AJ_n(\rho) + BY_n(\rho)$$

dove J_n e Y_n , per $n = 0, 1, 2, \dots$ sono le **funzioni di Bessel** di ordine n di **prima** e **seconda specie**:

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\tau - x \sin \tau) d\tau,$$

$$Y_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(n\tau - x \sin \tau) d\tau - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [e^{nt} + (-1)^n e^{-nt}] e^{-x \sinh t} dt.$$

Le funzioni Y_n sono singolari per $x = 0$ dove divergono (per il secondo integrale nella definizione di Y_n), mentre noi cerchiamo funzioni ovunque regolari perchè le autofunzioni devono appartenere a \mathcal{D} . Le funzioni J_n sono invece $C^\infty(\mathbb{R})$. Pertanto, tornando nella variabile r , rimaniamo con:

$$R(r) = AJ_n(r\sqrt{-\lambda}).$$

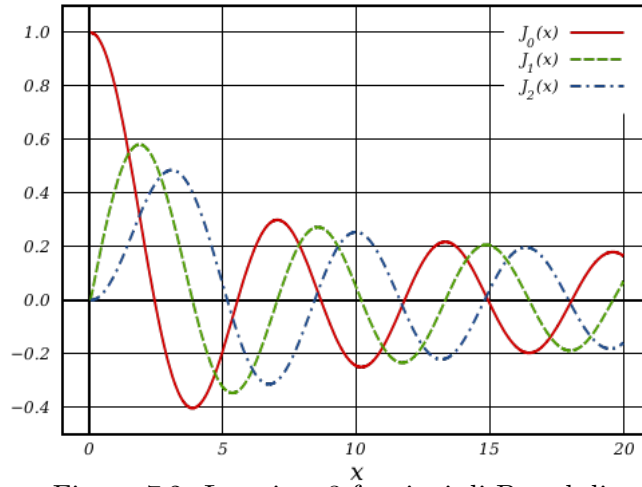


Figura 7.2: Le prime 3 funzioni di Bessel di primo tipo.

Dobbiamo infine imporre che siano soddisfatte le condizioni di annullamento al bordo per le autofunzioni $\Theta(\theta)R(r_0) = 0$. Dunque, per $n = 0, 1, 2, \dots$ fissato, deve valere:

$$J_n(r_0/\sqrt{-\lambda}) = 0 \quad (7.27)$$

La funzione $J_n = J_n(x)$ ha infiniti zeri non nulli in $(0, +\infty)$ (dato che oscilla attorno all'asse x come un sinusoido smorzato). Indichiamo tali soluzioni con x_{nm} , dove $m = 1, 2, \dots$ ed abbiamo scelto la loro numerazione in modo tale che $x_{n,m+1} > x_{n,m}$. Per ogni n deve dunque essere $r_0 = \sqrt{-\lambda_{nm}} x_{nm}$ ossia:

$$\lambda_{n,m} := -\left(\frac{r_0}{x_{nm}}\right)^2, \quad n = 0, 1, \dots \quad m = 1, 2, \dots \quad (7.28)$$

Questa identità determina possibili autovalori per il laplaciano con condizioni di annullamento al bordo del disco di raggio r_0 . In definitiva un set di autofunzioni, con corrispondenti autovalori (7.28), è dato da:

$$\phi_{n,m}(\theta, r) = C_{nm} J_n\left(\frac{r}{\sqrt{-\lambda_{n,m}}}\right) e^{i2\pi n\theta}, \quad n = 0, 1, \dots \quad m = 1, 2, \dots \quad (7.29)$$

il coefficiente C_{nm} viene calcolato imponendo che la norma L^2 dell'autofunzione sia unitaria. Si riesce a dimostrare che effettivamente le autofunzioni trovate formano una base hilbertiana di $L^2(D, dxdy)$ dove D è il disco di raggio r_0 . Dalla teoria spettrale questo fatto implica automaticamente che non ci possono essere altri autovalori del laplaciano (con le condizioni al bordo dette) oltre a quelli determinati dalla (7.28) (e associati a questa base hilbertiana).

Le frequenze di risonanza di una membrana circolare di raggio r_0 sono dunque date da:

$$\nu_{n,m} = \frac{v}{2\pi} \frac{r_0}{x_{nm}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad m = 1, 2, \dots \quad (7.30)$$

dove x_{nm} è l' m -esimo zero non nullo di J_n in $(0, +\infty)$.

Osservazioni 7.5. Le frequenze di risonanza di una corda ad estremi fissati hanno forma $cn/(2L)$, per cui sono tutte un multiplo intero della frequenza più bassa $c/(2L)$. Per le membrane oscillanti è invece falso che esista una frequenza di valore minimo di cui tutte le altre

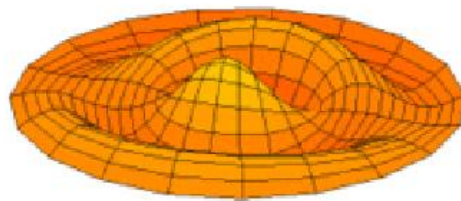


Figura 7.3: Il modo corrispondente alla frequenza di risonanza $\nu_{1,3}$ della membrana circolare vibrante.

siano multipli interi di essa. Questo fatto, è ciò che distingue il suono degli strumenti musicali a percussione, come i tamburi, da quelli a corde come il pianoforte, l'arpa, la chitarra, gli strumenti della famiglia del violino. Gli strumenti a fiato hanno comunque un suono con le stesse caratteristiche di quelli a corde in cui tutte le frequenze di risonanza sono in multiplo intero della più bassa. I musicisti dicono per illustrare questo fatto che il suono prodotto da alcuni strumenti a percussione², come il tamburo, non è *armonico* al contrario di quello prodotto dagli strumenti a corde ed a fiato che lo è.

7.1.5 Fenomeni di smorzamento e risonanza in risuonatori forzati.

Consideriamo il solito sistema oscillante descritto dalla funzione u che soddisfa l'equazione di D'Alembert nel dominio D con condizioni di annullamento al bordo. Nelle situazioni reali le oscillazioni del sistema sono smorzate da fenomeni fisici dissipativi, dovuti ad attriti interni ed esterni. Il modo più semplice di tenerne conto è quello di modificare l'equazione di D'Alembert aggiungendo a primo membro un termine dissipativo $\gamma \frac{\partial u}{\partial t}$ con $\gamma > 0$ che simula un processo di attrito (viscoso) dovuto all'esterno, dove $\gamma > 0$ è una costante tanto più grande quanto i processi di attrito esterno sono rilevanti. Per tenere conto dei processi di attrito interno al sistema (forze dissipative interne alla corda o alla membrana), nel caso più semplice, bisogna aggiungere un ulteriore termine, sempre a primo membro, della forma $-\Gamma \frac{\partial \Delta u}{\partial t}$ dove, $\Gamma > 0$ è una costante tanto più grande quanto i processi di attrito interno sono rilevanti.

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta_{\mathbf{x}} u + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} - \Gamma \frac{\partial \Delta u}{\partial t} = S(t, \mathbf{x}). \quad (7.31)$$

Si osservi che l'equazione è ora del terzo ordine, tuttavia si riesce a dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione 7.5. *Se, nelle ipotesi iniziali su $D \subset \mathbb{R}^n$, esiste una soluzione di (7.31) $u \in C^3(\mathbb{R} \times \bar{D}; \mathbb{C})$ allora è unica, per $t \geq 0$, per fissati dati iniziali $u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x})$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(0, \mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x})$*

²Tuttavia, alcuni strumenti a percussione come lo xilofono producono suoni armonici.

e fissata S , rispettivamente di classe $C^2(\overline{D}; \mathbb{C})$, $C^1(\overline{D}; \mathbb{C})$ e $C^0(\mathbb{R} \times \overline{D}; \mathbb{C})$. \diamond

Dimostrazione. Consideriamo due soluzioni e sia φ la differenza di esse. Definendo la densità di energia E di tale funzione come in (5.15) (o (5.14) nel caso reale) con $\mu = 0$ e $c = v$, una dimostrazione strettamente analoga a quella che porta alla (5.19) produce ora, tenendo conto della nuova forma dell'equazione (7.31), in cui per φ , si deve omettere il termine di sorgente, si ha:

$$\int_D E(\mathbf{x}, T) d^n x = -\gamma \int_0^T \int_D \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 d^n x dt - \Gamma \int_0^T \int_D \left\| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|^2 d^n x dt,$$

dove $T > 0$. Sopra abbiamo usato il teorema della divergenza e quindi trascurato alcuni integrali valutati su ∂D che si annullano in conseguenza del fatto che φ e la sua derivata temporale sono nulle su ∂D . Concludiamo che:

$$\int_D E(\mathbf{x}, T) d^n x \leq 0.$$

D'altra parte, dato che vale $E \geq 0$ l'integrale di sopra dovrà essere nullo per ogni $T > 0$. Come nella dimostrazione del teorema 5.1, questo implica che $\varphi = 0$ ovunque e dunque le due soluzioni coincidono. \square

Tenuto conto della proposizione precedente, in modo essenzialmente identico a quanto fatto nella dimostrazione del teorema 7.1 riducendosi ad un numero finito di gradi di libertà, si può provare il teorema seguente.

Teorema 7.2. *Nelle ipotesi fatte inizialmente su D , si consideri l'equazione (7.31) per $u \in C^3(\mathbb{R} \times \overline{D}; \mathbb{C})$, con $v, \gamma, \Gamma > 0$ costanti note, per gli assegnati dati iniziali (7.3) insieme alla funzione S e quando siano soddisfatte le condizioni al bordo (7.2). Se la funzione sorgente $S \in C^0(\overline{D}; \mathbb{C})$ e le condizioni iniziali $\phi_0 \in C^1(\overline{D}; \mathbb{C})$ e $\phi_1 \in C^0(\overline{D}; \mathbb{C})$ ammettono sviluppi di Fourier (7.8) che contengono solo un numero finito di addendi (indipendente da t per la funzione S), allora la soluzione esiste in $C^2(\mathbb{R} \times \overline{D}; \mathbb{C})$ ed è unica per $t \geq 0$.*

Tale soluzione si esprime come:

$$u(t, \mathbf{x}) = \sum_{\lambda, \alpha} u_{\lambda, \alpha}(t) \phi_{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}), \quad (7.32)$$

dove le $\phi_{\lambda, \alpha}$ formano una base hilbertiana di autofunzioni di Δ su \mathcal{D} e le funzioni $u_{\lambda, \alpha} = u_{\lambda, \alpha}(t)$ sono le soluzioni dei corrispondenti problemi di Cauchy alle derivate ordinarie:

$$\frac{d^2 u_{\lambda, \alpha}}{dt^2} - v^2 \lambda u_{\lambda, \alpha} + \gamma \lambda \frac{du_{\lambda, \alpha}}{dt} = -v^2 S_{\lambda, \alpha}(t), \quad u_{\lambda, \alpha}(0) = u_{\lambda, \alpha}^{(0)}, \quad \frac{du_{\lambda, \alpha}}{dt}(0) = u_{\lambda, \alpha}^{(1)}. \quad (7.33)$$

dove

$$\gamma_\lambda := \gamma + \lambda \Gamma, \quad (7.34)$$

e in cui i coefficienti $u_{\lambda, \alpha}^{(0)}$, $u_{\lambda, \alpha}^{(1)}$ sono i coefficienti di Fourier, rispetto alla base hilbertiana suddetta, delle condizioni iniziali u_0 e u_1 rispettivamente e, analogamente:

$$S_{\lambda, \alpha}(t) = \int_D \overline{\phi_{\lambda, \alpha}(\mathbf{x})} S(t, \mathbf{x}) d^n x. \quad (7.35)$$

◇

In riferimento al teorema 7.2 studiamo il caso in cui la sorgente che forza il sistema oscillante abbia periodo temporale $T = 2\pi/f$ per qualche $f > 0$ e che tale periodo sia indipendente da \mathbf{x} . Per esempio la sorgente può corrispondere alla componente verticale di una densità forza che agisce su una corda orizzontale in oscillazione trasversale, oppure la componente verticale di una densità forza che agisce su una membrana orizzontale in oscillazione trasversale. Possiamo decomporre S usando la serie di Fourier, a \mathbf{x} fisso:

$$S(t, \mathbf{x}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_k(\mathbf{x}) e^{i2\pi k f t} . \quad (7.36)$$

Come sappiamo la convergenza della serie di sopra è, in generale, solo nel senso di $L^2([0, 2\pi/f], dt)$. Tuttavia, se la funzione S è abbastanza regolare, come provato nel capitolo precedente, la convergenza è puntuale. Noi assumeremo ancora più fortemente che si possano trascurare quasi tutti i termini dello sviluppo eccetto una quantità finita, per cui la serie di sopra si deve pensare come una somma su un numero finito di termini: solo un numero finito di funzioni S_k saranno assunte essere non identicamente nulle. In realtà quanto diremo si può ottenere anche lasciando cadere l'ipotesi di un numero finito di termini, purchè la serie converga uniformemente ed abbastanza rapidamente. In molti casi fisicamente realizzabili, le ampiezze S_k si annullano così velocemente al crescere di k che possiamo approssimare la serie con una somma finita. È questo il caso della sollecitazione S , la forza agente sulla cassa armonica di uno strumento a corde, provocate dall'oscillazione delle corde dello strumento. In questo caso S è reale e pertanto nello sviluppo (7.36) dovrà accadere che $S_k = \overline{S_{-k}}$ in modo tale che si annullino le parti immaginarie dei vari termini. La serie (7.36), in questo caso si potrebbe scrivere in termini di seni e coseni con coefficienti reali, tuttavia noi continueremo ad usare il formalismo complesso perché è più pratico da adoperare.

Nelle ipotesi del teorema 7.2, vogliamo ora studiare la soluzione l'equazione (7.31) con funzione sorgente, temporalmente periodica, che ammette lo sviluppo di sopra. Tale soluzione si esprime come:

$$u(t, \mathbf{x}) = \sum_{\lambda, \alpha} u_{\lambda, \alpha}(t) \phi_{\lambda \alpha}(\mathbf{x}) ,$$

dove le $\phi_{\lambda, \alpha}$ sono la solita base hilbertiana di autofunzioni di Δ su \mathcal{D} e le $u_{\lambda, \alpha}$ sono le soluzioni delle corrispondenti equazioni differenziali:

$$\frac{d^2 u_{\lambda, \alpha}}{dt^2} + \gamma_\lambda \frac{du_{\lambda, \alpha}}{dt} + (2\pi\nu_\lambda)^2 u_{\lambda, \alpha} = -v^2 S_{\lambda, \alpha}(t) , \quad (7.37)$$

dove abbiamo tenuto conto della definizione delle frequenze di risonanza (7.22). Se definiamo

$$\Omega_\lambda := \sqrt{(2\pi\nu_\lambda)^2 - \frac{\gamma_\lambda^2}{4}} , \quad (7.38)$$

la soluzione generale dell'omogenea associata alla (7.37) è, per ogni scelta dei numeri $U_{\lambda,\alpha}^{(\pm)} \in \mathbb{C}$:

$$e^{-\gamma\lambda t/2} \left(U_{\lambda,\alpha}^{(+)} e^{i\Omega_\lambda t} + U_{\lambda,\alpha}^{(-)} e^{-i\Omega_\lambda t} \right). \quad (7.39)$$

Una soluzione particolare della (7.37) si può trovare supponendo euristicamente che abbia la forma, dove i termini della somma non nulli sono assunti essere in numero finito:

$$u_{\lambda,\alpha}^{(1)}(t) = \sum_k U_k e^{i2\pi k f t},$$

tenendo conto che, da (7.36),

$$S_{\lambda,\alpha}(t) = \sum_k S_{\lambda,\alpha,k} e^{i2\pi k f t}. \quad (7.40)$$

in cui la somma è in realtà eseguita solo su un numero finito di termini non nulli e:

$$S_{\lambda,\alpha,k} := \int_D \overline{\phi_{\lambda,\alpha}(\mathbf{x})} S_k(\mathbf{x}) d^n x. \quad (7.41)$$

Inserendo questi sviluppi nella (7.37), tale equazione si può riscrivere, tenendo conto della (7.36):

$$\sum_k \left((-2\pi k f)^2 + i\gamma 2\pi\nu_\lambda + (2\pi\nu_\lambda)^2 \right) U_k + S_{\lambda,\alpha,k} e^{i2\pi k f t} = 0, \quad (7.42)$$

da cui:

$$U_k := \frac{S_{\lambda,\alpha,k}}{(2\pi k f)^2 - (2\pi\nu_\lambda)^2 - i\gamma 2\pi\nu_\lambda}.$$

Quindi possiamo concludere che la soluzione generale della (7.37) ha la forma:

$$u_{\lambda,\alpha}(t) = e^{-\gamma\lambda t/2} \left(U_{\lambda,\alpha}^{(+)} e^{i\Omega_\lambda t} + U_{\lambda,\alpha}^{(-)} e^{-i\Omega_\lambda t} \right) + \sum_k \frac{S_{\lambda,\alpha,k} e^{i2\pi k f t}}{(2\pi k f)^2 - (2\pi\nu_\lambda)^2 - i\gamma 2\pi\nu_\lambda} \quad (7.43)$$

dove $U_{\lambda,\alpha}^{(\pm)} \in \mathbb{C}$ sono individuati dalle condizioni iniziali e Ω_j è definito dalla (7.38). Dalla forma di Ω_λ segue subito che $\gamma_\lambda/2 > |\Omega_\lambda|$ (tenendo conto del fatto che ogni ν_λ è strettamente positiva come provato precedentemente) e pertanto il primo addendo a secondo membro della (7.43) si annulla per $t \rightarrow +\infty$. Questo significa che, in presenza di dissipazione comunque piccola, dopo un certo tempo di la soluzione si stabilizza nella forma asintotica:

$$u_{\lambda,\alpha}^{(\infty)}(t) = \sum_k \frac{S_{\lambda,\alpha,k} e^{i2\pi k f t}}{(2\pi k f)^2 - (2\pi\nu_\lambda)^2 - i\gamma_\lambda 2\pi\nu_\lambda}, \quad (7.44)$$

indipendentemente dalle condizioni iniziali.

L'espressione finale per la funzione u sarà di conseguenza, a grandi tempi (una stima è data dal tempo $\tau_\lambda := 1/\gamma_\lambda$):

$$u^{(\infty)}(t, \mathbf{x}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} U_k(\mathbf{x}) e^{i2\pi k f t},$$

dove, ovviamente:

$$U_k(\mathbf{x}) := \sum_{\lambda \in \sigma_p(\Delta), \alpha=1, \dots, d_\lambda} \frac{S_{\lambda, \alpha, k} \phi_{\lambda, \alpha}(\mathbf{x})}{(2\pi k f)^2 - (2\pi \nu_\lambda)^2 - i\gamma 2\pi \nu_\lambda}. \quad (7.45)$$

Nel caso in cui u e S siano reali vale $U_k = \overline{U_{-k}}$, possiamo allora raccogliere i termini relativi a k e $-k$ nell'espressione trovata per $u^{(\infty)}(t, \mathbf{x})$ ottenendo alla fine, facendo uso della formula di Eulero:

$$u^{(\infty)}(t, \mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{+\infty} B_k(\mathbf{x}) \sin(2\pi k f t + \epsilon_k(\mathbf{x})), \quad (7.46)$$

dove: $B_0(\mathbf{x}) = U_0(\mathbf{x})$, $\epsilon_0(\mathbf{x}) = \pi/2$ e, se $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$B_k(\mathbf{x}) := 2|U_k| = 2 \left| \sum_{\lambda \in \sigma_p(\Delta), \alpha=1, \dots, d_\lambda} \frac{S_{\lambda, \alpha, k} \phi_{\lambda, \alpha}(\mathbf{x})}{(2\pi k f)^2 - (2\pi \nu_\lambda)^2 - i\gamma 2\pi \nu_\lambda} \right|, \quad (7.47)$$

e $\epsilon_k(\mathbf{x})$ è completamente determinato dalle richieste:

$$B_k(\mathbf{x}) \cos \epsilon_k(\mathbf{x}) = 2\operatorname{Re}U_k(\mathbf{x}), \quad B_k(\mathbf{x}) \sin \epsilon_k(\mathbf{x}) = 2\operatorname{Im}U_k(\mathbf{x}). \quad (7.48)$$

Al solito, nelle nostre ipotesi generali, solo un numero finito di termini in tutt le nelle somme, apparentemente infinite di sopra, è non nullo.

L'espressione trovata per la soluzione a grandi tempi (in realtà tempi molto brevi in sistemi fisici concreti), mostra che nella soluzione finale si ritrova lo stesso spettro di frequenze della sorgente che forza il sistema e che in tal modo lo "pilota". Nell'andamento temporale a grandi tempi la memoria delle frequenze di risonanza ν_λ del sistema oscillante è completamente cancellata. Tuttavia ne rimane traccia nelle ampiezze dei singoli modi di oscillazione. Consideriamo infatti la (7.45). Se, variando f , una delle frequenze dello spettro della forzante kf tende a coincidere, in valore assoluto, con una delle frequenze di risonanza ν_λ , il corrispondente termine nello sviluppo (7.45) di U_k , per il valore di k detto, tende a raggiungere il suo valore massimo in valore assoluto:

$$\frac{|S_{\lambda, \alpha, k} \phi_{\lambda, \alpha}(\mathbf{x})|}{\sqrt{[(2\pi k f)^2 - (2\pi \nu_\lambda)^2]^2 + \gamma_\lambda^2 4\pi^2 \nu_\lambda^2}} \rightarrow \frac{|S_{\lambda, \alpha, k} \phi_{\lambda, \alpha}(\mathbf{x})|}{\gamma 2\pi \nu_\lambda} \quad \text{se } kf \rightarrow \nu_\lambda.$$

Se il parametro di smorzamento γ_λ è piccolo, il secondo membro tende a crescere e, al limite, diverge in assenza di smorzamento.

Concludiamo che (comunque abbiamo fissato le condizioni iniziali del sistema oscillante che ammette frequenze di risonanza ν_λ), quanto più la frequenza f con cui oscilla la forzante esterna S si avvicina ad una delle ν_λ , tanto più l'ampiezza delle oscillazioni di deformazione del sistema tende a diventare grande, ed in modo divergente quanto più il parametro di smorzamento γ_λ è piccolo. La stessa cosa accade se un multiplo intero della frequenza f si avvicina in valore assoluto ad una delle frequenze di risonanza.

Questo fenomeno è detto *risonanza* ed è responsabile di vari disastri accaduti a diverse costruzioni, in particolare ponti sospesi: la tipica situazione è quella di un plotone di militari che

attraversa un ponte marciando ad una delle frequenze di risonanza della struttura.

Tutti i risultati ottenuti si generalizzano immediatamente per risuonatori forzati costruiti da poligoni le cui facce sono un certo numero di membrane D_1, D_2, \dots, D_N . Le saldature sono fatte attraverso porzioni dei bordi delle facce su cui valgono le condizioni di annullamento. Oggetti di questo tipo sono modelli semplificati della cassa armonica di strumenti musicali. In questo caso, le forzanti saranno in genere differenti per ogni faccia e le indicheremo con $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(N)}$. Tuttavia, dato che queste forzanti sono generate da un comune meccanismo (per esempio le corde dello strumento), ci si aspetta che ammettano tutte uno sviluppo:

$$S^{(j)}(t, \mathbf{x}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_k^{(j)}(\mathbf{x}) e^{i2\pi k f t}. \quad (7.49)$$

dove le frequenze kf sono le stesse per ogni $j = 1, \dots, N$. L'argomento \mathbf{x} della forzante $S^{(j)}$ apparterrà alla faccia D_j . Per ogni faccia D_j avremo una funzione di deformazione ortogonale $u_j^{(\infty)}$, a grandi tempi, della forma:

$$u^{(\infty)}(t, \mathbf{x}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} U_k(\mathbf{x}) e^{i2\pi k f t}, \quad (7.50)$$

che si può scrivere equivalentemente:

$$u_j^{(\infty)}(t, \mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{+\infty} B_k^{(j)}(\mathbf{x}) \sin(2\pi k f t + \epsilon_k^{(j)}(\mathbf{x})). \quad (7.51)$$

7.1.6 *Il caso del risuonatore o tamburo ideale forzato di topologia arbitraria.

Consideriamo il caso di un tamburo ideale di topologia arbitraria descritto dalla varietà differenziabile bidimensionale orientabile, connessa, compatta, $M \subset \mathbb{R}^3$. La metrica su M indotta da quella standard di \mathbb{R}^3 sarà indicata da g e l'operatore di Laplace-Beltrami definito sul dominio \mathcal{D}_M descritto nella sezione 7.1.2, sarà indicato con $\Delta^{(M,g)}$. Terremo conto di quanto discusso nelle sezioni 5.1.3 e 7.1.2. Ricordiamo che si tratta di un modello *molto poco fisico* come già discusso. Ce ne occupiamo comunque dato che presenta qualche aspetto matematico interessante. Se $u = u(t, p)$ è la deformazione del tamburo in $p \in M$ al tempo t nella direzione normale a M in p stesso, l'equazione del moto è ora, tenendo conto anche degli effetti di attrito:

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta^{(M,g)} u + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} - \Gamma \frac{\partial \Delta u}{\partial t} = S(t, p). \quad (7.52)$$

con $\gamma, \Gamma > 0$ costanti note. Abbiamo inserito una forzante S che, come nel caso della membrana piatta, costringerà il tamburo a vibrare a frequenze imposte dall'esterno. Diremo tutto questo sistema un *risuonatore*. Si riesce a dimostrare la seguente proposizione similmente al caso più elementare già discusso.

Proposizione 7.6. *Se, nelle ipotesi iniziali su M e g , esiste una soluzione di (7.52) $u \in C^3(\mathbb{R} \times M; \mathbb{C})$ allora è unica per $t \geq 0$ e per fissati dati iniziali $u(0, p) = u_0(p)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(0, p) = u_1(p)$ e fissata S , rispettivamente di classe $C^2(M; \mathbb{C})$, $C^1(M; \mathbb{C})$ e $C^0(\mathbb{R} \times M; \mathbb{C})$. \diamond*

Dimostrazione. Consideriamo due soluzioni e sia φ la differenza di esse. Definendo la densità di energia E di tale funzione come in (5.15) (o (5.14) nel caso reale) con $\mu = 0$ e $c = v$ e usando la derivata covariante $\nabla^{(M,g)}$ al posto del solito gradiente di \mathbb{R}^n , una dimostrazione strettamente analoga a quella che porta alla (5.19) produce ora, tenendo conto della nuova forma dell'equazione (7.52), in cui per φ , si deve omettere il termine di sorgente, si ha:

$$\int_M E(p, T) d\nu^{(M,g)} = -\gamma \int_0^T \int_M \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 d\nu^{(M,g)} dt - \Gamma \int_0^T \int_M g \left(\nabla^{(M,g)} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t}, \nabla^{(M,g)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) d\nu^{(M,g)} dt,$$

dove $T > 0$. Sopra abbiamo usato il teorema della divergenza rispetto alla derivata covariante di Levi-Civita $\nabla^{(M,g)}$ tenendo conto dell'assenza di ∂M . Concludiamo che:

$$\int_M E(p, T) d\nu^{(M,g)} \leq 0.$$

D'altra parte, dato che vale $E \geq 0$ l'integrale di sopra dovrà essere nullo per ogni $T > 0$. Come nella dimostrazione del teorema 5.1, questo implica che $\varphi = 0$ ovunque e dunque le due soluzioni coincidono. \square

Tenuto conto della proposizione precedente, in modo essenzialmente identico a quanto fatto nella dimostrazione del teorema (7.1) riducendosi ad un numero finito di gradi di libertà, si può provare il teorema seguente.

Teorema 7.3. *Nelle ipotesi fatte inizialmente su M , si consideri l'equazione (7.52) per $u \in C^3(\mathbb{R} \times M; \mathbb{C})$, con $v, \gamma, \Gamma > 0$ costanti note, per gli assegnati dati iniziali u_0, u_1 insieme alla funzione S . Se la funzione sorgente $S \in C^0(M; \mathbb{C})$ e le condizioni iniziali $\phi_0 \in C^1(M; \mathbb{C})$ e $\phi_1 \in C^0(M; \mathbb{C})$ ammettono sviluppi di Fourier (7.13) che contengono solo un numero finito di addendi (indipendente da t per la funzione S), allora la soluzione esiste in $C^2(\mathbb{R} \times M; \mathbb{C})$ ed è unica.*

Tale soluzione si esprime come:

$$u(t, p) = \sum_{\lambda, \alpha} u_{\lambda, \alpha}(t) \phi_{\lambda, \alpha}(p), \quad (7.53)$$

dove le $\phi_{\lambda, \alpha}$ formano una base hilbertiana di autofunzioni di $\Delta^{(M,g)}$ su \mathcal{D}_M e le funzioni $u_{\lambda, \alpha} = u_{\lambda, \alpha}(t)$ sono le soluzioni dei corrispondenti problemi di Cauchy alle derivate ordinarie:

$$\frac{d^2 u_{\lambda, \alpha}}{dt^2} - v^2 \lambda u_{\lambda, \alpha} + \gamma \lambda \frac{du_{\lambda, \alpha}}{dt} = -v^2 S_{\lambda, \alpha}(t), \quad u_{\lambda, \alpha}(0) = u_{\lambda, \alpha}^{(0)}, \quad \frac{du_{\lambda, \alpha}}{dt}(0) = u_{\lambda, \alpha}^{(1)}. \quad (7.54)$$

dove

$$\gamma_\lambda := \gamma + \lambda \Gamma, \quad (7.55)$$

e in cui i coefficienti $u_{\lambda,\alpha}^{(0)}$, $u_{\lambda,\alpha}^{(1)}$ sono i coefficienti di Fourier, rispetto alla base hilbertiana suddetta, delle condizioni iniziali u_0 e u_1 rispettivamente e, analogamente:

$$S_{\lambda,\alpha}(t) = \int_M \overline{\phi_{\lambda,\alpha}}(\mathbf{x}) S(t, \mathbf{x}) d\nu^{(M,g)}. \quad (7.56)$$

◇

Possiamo ora ripetere le stesse considerazioni espote dopo il teorema 7.2, assumendo di decomporre S usando la serie di Fourier, a p fisso:

$$S(t, p) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_k(p) e^{i2\pi k f t}, \quad (7.57)$$

dove solo un numero finito di addendi sia non nullo a secondo membro. Per evitare alcune patologie nelle soluzioni, imporremo anche il vincolo che, se ϕ è una funzione armonica su M ,

$$S_0(p) = 0, \quad \text{per ogni } p \in M. \quad (7.58)$$

La richiesta è equivalente a richiedere che in ogni punto p del tamburo, la forza esterna oscilli attorno al valore nullo. Se definiamo, come fatto nel caso della membrana piana,

$$S_{\lambda,\alpha,k} := \int_M \overline{\phi_{\lambda,\alpha}}(p) S_k(p) d\nu^{(M,g)}(p)$$

la richiesta fatta sopra implica che:

$$S_{\lambda,\alpha,0} = 0, \quad \text{per ogni } \lambda \in \sigma_p(\Delta^{(M,g)}) \text{ e } \alpha = 1, 2, \dots, d_\lambda. \quad (7.59)$$

Come già detto per il caso più elementare discusso precedentemente, quanto diremo si può ottenere anche lasciando cadere l'ipotesi di un numero finito di termini, purchè la serie converga uniformemente ed abbastanza rapidamente. Nelle ipotesi del teorema 7.3 e con l'aggiunta della condizione (7.59) (che serve in particolare ad evitare che il denominatore in (7.60) si annulli per $\lambda = 0$) il moto del tamburo forzato si esprime ancora come somma di due parti. Una delle due parti è una soluzione dell'equazione omogenea e, eccetto per un termine costante, si spegne rapidamente per $t \rightarrow +\infty$ quanto più γ e Γ sono grandi. La seconda parte è una soluzione particolare dell'equazione differenziale completa che sopravvive a grandi tempi e non ha più memoria delle condizioni iniziali eccetto che per la costante detta prima, che può dipendere dalle condizioni iniziali. La soluzione a grandi tempi ha la forma:

$$u^{(\infty)}(t, p) = u_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} U_k(\mathbf{x}) e^{i2\pi k f t},$$

dove, similmente al caso più elementare della membrana piatta oscillante, per $k \neq 0$:

$$U_k(p) := \sum_{\lambda \in \sigma_p(\Delta^{(M,g)}), \alpha=1, \dots, d_\lambda} \frac{S_{\lambda,\alpha,k} \phi_{\lambda,\alpha}(p)}{(2\pi k f)^2 - (2\pi \nu_\lambda)^2 - i\gamma 2\pi \nu_\lambda}, \quad (7.60)$$

dove, al solito, abbiamo definito le frequenze di risonanza del tamburo M , tramite la (7.22) con $\lambda \in \sigma_p(\Delta^{(M,g)})$. Evidentemente la costante u_0 deve essere nulla in tutte le soluzioni fisicamente sensate, perché ci si aspetta che la soluzione oscilli attorno alla configurazione di riposo che corrisponde a $u = 0$ ovunque.

Nel caso in cui u e S siano reali vale $U_k = \overline{U_{-k}}$, possiamo ancora esprimere questa soluzione come:

$$u^{(\infty)}(t, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{+\infty} B_k(p) \sin(2\pi k f + \epsilon_k(p)), \quad (7.61)$$

dove:

$$B_k(\mathbf{x}) := 2|U_k| = 2 \left| \sum_{\lambda \in \sigma_p(\Delta), \alpha=1, \dots, d_\lambda} \frac{S_{\lambda, \alpha, k} \phi_{\lambda, \alpha}(p)}{(2\pi k f)^2 - (2\pi \nu_\lambda)^2 - i\gamma_\lambda 2\pi \nu_\lambda} \right|, \quad (7.62)$$

e $\epsilon_k(p)$ è completamente determinato dalle richieste:

$$B_k(p) \cos \epsilon_k(p) = 2\operatorname{Re}U_k(p), \quad B_k(p) \sin \epsilon_k(p) = 2\operatorname{Im}U_k(p). \quad (7.63)$$

Al solito, nelle nostre ipotesi generali, solo un numero finito di termini in tutte le somme, apparentemente infinite di sopra, è non nullo. L'espressione trovata per la soluzione $u = u(t, p)$ a grandi tempi (in realtà tempi molto brevi in sistemi fisici concreti), mostra nuovamente che nella soluzione finale si ritrova lo stesso spettro di frequenze della sorgente che forza il sistema e che in tal modo lo "pilota". Nell'andamento temporale a grandi tempi la memoria delle frequenze di risonanza ν_λ del sistema oscillante è completamente cancellata. Tuttavia ne rimane traccia nelle ampiezze dei singoli modi di oscillazione esattamente come già discusso per il caso della membrana piana.

7.2 Onde di pressione.

Vogliamo mostrare in questa sezione come l'equazione di D'Alembert descriva le onde di pressione e di densità nei gas isotropi in regime di deformazione adiabatica. Successivamente daremo alcuni risultati generali per tale equazione applicata a sorgenti di onde sonore.

7.2.1 L'equazione di D'Alembert per le onde di pressione.

Le leggi fondamentali che descrivono la dinamica dei gas (dell'aria in particolare) in un sistema di riferimento dotato di coordinate spaziali cartesiane ortonormali indicate con \mathbf{x} e rispetto al tempo t , sono le seguenti. La prima è l'**equazione di continuità (o conservazione) della massa**: se $\mu = \mu(t, \mathbf{x}) > 0$ è la densità di massa del gas o fluido, in funzione della posizione $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ nel riferimento e del tempo t :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mu \mathbf{v}) = 0, \quad (7.64)$$

dove $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ è il campo di velocità del fluido nel riferimento considerato: la velocità che ha una particella di gas che passa per \mathbf{x} al tempo t . Assumendo le due funzioni di classe C^1 ,

questa equazione, integrata su un volume V (fermo nel riferimento usato) a chiusura compatta con frontiera regolare orientabile, corrisponde all'equazione integrale:

$$\frac{d}{dt} \int_V \mu(t, \mathbf{x}) d^3x = - \oint_{+\partial V} \mu(t, \mathbf{y}) \mathbf{v}(t, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}),$$

dove abbiamo usato il teorema della divergenza. L'identità ottenuta dice, in termini matematici, che la variazione di massa in V , per unità di tempo, è pari alla massa che transita attraverso la frontiera di V per unità di tempo. L'equazione integrale scritta, assunta valida per ogni scelta di V con le caratteristiche dette, è equivalente alla richiesta (7.64).

La seconda equazione è **la seconda legge della dinamica** per il fluido pensato come *isotropo*:

$$\mu \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \right) = \mu \mathbf{g} - \nabla_{\mathbf{x}} p, \quad (7.65)$$

dove $p = p(t, \mathbf{x}) \geq 0$ è la pressione all'interno del fluido nel punto \mathbf{x} al tempo t e \mathbf{g} è la densità di massa di forza gravitazionale (cioè l'accelerazione gravitazionale!). Il significato fisico di questa equazione è più evidente se si scrive la corrispondente equazione integrale. Se V_t è una porzione di fluido valutata al tempo t e tenendo conto di come essa evolva al variare del tempo – le particelle di fluido che esso contiene sono sempre le stesse che in V_0 , ma la forma di V_t e la sua posizione nel riferimento sarà diversa da V_0 – e se si assume che V_t sia regolare nel senso detto sopra per ogni t , allora l'equazione (7.65) equivale a:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{V_t} \mu \mathbf{v} d^3x \right) = \int_{V_t} \mu \mathbf{g} d^3x - \oint_{+\partial V_t} p(t, \mathbf{y}) \mathbf{n}(t, \mathbf{y}) dS(t, \mathbf{y}). \quad (7.66)$$

Tale equazione dice che la variazione per unità di tempo dell'impulso totale del volume V_t di fluido uguaglia la somma delle forze che agiscono su tale porzione di continuo. Si osservi che V_t dipende dal tempo, per cui l'azione della derivata d/dt non si può banalmente trasferire sotto il segno di integrale, ma dovrà apparire anche un termine dipendente da V_t . Il calcolo non è banale e si rimanda ad un corso di meccanica dei continui. Qui diciamo solo che, tenuto conto dell'equazione di continuità della massa, l'azione della detta derivata su V_t è il responsabile dell'addendo $\mu \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}$ a primo membro della (7.65). Le forze che agiscono sulla porzione di fluido V_t sono dunque di due tipi.

(1) Il primo addendo a secondo membro in (7.66) rappresenta la forza di gravità totale che agisce su tutte le particelle di fluido.

(2) Il secondo addendo rappresenta invece le forze di pressione che il resto di fluido, la parte fuori da V_t , esercita su V_t attraverso la sua superficie ∂V_t . Tale forza si ottiene integrando la **densità di forza superficiale** – detta anche **sforzo** – di espressione $-p(t, \mathbf{y}) \mathbf{n}(t, \mathbf{y})$, dove $\mathbf{n}(t, \mathbf{y})$ è il versore normale uscente da ∂V_t , nel punto \mathbf{y} al tempo t e $p(t, \mathbf{y})$ è la pressione nel fluido in quel punto a quel tempo.

Osservazioni 7.6. Il fatto che il fluido sia *isotropo* significa che la forza che l'esterno di V_t esercita sulla superficie ∂V_t è sempre perpendicolare ad essa, *comunque la superficie sia disposta*,

la nozione di *pressione* ha senso proprio in questa situazione³.

Rimane da precisare una terza legge, detta **equazione costitutiva**, che connette μ e p solitamente espressa da una relazione $p = f(\mu)$ ottenuta per via termodinamica.

Se le deformazioni di volumi di fluido avvengono molto rapidamente, e questo accade nelle onde di suono, è ragionevole assumere che la relazione costitutiva suddetta sia quella di una *trasformazione adiabatica* (cioè in assenza di scambi di calore):

$$p(t, \mathbf{x}) = f(p) = p_0 \left(\frac{\mu(t, \mathbf{x})}{\mu_0} \right)^\gamma, \quad (7.67)$$

p_0 è la pressione corrispondente alla densità μ_0 di riferimento, γ è una costante che dipende dal gas (γ è il rapporto tra i calori specifici a pressione e volume costante come dovrebbe essere noto dai corsi di termodinamica, vale circa 1.4 per l'aria.)

Non cercheremo nemmeno di affrontare il complicato problema di risolvere il set delle tre equazioni (7.64), (7.65) e (7.67), ma faremo diverse approssimazioni, che si rivelano funzionanti alla prova dei fatti, descrivendo le perturbazioni di pressione relativamente violente come quelle dei suoni. Trascureremo la presenza di gravità, in modo tale che, nella situazione di equilibrio si possano considerare la densità di massa e la pressione come costanti μ_0, p_0 (in caso contrario si ha una dipendenza dalla quota secondo la legge idrostatica come ben noto). Assumeremo poi che la densità di massa vari di poco rispetto alla situazione di gas in equilibrio. Possiamo scrivere in tal caso:

$$\mu(t, \mathbf{x}) = (1 + s(t, \mathbf{x}))\mu_0,$$

da cui:

$$s(t, \mathbf{x}) := \frac{\mu(t, \mathbf{x})}{\mu_0} - 1, \quad (7.68)$$

dove il numero puro $s(t, \mathbf{x})$, che si dice **condensazione**, soddisfa $|s(t, x)| \ll 1$. Nel caso generale avremo che:

$$p(t, \mathbf{x}) = p_0 + \left. \frac{df}{d\mu} \right|_{\mu_0} (\mu(t, \mathbf{x}) - \mu_0) + O((\mu(t, \mathbf{x}) - \mu_0)^2).$$

Dato che:

$$\left. \frac{df}{d\mu} \right|_{\mu_0} (\mu(t, \mathbf{x}) - \mu_0) = p_0 \gamma \left(\frac{\mu_0}{\mu_0} \right)^{\gamma-1} \frac{1}{\mu_0} (\mu - \mu_0) = p_0 \gamma \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) = p_0 \gamma s,$$

possiamo approssimare la relazione tra p e μ con:

$$p(t, \mathbf{x}) = p_0 + p_0 \gamma s(t, \mathbf{x}) \quad (7.69)$$

³Nel caso generale, la forza per unità di superficie che l'esterno di V_t esercita sul suo bordo ∂V_t non è diretta perpendicolarmente ad esso ma, ha una direzione che è una funzione di $\mathbf{n}, \mathbf{y}, t$. Tale funzione è lineare in \mathbf{n} e si descrive attraverso il cosiddetto *tensore degli sforzi di Cauchy*.

e quindi, essendo p_0 una costante:

$$\nabla_{\mathbf{x}} p(t, \mathbf{x}) = p_0 \gamma \nabla_{\mathbf{x}} s(t, \mathbf{x}) . \quad (7.70)$$

Assumeremo di seguito che la velocità \mathbf{v} , il suo gradiente, s ed il suo gradiente siano trascurabili quando appaiono al secondo ordine rispetto a termini del primo ordine. In tal modo, per esempio s^2 , $s\mathbf{v}$ o $(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^2$ si possono trascurare rispetto a, indifferentemente, s o \mathbf{v} o ∇s o altri termini del primo ordine. In questo modo si ha una procedura di *linearizzazione* che produce alla fine equazioni necessariamente lineari.

Se nella (7.65) trascuriamo anche il termine che tiene conto della gravità come già detto, troviamo:

$$\mu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla_{\mathbf{x}} p . \quad (7.71)$$

Otteniamo infine attraverso (7.70) ed approssimando $1/\mu$ con $1/\mu_0$ (l'errore che si commette è proporzionale a $s\nabla_{\mathbf{x}}s$):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{p_0 \gamma}{\mu_0} \nabla_{\mathbf{x}} s(t, \mathbf{x}) . \quad (7.72)$$

Con la stessa cura, l'equazione (7.64) diventa:

$$\mu_0 \frac{\partial s}{\partial t} + \mu_0 \nabla_{\mathbf{x}} \cdot ((1 + s(t, \mathbf{x}))\mathbf{v}) = 0$$

e quindi:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0 , \quad (7.73)$$

Se ora calcoliamo la derivata seconda temporale di s , teniamo conto di (7.73) e (7.72), ammettendo che s sia di classe C^2 , in modo da poter scambiare le derivate temporali e spaziali, otteniamo che:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \frac{p_0 \gamma}{\mu_0} \Delta_{\mathbf{x}} s(t, \mathbf{x}) = 0 ,$$

cioè l'equazione di D'Alembert:

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \Delta_{\mathbf{x}} s(t, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{con} \quad v := \sqrt{\frac{p_0 \gamma}{\mu_0}} . \quad (7.74)$$

v è la velocità del suono nel fluido considerato. Abbiamo ottenuto che la condensazione s nell'ambito di validità delle approssimazioni fatte, che si rivela sensato studiando la propagazione del suono, soddisfa l'equazione di D'Alembert. Dato che vale la (7.68) e tenendo conto del fatto che le derivate della costante 1 sono sempre nulle, l'equazione (7.74) risulta essere valida sostituendo che sia μ_0 che p_0 sono costanti, possiamo estrarre tali costanti dalle derivate concludendo che, nelle approssimazioni fisiche assunte valide, devono valere anche le equazioni di d'Alembert per le differenze di densità di massa $D\mu = \mu - \mu_0$ e di pressione $Dp = p - p_0$ e quindi per μ e p stesse:

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} + \Delta_{\mathbf{x}} \mu(t, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{con} \quad v := \sqrt{\frac{p_0 \gamma}{\mu_0}} \quad (7.75)$$

e

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \Delta_{\mathbf{x}} p(t, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{con} \quad v := \sqrt{\frac{p_0 \gamma}{\mu_0}}, \quad (7.76)$$

Si osservi che il rapporto p_0/μ_0 è proporzionale alla temperatura assoluta T_0 del gas secondo un fattore di proporzionalità universale (assumendo che il gas soddisfi l'equazione dei gas perfetti) e pertanto la velocità del suono dipende dalla temperatura del mezzo. Nel modello semplice nel quale lavoriamo, a parità di temperatura due gas hanno differenti velocità di propagazione a seconda delle differenti, rispettive, costanti γ .

7.2.2 Esistenza del potenziale delle velocità.

Nelle ipotesi fatte nella sezione precedente, la validità dell'equazione (7.72) ha un'importante conseguenza. Assumendo che valga tale equazione, e con l'ipotesi aggiuntiva che:

al tempo $t = 0$ (per altro arbitrariamente fissato) il campo di velocità $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ soddisfi:

$$\mathbf{v}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{ovunque in } \mathbf{x},$$

definiamo la grandezza:

$$\phi(t, \mathbf{x}) := -\frac{p_0 \gamma}{\mu_0} \int_0^t s(\tau, \mathbf{x}) d\tau. \quad (7.77)$$

Per costruzione vale allora:

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \phi(t, \mathbf{x}). \quad (7.78)$$

In altre parole, il campo di velocità ammette un **potenziale**, dato dal campo ϕ .

Nel caso in cui invece non valga la condizione di annullamento di \mathbf{v} al tempo nullo, data la definizione (7.77), la (7.78) cessa di valere e deve essere sostituita, ovviamente, da:

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \phi(t, \mathbf{x}) + \mathbf{v}(0, \mathbf{x}). \quad (7.79)$$

La funzione ϕ determina in ogni caso anche p e μ . Infatti, dalla definizione di ϕ e tenendo conto di (7.69) e (7.68), troviamo subito che:

$$p = p_0 + p_0 \gamma \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \mu = \mu_0 + \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (7.80)$$

che valgono, in virtù delle equazioni dette e della sola definizione (7.77) anche se per $t = 0$ il campo di velocità non sia annulla. Integriamo in τ da $\tau = 0$ a $\tau = t$ i due membri dell'equazione per s

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial \tau^2} + \Delta_{\mathbf{x}} s(\tau, \mathbf{x}) = 0.$$

Si ottiene in tal modo con ovvi passaggi (notando in particolare che $\partial_t^2 s$ è continua per ipotesi):

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial s}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{v^2} \frac{\partial s}{\partial t}(0, \mathbf{x}) + \Delta_{\mathbf{x}} \phi(t, \mathbf{x}) = 0.$$

Tenendo conto che $\partial_t s(0, \mathbf{x}) = -\nabla \cdot \mathbf{v}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ per la (7.73) e per la nostra ipotesi sul valore di \mathbf{v} al tempo $t = 0$, abbiamo infine che l'equazione trovata si riduce a:

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial s}{\partial t} + \Delta_{\mathbf{x}} \phi(t, \mathbf{x}) = 0.$$

Dalla definizione di ϕ , (7.77), quest'equazione significa che:

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \Delta_{\mathbf{x}} \phi(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (7.81)$$

Dunque anche il potenziale delle velocità, nelle nostre ipotesi, soddisfa l'equazione di D'Alembert. Nel caso in cui, a $t = 0$ esista un campo di velocità non nullo, l'equazione di sopra deve essere ovviamente sostituita dall'equazione di D'Alembert con sorgente (che in questo caso non dipende dal tempo):

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \Delta_{\mathbf{x}} \phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{v^2} \nabla \cdot \mathbf{v}(0, \mathbf{x}). \quad (7.82)$$

7.2.3 Suono prodotto da risuonatori forzati.

Consideriamo un risuonatore costituito da un poligono chiuso e compatto Ω il cui bordo $\partial\Omega$ sia costituito da N facce piane D_1, D_2, \dots, D_N (che descrivono le solite membrane oscillanti) attaccate tra di loro attraverso porzioni del loro bordo (dato da curve C^∞ a tratti). Su queste curve, che descrivono gli spigoli del poligono, sono imposte le solite condizioni di annullamento della deformazione delle facce. Abbiamo introdotto questi sistemi, che possono costituire un modello elementare della cassa di risonanza di uno strumento, alla fine della sezione 7.1.5 alla quale rimandiamo per le notazioni che useremo nel resto di questa sezione.

Sul risuonatore agiscono forzanti esterne date dalle solite sorgenti dell'equazione di D'Alembert: S_j per la faccia D_j . Ognuna di queste sorgenti impone alla corrispondente faccia D_j di vibrare con le frequenze kf , come discusso nella sezione 7.1.5. Ricordiamo che le frequenze kf sono assunte essere le stesse per ogni faccia, dato che si presuppone che esista un meccanismo comune forzante, per esempio le corde di uno strumento a corda e, in tal caso, le kf sono le frequenze di risonanza di una corda. La deformazione trasversale della faccia D_j per grandi tempi, come discusso nella sezione 7.1.5, è quella data dalla funzione oscillante (7.50). Equivalentemente dalla (7.51). Ricordiamo che nella sezione 7.1.5 abbiamo, al solito, assunto che solo una quantità finita di addendi nelle serie (7.50) e (7.51) sia non nulla. In altre parole, in (7.50) solo una quantità finita di $U_k^{(j)}$ è non nulla. Nel seguito continueremo ad assumere tale ipotesi anche se se ne potrebbe fare a meno. È ragionevole aspettarsi che, nelle stesse ipotesi che hanno portato a scrivere l'equazione di D'Alembert per le onde di pressione (7.76), le onde sonore prodotte oscillino temporalmente con le stesse frequenze kf . Pertanto, ci aspettiamo che l'onda sonora sia una sovrapposizione di funzioni a frequenza temporale fissata, della forma (dove teniamo conto del fatto che il termine corrispondente a $k = 0$ deve coincidere con la pressione a riposo p_0 per evidenti motivi fisici):

$$p(t, \mathbf{x}) = p_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} P_k(\mathbf{x}) e^{i2\pi kft}, \quad (7.83)$$

dove le funzioni P_k sono da determinarsi. Equivalentemente, osservando che p è reale per cui deve essere $P_k(\mathbf{x}) = \overline{P_{-k}(\mathbf{x})}$, possiamo riscrivere la formula precedente come:

$$p(t, \mathbf{x}) = p_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} C'_k(\mathbf{x}) \sin(2\pi k f t + \delta'(\mathbf{x})). \quad (7.84)$$

Per comodità noi continueremo ad usare la (7.83). Inserendo questa forma di soluzione nella (7.76), vediamo che p soddisfa tale equazione se valgono le singole equazioni:

$$\Delta_{\mathbf{x}} P_k(\mathbf{x}) + \left(\frac{2\pi k f}{v}\right)^2 P_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (7.85)$$

L'equazione (7.85), con $\left(\frac{2\pi k f}{v}\right)^2$ sostituito con una costante generica, si chiama **equazione di Helmholtz**. Con opportune condizioni di annullamento all'infinito di P_k e del suo gradiente (in particolare le cosiddette *condizioni di Sommerfeld* di cui non ci occuperemo) e condizioni al contorno, la soluzione della (7.85) è unicamente determinata. Noi ci occuperemo delle sole condizioni al contorno, da imporre su $\partial\Omega$, considerando il problema di determinare P_k in \mathbb{R}^3 all'esterno di Ω .

La condizione al contorno da imporre su P_k deriva dal requisito fisico che la velocità con cui oscilla il bordo del tamburo in ogni punto $q \in M$ ortogonalmente al bordo, e cioè $\partial_t u(t, q)$, sia la stessa dell'aria fuori dal tamburo in quello stesso punto: $\mathbf{n}_q \cdot \mathbf{v}(t, q)$, dove \mathbf{n}_q indica la normale uscente da M in q . In formule⁴:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, q) = \mathbf{n}_q \cdot \mathbf{v}(t, q) \quad \text{per ogni } q \in M.$$

Se deriviamo un'altra volta nel tempo otteniamo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, q) = \mathbf{n}_q \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(t, q).$$

In base alla (7.71) questo significa che:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p(t, q) = -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, q). \quad (7.86)$$

Se ora, pensando esplicitamente di lavorare sulla faccia j -esima, e sostituiamo a secondo membro la (7.50) ed a primo membro la (7.84), vediamo che le condizioni suddette sono verificate se (e solo se), per $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ valgono le condizioni di Neumann per il problema esterno dell'equazione di Helmholtz:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla P_k \upharpoonright_{D_j}(q) = \mu (2\pi k f)^2 U_k^{(j)}(q) \quad \text{per ogni } q \in D_j, \text{ per ogni } j = 1, \dots, N. \quad (7.87)$$

⁴A secondo membro l'argomento q dovrebbe essere più correttamente $q + u(t, q)\mathbf{n}_q$. Tuttavia omettiamo $u(t, q)\mathbf{n}_q$ proprio perché lavoriamo nel regime di piccole deformazioni.

Dove le funzioni $U_k^{(j)}$ sono note. Come già osservato sopra, per ogni k il problema di determinare P_k che risolve l'equazione (7.85) con condizioni al bordo suddette (tenendo conto che $\partial\Omega$ è una superficie C^∞ a tratti per costruzione) e andamento all'infinito fissato ammette un'unica soluzione. In questo modo vediamo che il suono prodotto dal tamburo contiene, facendo l'analisi di Fourier temporale in ogni fissato punto \mathbf{x} dello spazio, le stesse frequenze kf con cui oscilla il risuonatore forzato dalla sollecitazione esterna.

7.2.4 Risuonatore ad aria di Helmholtz.

Discutiamo infine un risuonatore che corrisponde ad un modello molto semplificato di molti strumenti musicali a fiato dovuto ad Helmholtz. In questo risuonatore, ciò che colpisce l'aria esterna producendo l'onda sonora è l'aria stessa contenuta nel risuonatore.

Consideriamo una bottiglia piena d'aria con un corpo molto grande di volume V ed un collo stretto e corto di area trasversale A e altezza h , dove $hA \ll V$. Assumiamo che la bottiglia non abbia tappo. Se in qualche modo premiamo l'aria dentro il collo verso il corpo della bottiglia, l'aria nel corpo si comprime ed esercita una pressione maggiore sul volume d'aria del collo (che si comprime molto meno, dato che la capacità di compressione è proporzionale al volume come calcoleremo tra poco). La forza esercitata sul tappo di aria è proporzionale alla profondità di penetrazione ed è nella direzione opposta ad essa. Si ha in questo modo lo stesso tipo di forza dovuta ad una molla ideale che produrrebbe un moto armonico semplice ad una frequenza propria del sistema che calcoleremo tra poco (la frequenza di risonanza di Helmholtz) se sul cilindro di aria non agissero altre forze. Tuttavia si può anche produrre un'oscillazione forzata (alla frequenza $\nu \neq \nu_H$) esercitando una forza esterna periodica: se una volta che il cilindretto di aria è tornato nella configurazione iniziale viene nuovamente spinto in basso, si può instaurare un moto oscillatorio di esso alla frequenza della forzante (almeno in presenza di fenomeni di attrito che comunque sono sempre presenti). Ovviamente in tutti i casi, si perderà una parte di aria, ma si può tenere conto di queste perdite, con un modello più preciso. Se la frequenza dell'oscillazione è nell'intervallo di percezione del suono, il tappo di aria colpendo con la faccia superiore l'aria esterna alla bottiglia produrrà un suono udibile alla stessa frequenza di oscillazione. Questo è quello che accade quando si soffia radente al collo della bottiglia producendo un suono basso alla frequenza ν_H . In questo caso la forza che spinge in basso il tappo di aria nel collo è quella dovuta all'aria del soffio.

Facciamo una stima della frequenza di risonanza di questo sistema. Partiamo dalla relazione (7.67) che esprime la pressione in un volume d'aria di densità e pressione riposo μ_0 e p_0 rispettivamente, quando è soggetto ad una deformazione molto rapida, supposta adiabatica. Da essa abbiamo:

$$dp = \frac{p_0\gamma}{\mu_0} \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{\gamma-1} d\mu.$$

Se lavoriamo a massa di aria M fissata per cui, le variazioni di densità (e pressione) sono dovute a variazioni di volume: $\mu = M/V$, possiamo riscrivere la relazione trovata come:

$$dp = -v^2 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma-1} \frac{M}{V^2} dV = -v^2 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma-1} \mu \frac{dV}{V},$$

dove abbiamo introdotto la velocità del suono v data dalla seconda equazione in (7.74). In prima approssimazione, quindi, per variazioni finite di volume e pressione:

$$\Delta p = -v^2 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\gamma-1} \mu \frac{\Delta V}{V}$$

Dato che $V = V_0 + \Delta V$ e $\mu = M/(V_0 + \Delta V)$, se sviluppiamo con Taylor attorno a $V = V_0$ il fattore $\left(\frac{V_0}{V} \right)^{\gamma-1} \mu$ e ci fermiamo all'ordine più basso possibile, otteniamo la nostra espressione finale:

$$\Delta p = -v^2 \mu_0 \frac{\Delta V}{V} \quad (7.88)$$

La (7.88) esprime la variazione della pressione Δp nella massa di aria M , quando il suo volume varia di ΔV . La pressione p è supposta essere uniforme nel volume, ed in particolare alla frontiera di esso. Se immaginiamo la massa di aria M come quella contenuta sotto il tappo di aria nel collo della bottiglia, e immaginiamo che la massa nel collo della bottiglia (pari a $Al\mu_0$) penetri di un'altezza z dentro il volume, comprimendo quindi di un volume $\Delta V = Az\mu_0$ la massa M , la forza che quest'ultima eserciterà sulla massa nel collo della bottiglia è: $A\Delta p = Av^2\mu_0 \frac{\Delta V}{V}$ in direzione opposta a quella di penetrazione. In definitiva l'equazione del moto della massa nel collo della bottiglia (ammettendo che tale massa non esca dal collo e che non ci siano altre forze nella direzione considerata) è, nella direzione parallela al collo:

$$Al\mu_0 \frac{d^2 z}{dt^2} = -Av^2\mu_0 \frac{Az\mu_0}{V} .$$

Semplificando:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -(2\pi\nu_H)^2 z, \quad \nu_H := \frac{v}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{Vl}} . \quad (7.89)$$

Abbiamo trovato l'equazione di un oscillatore armonico con frequenza di risonanza ν_H data dalla formula di sopra, che è detta **frequenza di risonanza di Helmholtz**. Si osservi che le caratteristiche del gas sono solo contenute nella velocità del suono nel gas v , il resto dipende dalla geometria.

Se aggiungiamo una forza ulteriore esterna che agisce sul tappo di aria e che oscilla con una frequenza ν , si ha un oscillatore forzato. Tenendo infine conto di termini dissipativi analogamente a quanto visto nella sezione 7.33 si arriva ad un'equazione della forma solita:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + (2\pi\nu_H)^2 z + \gamma \frac{dz}{dt} = S(t), \quad (7.90)$$

del tutto analoga alla prima equazione in (7.33) (con $\Gamma = 0$) su cui si possono fare analoghe considerazioni riguardo ai fenomeni di risonanza quando ν si avvicina a ν_H .

7.3 Un po' di fisica matematica del suono e della musica.

Ci occuperemo ora, in modo molto sommario e idealizzato, della descrizione del funzionamento degli strumenti musicali, in particolare quelli a corde, tenendo conto della presenza della cassa

di risonanza o cassa armonica e dell'aria. Fare uso dei risultati ottenuti nelle sezioni precedenti di questo capitolo e del precedente.

7.3.1 Strumenti musicali a corda.

Le corde degli strumenti musicali “a corda” (chitarra, di un pianoforte, violino...) vibrano trasversalmente soddisfacendo l'equazione di D'Alembert con condizioni di annullamento al bordo. Può esserci anche un ulteriore termine di forzamento dell'oscillazione che corrisponde ad una sorgente nell'equazione di D'Alembert dato dalla componente perpendicolare alla corda di una densità lineare di forza che agisce sulla corda stessa. Dal punto di vista pratico questo termine forzante può in particolare essere l'archetto degli strumenti musicali della famiglia del violino. Si osservi che la forma funzionale di questo tipo di forzante è molto difficile da descrivere matematicamente (ne esiste un modello matematico ancora oggi valido dovuto a Helmholtz) ed è tale che il moto della corda che si ottiene a regime (cioè superata la fase transiente che decade esponenzialmente) sia una sovrapposizione di moti armonici con le frequenze proprie della corda *libera*.

Bisogna anche tener presente il fatto che l'equazione di D'Alembert (anche con sorgente) è evidentemente una fortissima idealizzazione, dato che le corde reali sono soggette anche forze interne d'attrito che smorzano le oscillazioni e le fanno decadere nel tempo in tempi relativamente brevi, come è evidente dall'osservazione sperimentale. L'archetto degli strumenti della famiglia del violino serve proprio a sostenere nel tempo le oscillazioni fornendo l'energia dissipata dalle forze d'attrito. Inoltre, il moto di una corda reale, che ha un diametro finito, è anche soggetto ad oscillazioni di torsione ed ad oscillazioni longitudinali (di compressione) di cui non terremo conto, ma che devono essere considerate in uno strumento musicale reale. La corda comunque non è completamente libera di oscillare anche perchè è immersa nell'aria. Il moto della corda viene trasmesso all'aria che è colpita violentemente dalla corda. L'accoppiamento con l'aria è un ulteriore processo che spegne l'oscillazione della corda sottraendone energia. L'accoppiamento diretto della corda con l'aria è comunque molto debole e per produrre un suono udibile a distanza è necessario adoperare una *cassa armonica* o *cassa di risonanza* che trasforma le onde della corda in onde meccaniche della cassa (ancora una volta sottraendo energia alla corda e smorzandone le oscillazioni). A loro volta, queste onde meccaniche delle pareti della cassa armonica spingono in modo efficace l'aria (perché la superficie di contatto con l'aria è molto maggiore di quella della corda), creando le tipiche onde sonore emesse dagli strumenti a corda. Dunque le oscillazioni della corda si tramettono direttamente alla cassa per via meccanica. La cassa si può pensare come costituita da membrane oscillanti che, nel nostro modello semplificato per descrivere i fenomeni di smorzamento dovuti all'attrito ed all'interazione con l'esterno, seguono l'equazione (7.31), in cui u rappresenta la deformazione trasversale (perpendicolare rispetto alle membrane a riposo) delle membrane stesse. In generale non tutte le pareti della cassa armonica oscillano sensibilmente: nella famiglia di strumenti musicali del violino oscillano quella superiore detta *tavola armonica* e quella inferiore. Il termine forzante della sorgente S in (7.31) è ora dovuto alla corda oscillante (la trasmissione della forza avviene in modo complesso tramite strutture di accoppiamento tra cassa e corda. Negli strumenti a corda come il violino, questa struttura

include il *ponticello* su cui passano le corde, che appoggia vicino all'*anima* (il cilindro di metallo saldato perpendicolarmente alla faccia inferiore del violino che tramette il moto della tavola armonica alla faccia posteriore dello strumento) ed è attaccato alla *catena* (un robusto listello di legno fissato nella direzione delle corde alla tavola armonica, al di sotto delle corde). La forma della funzione S sarà complicata, ma si potrà sempre decomporre come in (7.36), dove ora le frequenze $kf = ck/(2L)$ saranno proprio le frequenze di risonanza della corda di lunghezza L .

La cassa armonica deve avere un tempo di smorzamento delle oscillazioni molto più rapido di quello delle corde, in modo tale che, come visto nella sezione 7.1.5, la corda possa pilotare la cassa tramite il termine di sorgente S nell'equazione (7.31). Sono le oscillazioni della cassa che, alla fine, producono in modo efficace, facendo oscillare l'aria, un'onda acustica. In definitiva le parti della cassa armonica sono pilotate ad oscillare alle frequenze che impongono le corde. Per questo il sistema di trasmissione dell'oscillazione deve essere tale che, malgrado l'oscillazione della cassa, la lunghezza delle corde rimanga fissa (altrimenti le frequenze di risonanza delle corde non sono fissate) e venga trasmessa una grande forza alle pareti della cassa.

Fuori dalla corda e fuori dalle pareti della cassa armonica l'aria è libera, ma viene attraversata da una *perturbazione di pressione* dovuta all'urto con le pareti della cassa armonica. L'equazione per queste onde di pressione è dunque la (7.76) con condizioni al bordo dove è presente la struttura della cassa di risonanza. Se ci mettiamo in un punto fissato dello spazio \mathbf{x} fuori dallo strumento musicale e misuriamo, al variare del tempo, il valore della pressione dell'aria $p = p(t, \mathbf{x})$, scopriamo che si tratta di un fenomeno periodico (per tutto il tempo in cui la regione è attraversata dalla perturbazione di pressione) esattamente come accade osservando un punto della corda al variare del tempo.

Possiamo precisare quantitativamente quanto abbiamo appena detto, tenendo conto dei risultati delle sezioni precedenti.

Supponiamo che la corda oscilli con un'onda trasversale (nel seguito $y(t, x)$ denota la deformazione longitudinale della corda) che *contiene più frequenze*:

$$y(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin\left(\frac{c\pi n}{L}t + \delta_n\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right). \quad (7.91)$$

L'*Hertz* – indicato con Hz – è l'unità di misura delle oscillazioni nel tempo ed è pari ad un'oscillazione al secondo. Le frequenze fondamentali $c/(2L)$ variano dai $40Hz$ ai $3000Hz$ considerando tutti gli strumenti a corda della famiglia del violino (dal contrabbasso al violino). Al solito possiamo pensare che la serie scritta sopra sia in realtà una somma finita, dato che le ampiezze C_n diventano molto piccole, negli strumenti musicali a corde per $n > 14 - 15$. L'oscillazione della corda viene trasferita meccanicamente alla cassa tramite apposite strutture. Le pareti oscillanti della cassa (tipicamente due) saranno forzate ad oscillare come membrane oscillanti.

Osservazioni 7.7. In realtà, assumere che le facce oscillanti di un violino o di una chitarra siano membrane, che dunque oscillano solo trasversalmente, è una rozza approssimazione perché trascura completamente il fatto che le pareti della cassa armonica non sono membrane tenute in

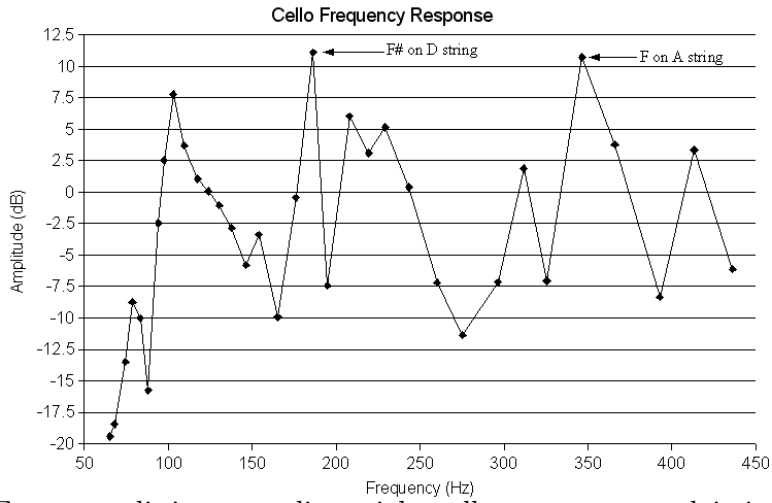


Figura 7.4: Frequenze di risonanza di un violoncello rappresentate dai picchi in figura: in ascissa si vede la frequenza della corda oscillante in Hz , in ordinata, in dB , appare la potenza del suono prodotto alla fine da tutta la struttura nel punto di rilevamento del suono. Il picco intorno ai $95Hz$, è la risonanza di Helmholtz dovuta all'aria ed ai fori ad "effe", le rimanenti sono dovute ai modi normali delle pareti della cassa armonica. I due picchi indicati corrispondono a due wolf tones: il Fa diesis suonato sulla corda del Re e il Fa suonato sulla corda del La .

tensione da un telaio rigido (come accade nel tamburo), ma sono strutture con tensioni interne già in condizioni di riposo, come accade in una lamina di materiale plastico o metallico. La presenza di tensioni interne nella situazione di riposo produce una differente equazione differenziale lineare che descrive le onde di deformazione di simili strutture piane. Tale equazione coinvolge l'operatore di Laplace al quadrato $\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ invece che il semplice laplaciano, ma la teoria non è molto dissimile dalla versione semplificata che stiamo trattando.

Rimanendo nella descrizione approssimata della cassa armonica in termini di membrane oscillanti, consideriamo una di queste membrane oscillanti adattando delle coordinate x, y ad essa e misurando la deformazione lungo z con la funzione $u(t, x, y)$. Per un punto che ha coordinate (x, y) in quiete su una parete della cassa armonica, a "grandi tempi" t (che in realtà significa istantaneamente se la cassa è costruita bene in modo da smorzare rapidamente la fase transiente) ha la struttura prevista dalla (7.51):

$$u(t, x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(x, y) \sin\left(\frac{c\pi n}{L}t + \epsilon_n(x, y)\right), \quad (7.92)$$

come abbiamo visto nella sezione 7.1.5. Le membrane oscillanti colpiranno l'aria (e tutto questo processo avviene *fuori dalla cassa armonica*) producendo un'onda sonora di pressione. La pressione p , rispetto alla pressione dell'aria a riposo, nel punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ attraversato dell'onda acustica creata dalle oscillazioni della cassa, ha un andamento temporale del tipo:

$$p(t, \mathbf{x}) = p_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C'_n(\mathbf{x}) \sin\left(\frac{c\pi n}{L}t + \delta'_n(x)\right). \quad (7.93)$$

Osservazioni 7.8.

(1) Si osservi che le frequenze:

$$\nu_n = \frac{cn}{2L},$$

che appaiono negli sviluppi dell'oscillazione della cassa e dell'aria sono esattamente le stesse di quelle delle corde. Le corde dunque pilotano il sistema. Si osservi che le dette frequenze sono privilegiate per le corde perché corrispondono alle *frequenze proprie* delle corde. Viceversa non rappresentano, in generale, nulla di particolare per la cassa e per l'aria.

(2) Nello sviluppo (7.91) l'onda sinusoidale con $n = 1$ viene detta **fondamentale**, mentre le rimanenti, associate ai numeri $n = 2, 3, 4$ sono dette **armoniche**. Le frequenze temporali della perturbazione di pressione,

$$\nu_n = \frac{cn}{2L},$$

che appaiono nello sviluppo (7.93) sono quindi esattamente le stesse che appaiono nello sviluppo della perturbazione trasversale della corda (7.91).

(3) Il passaggio dalla funzione y che esprime l'oscillazione della corda, alla funzione Δp tiene conto di tutti i fenomeni di risonanza della cassa che modificano le ampiezze delle varie frequenze (nell'analisi temporale) con cui si decompone la vibrazione y , pur mantenendo nell'oscillazione di pressione finale le stesse frequenze iniziali. Queste informazioni sulle risonanze sono inglobate nelle funzioni coefficienti $C'_n(\mathbf{x})$ e prima di essi nelle funzioni $B_n(x, y)$ come descritto precedentemente. Le risonanze sono in massima parte dovute alla struttura della cassa che produce i suoni principalmente all'esterno di essa (come un pistone che mette in moto l'aria esterna alla cassa), ma non solo. C'è una risonanza in più non dovuta alla cassa armonica, ma dovuta all'aria stessa che oscilla come un *risuonatore di Helmholtz* dentro la cassa uscendo dai fori appositi (le fessure a “effe” per violino viola e violoncello) di cui bisogna tenere conto nel calcolo dei coefficienti $C'_n(\mathbf{x})$. La figura⁵ illustra le ampiezze, dovute alle varie risonanze della cassa, che si ottengono facendo vibrare le corde del violoncello alle frequenze indicate in ascissa, assumendo che l'ampiezza dell'oscillazione delle corde sia la stessa al variare della frequenza. Come si vede la cassa risponde in modo molto differente a seconda della frequenza imposta dalle corde. Un meccanismo del tipo di quello della *risonanza di Helmholtz* è responsabile dell'amplificazione delle frequenze più basse, quelle ottenute facendo vibrare la corda del Do. La nota Sol suonata su tale corda ha una frequenza vicina al picco intorno a 95 Hz della risonanza di Helmholtz. Le altre frequenze sono amplificate da risonanze della cassa. In particolare della *tavola armonica*: la faccia superiore della cassa.

Per quanto riguarda la risonanza di Helmholtz, quello che accade è che, in riferimento alla sezione 7.2.4, invece di oscillare l'aria nel collo della bottiglia (qui rappresentato da ciascun buco delle fessure ad “effe”), oscilla forzatamente il volume della bottiglia, facendo oscillare l'aria nel collo della bottiglia e producendo suono con volume rilevante intorno alla frequenza di risonanza di Helmholtz. Esiste una formula empirica (dovuta a Itokawa e Kumagai) che predice il valore

⁵Renzo Vitale: “Caratteristiche generali del timbro e sue peculiarità nel suono del violoncello”, Report per i corsi di: Acustica e Psicoacustica Elaborazione Numerica del Segnale A.A. 2004-2005.

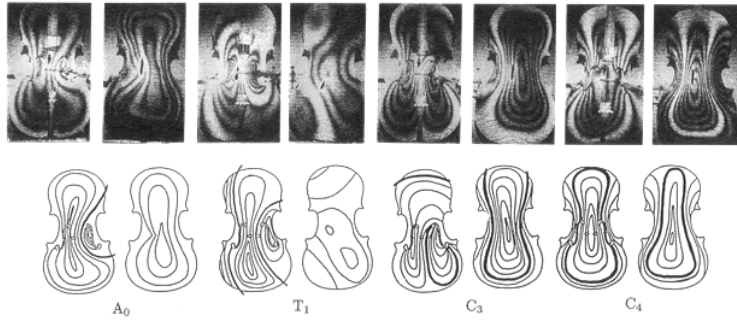


Figura 7.5: Oscillazione della cassa di risonanza di un violoncello visti sulla tavola armonica. La risonanza di Helmholtz è A_0 . La risonanza C_3 si incontra a $226Hz$, la C_4 appare a $194Hz$ entrambe sono dovute ad oscillazioni della cassa. T_1 è data da un'oscillazione per la maggior parte dovuta solo alla tavola armonica.

della frequenza di risonanza di Helmholtz ν_H per un violoncello in funzione dei suoi parametri:

$$\nu_H = \frac{0.27vA^{1/4}}{\sqrt{V}},$$

dove A è l'area delle fessure ad "effe", V il volume della cassa armonica e v la velocità del suono nell'aria (circa $340m/s$).

(4) Le frequenze di risonanza ν_λ della cassa di risonanza sono differenti dalle frequenze $\nu_k = kf$ delle corde. Quando risultano essere troppo vicine (e questo succede abbastanza spesso nel violoncello) si instaurano i pericolosi fenomeni di risonanza descritti nella sezione precedente tra corde e cassa e il suono non è ben controllabile dal musicista: si hanno i cosiddetti *wolf tones* o *note del lupo*.

(5) La particolare forma della cassa degli strumenti a corde (suonati con l'arco) è dovuta al fatto che tale forma assicura che le frequenze di risonanza della cassa (delle due facce) cadano "nei punti giusti" rispetto alle frequenze di risonanza delle corde per ottenere il timbro particolare di tali strumenti. I liutai che costruiscono gli strumenti sanno per esperienza come costruire la cassa.

7.3.2 Il suono prodotto dagli strumenti musicali a corde.

La musica utilizza un tipo di onde di pressione che cadono sotto il nome di "suoni". Si tratta di una caratterizzazione psicofisica più che puramente fisica. Se la frequenza delle onde di pressione (più in generale se le frequenze nello sviluppo di Δp in (7.93) con coefficienti $C'_n(\mathbf{x})$ abbastanza grandi) è abbastanza elevata ma non eccessivamente, tra $12Hz$ e $12000Hz$, il nostro orecchio le percepisce come un *suoni*. $1Hz$ corrisponde, in un fenomeno periodico, ad 1 oscillazione al secondo. Il suono di un *diapason* che emette la *nota pura La* di riferimento (vedi sotto),

corrisponde ad un'onda di pressione costituita da un unico sinusoid⁶:

$$p(t, \mathbf{x}) = p_0 + C'(\mathbf{x}) \sin(2\pi\nu t + \delta(\mathbf{x})),$$

con una frequenza di $\nu = 440Hz$. In un suono piú complesso, prodotto da una corda vibrante, le frequenze temporali ν_n che appaiono in (7.91) e (7.93) sono tutte *multipli interi* della frequenza della fondamentale e tale frequenza fondamentale si ricava come la differenza delle frequenze di due armoniche successive:

$$\nu_1 = \nu_{n+1} - \nu_n.$$

Come già osservato precedentemente, e calcolato nel caso delle membrane vibranti circolari e rettangolari, quando si considerano strumenti musicali differenti da una corda o da uno strumento a fiato – per esempio la membrana di un tamburo – la deformazione si può comunque decomporre in una somma infinita di oscillazioni elementari dotate di frequenze (temporale) proprie ν_λ . La differenza con quanto accade nelle perturbazioni ondose di una corda ad estremi fissi e negli strumenti a fiato è che, nel caso della perturbazione di pressione $p = p(t, \mathbf{x})$ prodotta da membrane vibranti liberamente oscillanti, le varie frequenze ν_λ *non* risultano essere piú multipli interi di una frequenza fondamentale. Si osservi che ciò implica, in generale, che la funzione $t \mapsto p(t, \mathbf{x})$ a \mathbf{x} fissato, non sia piú una funzione periodica, almeno quando i rapporti tra le frequenze ν_λ non sono numeri razionali. Queste particolarità si ritrovano nelle onde di suono prodotte da tali strumenti che si dice *non essere armonico*. Questa è la ragione fisica per cui il suono degli strumenti a percussione ci appare intrinsecamente differente da quello degli strumenti ad arco: il cervello non riesce a determinare una frequenza fondamentale.

Torniamo ora agli strumenti musicali che emettono suoni *armonici*, cioè per i quali vale la decomposizione in armoniche descritta dalla (7.91) ovvero dalla (7.93) in cui tutte le frequenze che appaiono nella decomposizione sono multipli interi di una frequenza fondamentale. Considerando uno strumento a corde, le singole componenti sinusoidali delle due decomposizioni dette, come detto, oscillano temporalmente con frequenza $\nu_n = cn/(2L)$. Tenendo conto della (5.6) che esprime la velocità di propagazione della perturbazione sulla corda in funzione della densità di massa λ e della tensione τ abbiamo che:

$$\nu_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{\tau}{\lambda}} \tag{7.94}$$

La lunghezza d'onda spaziale, lungo la corda, è ancora data da:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}. \tag{7.95}$$

Si osservi che non abbiamo introdotto una nozione corrispondente alla lunghezza d'onda spaziale per le onde di pressione, anche se si potrebbe fare. Pertanto la lunghezza d'onda spaziale sarà solo riferita alle onde sulla corda. La lunghezza d'onda delle onde di deformazione della corda è legata alla frequenza temporale delle stesse onde della corda che è la stessa che appare per

⁶In realtà questa è un'approssimazione dato che, nella pratica sperimentale, il suono inizia ad un certo istante finito e termina ad un altro istante finito.

le corrispondenti onde sonore di pressione. Modificando la lunghezza d'onda delle onde di deformazione della corda, si modifica la frequenza temporale delle onde di pressione del suono. Questa è la tecnica che si usa suonando la chitarra oppure il violino: la corda viene fatta oscillare con una lunghezza d'onda scelta dal musicista. La scelta è conseguenza del fatto che, l'esecutore preme la corda in determinati punti con le dita, producendo “artificialmente” dei punti nodali per la corda in tali punti. In questo modo lo sviluppo dell'onda di deformazione della corda in armoniche può avere solo quelle lunghezze d'onda compatibili con il punto nodale imposto. Tra poco ritorneremo su questa tecnica discutendo come il nostro cervello individua la frequenza fondamentale in un suono.

7.3.3 Le note musicali pure e note con timbro.

Le singole oscillazioni sinusoidali ad n fissato di una corda che produce suono, trasformate in onde di pressione (purché le frequenze stiano nel range prima indicato) vengono avvertite dal nostro orecchio come *toni puri* di suono cioè *note pure*. Come accennato sopra un diapason emette una nota pura chiamata La di riferimento la cui frequenza di $440Hz$.

Si osservi che per ottenere uno stesso tono puro alla frequenza, diciamo, ν_1 , possiamo usare corde di lunghezza diversa, variandone la densità di massa e la tensione. Si vede dalla (7.94), che, a parità degli altri valori, più è alta la tensione maggiore sarà la frequenza della nota.

In realtà l'orecchio umano eccetto che quello di persone particolarmente dotate è incapace di distinguere le singole frequenze separatamente (chi è abile a farlo si dice che possiede l'“orecchio assoluto”). Il nostro orecchio (cioè il nostro cervello) è in realtà capace di distinguere solo i rapporti tra varie frequenze suonate contemporaneamente o a breve distanza temporale: riesce a dare il nome ad una nota ascoltata se è noto il nome di una nota precedentemente o contemporaneamente ascoltata. Per esempio il rapporto di *un'ottava* è quello di due frequenze una di valore doppio dell'altra: un musicista riconosce subito quando l'intervallo di due note, cioè il rapporto tra le frequenze, è un'ottava.

Bisogna precisare che è difficilissimo, con strumenti meccanici (non elettronici) produrre toni puri. Infatti, il suono che si ottiene pizzicando una corda (clavicembalo, chitarra, contrabbasso) oppure percuotendola (pianoforte), oppure strofinandola con un archetto (violino, viola, violoncello), corrisponde ad una soluzione dell'equazione di D'Alembert con condizioni di annullamento al bordo, la cui forma e decomposizione in armoniche sinusoidali dipende dalle condizioni iniziali, cioè dalla procedura con la quale è stata fatta oscillare la corda. Il suono prodotto è sempre composto da molte armoniche secondo una certa distribuzione con coefficienti C_n e fasi δ_n – come nella (7.91) e nella corrispondente onda di pressione (7.93) – che dipendono dalla procedura usata per mettere la corda in oscillazione. Il numero $C'_n(\mathbf{x})^2$ è legato all'intensità (o energia trasportata) del suono nel punto \mathbf{x} , più precisamente all'intensità dell'armonica n -esima. Le fasi $\delta'_n(\mathbf{x})$ non sono invece molto importanti ai fini del riconoscimento del suono, sembra che il nostro orecchio e il nostro cervello distinguano i suoni guardando alle ampiezze $C'_n(\mathbf{x})$ piuttosto che alle fasi $\delta'_n(\mathbf{x})$. Quando si cerca di suonare una precisa nota mettendo in oscillazione una certa corda in un certo modo, in realtà si produce una certa soluzione delle equazioni di D'Alembert tale che, decomponendola in armoniche, è composta da varie armoniche con frequenze multiple di una

frequenza fondamentale ν_1 . Il nostro cervello individua tale frequenza fondamentale (facendo la differenza delle frequenze delle armoniche successive) e questa definisce la nota associata al suono. Solitamente, ma non sempre⁷, la fondamentale possiede l'ampiezza C_1 più grande di tutte le altre. Si osservi che non detto che la fondamentale corrisponda a $n = 1$: dipende da come mettiamo in oscillazione la corda. Facciamo un esempio. Se blocchiamo una corda di lunghezza L (per es. premendo con un dito) nel punto $L/2$, cioè a metà della sua lunghezza, e la mettiamo in oscillazione in qualche modo mantenendo fissi gli estremi, le frequenze che compongono la forma d'onda saranno vincolate ad avere un nodo a metà della corda: sarà ammissibile la frequenza $\nu_2 = c2/(2L)$, ma anche ogni frequenza ν_n per cui vale $k/n = 1/2$ per qualche $k = 1, 2, \dots, n$, in modo da avere un nodo in $L/2$. In pratica tutte le frequenze $\nu_{2k} = c2k/(2L)$ per ogni $k = 1, 2, \dots$ saranno presenti anche se con ampiezze che dipendono da come abbiamo messo in oscillazione la corda. Quando analizziamo il suono risultante, cioè l'onda sonora emessa dalla corda, senza guardare la corda che lo ha prodotto, possiamo ricostruire la fondamentale di questa sequenza di armoniche come la differenza tra due frequenze di due armoniche successive che rileviamo nell'onda sonora. In questo caso abbiamo:

$$\nu_{2(n+1)} - \nu_{2n} = \nu_2$$

e non ν_1 ! Il suono prodotto da questa corda vibrante, in cui imponiamo un nodo alla sua metà, avrà frequenza doppia (un'ottava sopra) di quello prodotto dalla stessa corda senza porre il dito a bloccarne la metà. Se suonassimo la stessa nota di sopra, invece di mettere il dito a $L/2$, tenendo la corda libera (sempre fissata agli estremi), ma dimezzando la lunghezza della corda o quadruplicandone la tensione, otterremo la stessa frequenza (ora data dalla fondamentale), ma la distribuzione di ampiezze sulle armoniche successive alla fondamentale potrebbe essere diversa e quindi il suono potrebbe risultare differente (anche se la nota è percepita come la stessa). La differenza è nel *timbro*, nozione che andiamo a discutere. Partiamo con l'osservazione sperimentale che, in realtà, le armoniche udibili nel suono prodotto da uno strumento musicale sono al più circa una decina, le rimanenti hanno solitamente ampiezza troppo bassa per essere udite. Per esempio, approssimativamente parlando, l'ampiezza C_n delle armoniche decresce come $1/n$ negli strumenti ad arco e come $1/n^2$ nel pianoforte (tuttavia, come già detto, le ampiezze associate dell'onda di pressione $C'_n(\mathbf{x})$ non decrescono necessariamente nello stesso modo, perché bisogna tenere conto della presenza della cassa armonica che amplifica, fa risuonare e smorza diversamente le varie frequenze). Le rimanenti armoniche della decomposizione di un suono oltre alla fondamentale, sempre presenti e con intensità che dipendono dal tipo di strumento, producono il caratteristico *timbro* dello strumento, per il quale una stessa nota, suonata da un violino oppure da un pianoforte (oppure, come detto sopra, prodotte da uno stesso violino, ma con due procedure differenti) viene avvertita dal nostro orecchio come differente. Il timbro dipende da due fattori: la procedura con cui la corda è messa in eccitazione e come è costituita

⁷In certi casi l'ampiezza massima si ha sulla prima armonica dopo la fondamentale, come in certi strumenti a fiato. Da studi sperimentali risulta anche che, cancellano completamente la componente fondamentale di un suono, ma lasciando le altre armoniche anche solo dalla 4^a in poi, abbastanza inaspettatamente il nostro cervello riesce comunque a ricostruire la fondamentale assegnando al suono la nota corrispondente alla frequenza (fondamentale) in realtà assente.

la cassa armonica (includendo la struttura meccanica che trasmette la vibrazione dalle corde alla cassa, per esempio il cosiddetto *ponticello* per violino, viola e violoncello).

7.3.4 Scale e temperamenti

Nel Medioevo i teorici della musica teorizzarono ed usarono un tipo di scala musicale attribuita a Pitagora: la *scala Pitagorica*. A tale matematico si attribuisce tradizionalmente l'osservazione che gli "intervalli musicali", cioè i rapporti tra frequenze dei suoni usati come base per comporre la musica corrispondono a rapporti numerici tra numeri interi relativamente piccoli. I reciproci di tali rapporti, dato che $\lambda_n \nu_n = c$, corrispondono a rapporti tra le lunghezze d'onda cioè tra le lunghezze delle corde che producono tali suoni, quando queste oscillano presentato lo stesso numero di nodi (cioè lo stesso valore n). La scala pitagorica infinita è costituita dalla successione di infinite sequenze fondamentali di sette note che chiameremo convenzionalmente *Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si*, ordinata nel senso della frequenza (o "altezza") crescente, i rapporti detti "quinte" e "quarte" corrispondono esattamente alle frazioni $2/3$ e $3/4$, rispettivamente, mentre l'"intervallo di tono" corrisponde a $8/9$ e l'"intervallo di semitono" a $243/256$. Due note successive tra sette note *Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si* hanno rapporti di frequenze di un tono ($8/9$) eccetto *Mi/Fa* che corrisponde ad un semitono ($243/256$). Il *Do* iniziale (indicato con *Do'*) della sequenza successiva alla scala di sette note di cui sopra, ha esattamente frequenza doppia de *Do* iniziale: il rapporto delle frequenze tra i due *Do* è detto essere "un ottava". Accade lo stesso per il *Do* della sequenza precedente, che ha frequenza dimezzata... e così via all'infinito nelle due direzioni. All'interno di una fissata sequenza fondamentale di 7 note, nello schema archimedeo, i rapporti tra le frequenze delle note sono quasi tutti di quarta o di quinta (es. $Re/Sol = Do/Fa = 3/4$ mentre $Re/La = Do/Sol = 2/3$) che, nella teoria pitagorica sono pensati come particolarmente "consonanti" (cioè belli da sentire). Più avanti, sempre nel Medioevo, venne introdotta la *scala pitagorica cromatica* in cui vengono aggiunte altre 5 note alle 7 fondamentali (i "diesis" e i "bemolle") dividendo, rozzamente parlando, i toni in due semitoni⁸ in modo tale che tra le 12 note ottenute in questo modo, tra una nota e la successiva ci fosse sempre un rapporto di frequenze di $2/3$ oppure $3/4$. Nasce il problema che, con questa procedura, non accade più che la tredicesima nota abbia frequenza pari a due volte quella della prima, cio non si riesce ad ottenere l'intervallo di ottava. Un miglioramento viene fatto da *Zarlino* nel 1558 che introduce nuovi rapporti ammissibili di frequenze oltre alle quarte e le quinte: i rapporti $4/5$ e $5/6$, "terza maggiore" e "terza minore". Nella scala di *Zarlino* o *scala naturale* compaiono due diversi intervalli di tono, cioè tra le note successive che non siano *Mi - Fa* (che ora è $15/16$ invece di $243/256$): il "tono maggiore" $8/9$ e il "tono minore" $9/10$. Il discepolo di *Zarlino*, *Vincenzo Galilei* (padre di *Galileo*) propose l'adozione di un semitono corrispondente a $17/18$ reintroducendo ulteriori 5 note. Anche queste proposte hanno inconvenienti oltre che pregi. Nella teoria musicale basata sul "temperamento equabile" (dal XX secolo praticamente adottata da tutti) il rapporto tra due note consecutive delle 12 di un ottava è $2^{-1/12}$: è questo il rapporto di frequenze tra le note di due tasti consecutivi in un pianoforte, *includendo nell'ordine sia i*

⁸Le precedenti 7 le possiamo pensare come i tasti bianchi in un ottava del pianoforte, queste ulteriori 5 corrispondono ai tasti neri anche se la questione è più complessa in realtà.

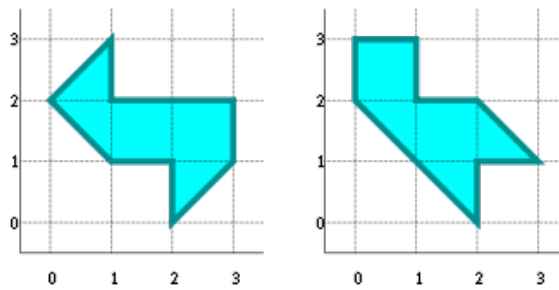


Figura 7.6: Le due regioni di \mathbb{R}^2 esibite da Gordon, Webb e Wolpert che, benchè non isometriche, producono gli stessi autovalori per l'operatore di Laplace con condizioni di Dirichlet.

tasti bianchi che quelli neri (che sono appunto, $7 + 5 = 12$ in tutto per ogni ottava). A differenza delle teorie precedenti e delle idee pitagoriche basate su rapporti di numeri interi, ora i rapporti tra le note sono *numeri irrazionali* eccetto che per le ottave ed i multipli delle ottave in cui si trovano potenze di 2; ciò che si guadagna è che i rapporti tra le note successive sono tutti uguali.

7.3.5 Possiamo udire la forma di un tamburo?

Consideriamo un tamburo la cui membrana oscillante è un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ il cui bordo è una curva C^∞ a tratti. Il suono prodotto da questo strumento, similmente a quanto detto per gli strumenti a corda, si ottiene sostituendo la membrana alle corde nella discussione della sezione 7.3.1. Si conclude che le onde sonore emesse dal tamburo saranno delle sovrapposizioni di onde di pressione, le cui frequenze temporali sono le frequenze di risonanza della membrana. Ci si può chiedere se, una volta rilevate queste frequenze con qualche strumento di analisi del suono, cioè gli autovalori dell'operatore di Laplace su Ω con condizioni di Dirichlet, sia possibile risalire alla forma stessa di Ω . Si osservi a tal fine che, per esempio, gli autovalori del laplaciano sulla membrana rettangolare oppure circolare sono profondamente differenti, come visto nella sezione 7.1.4.

La questione è stata posta per la prima volta da M. Kac nel 1966⁹ ed è stata generalizzata al caso di "membrane" date da varietà (in generale compatte e senza bordo) di dimensione arbitraria. Il problema (nella forma originale data da Kac) è rimasto aperto fino al 1992 quando Gordon, Webb e Wolpert¹⁰ hanno esibito un controesempio che corrisponde alla figura, in cui si vedono due membrane di forma differente che, come gli autori hanno dimostrato, hanno comunque gli stessi valori per gli autovalori dell'operatore di Laplace con condizioni di Dirichlet. Molti aspetti di questo intrigante problema, specialmente nelle versioni in dimensione superiore a $n = 2$, sono tuttora aperti.

⁹Kac, Mark (1966), "Can one hear the shape of a drum?", American Mathematical Monthly 73 (4, part 2): 123.

¹⁰Gordon, C.; Webb, D.; Wolpert, S. (1992), "Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds", Inventiones mathematicae 110 (1): 122.

Se si considerano restrizioni della classe di sottovarietà in cui si lavora la risposta al quesito di Kac può essere positiva. Si può infatti dimostrare che se, nel caso regioni piane $D \subset \mathbb{R}^2$ aperte, connesse, convesse e limitate, se si richiede che il bordo ∂D sia analitico (cioè descritto localmente da una curva della forma $y = g(x)$ oppure $x = h(y)$, dove g e h sono funzioni analitiche reali), allora lo spettro del laplaciano in D con condizioni di annullamento su ∂D individua univocamente D nella classe detta.

Capitolo 8

Equazioni paraboliche: l'equazione del calore e le sue proprietà elementari.

In questo capitolo ci occuperemo di studiare le proprietà elementari delle equazioni alle derivate parziali di tipo parabolico, usando come modello la famosa *equazione del calore*.

8.1 L'equazione del calore dalla termodinamica dei continui.

Il calore è una modalità attraverso la quale i corpi fisici macroscopici si trasferiscono energia senza cedere impulso e momento angolare macroscopico. I corpi, ricevendo o perdendo calore, alterno localmente le loro proprietà secondo ben precise leggi termodinamiche connesse alle temperature locali in gioco. L'*equazione del calore*, malgrado il nome, è un'equazione per la temperatura pensata come funzione del tempo e del posto in un *mezzo continuo* (cioè modellizzabile come un insieme aperto connesso di \mathbb{R}^3 eventualmente dotato di bordo) in grado di trasportare calore al suo interno. Tale equazione è ottenuta tenendo conto delle varie proprietà termodinamiche del calore. Nel seguito considereremo tutte le funzioni che appariranno almeno di classe C^0 e, dove necessario, anche differenziabili con continuità.

Consideriamo un corpo continuo descritto nello spazio di quiete, identificato con \mathbb{R}^3 , di un sistema riferimento, al variare del tempo $t \in \mathbb{R}$. Indichiamo con $\mu = \mu(t, \mathbf{x}) \geq 0$ la densità di massa del continuo e con $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t, \mathbf{x})$ in flusso di calore che attraversa il continuo, pensato come una funzione a valori vettoriali.

Il calore si propaga dentro i corpi, ed in particolare nel continuo che stiamo considerando, con una ben precisa legge che lo collega al gradiente di temperatura (assoluta) $T = T(t, \mathbf{x}) \geq 0$ che incontra nel mezzo, punto per punto ed istante per istante. Infatti il flusso di calore soddisfa l'**equazione di Fourier**:

$$\mathbf{c}(t, \mathbf{x}) = -k(t, \mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} T(t, \mathbf{x}), \quad (8.1)$$

dove $k > 0$ è una proprietà nota del mezzo detta **conduttività termica**. La legge fisica scritta sopra dice che il calore si propaga dalle regioni a più alta temperatura verso quelle a più bassa temperatura, il coefficiente k precisa come tale propagazione dipenda dal mezzo.

Se consideriamo una porzione di continuo V (un insieme aperto a chiusura compatta) la quantità di calore $Q_V(t)$ che esso riceve può arrivare: (i) da una sorgente contenuta nel volume stesso oppure (ii) fluire attraverso la superficie ∂V , che noi supporremo essere regolare ed orientabile. Vale infatti l'equazione di bilancio (n è il versore normale uscente come al solito):

$$\frac{dQ_V(t)}{dt} = \int_V \mu(t, \mathbf{x}) q(t, \mathbf{x}) d^3x - \oint_{+\partial V} \mathbf{c}(t, \mathbf{y}) \cdot n dS(\mathbf{y}), \quad (8.2)$$

dove q è la sorgente di calore per unità di massa. L'equazione di sopra collega il calore ricevuto dal continuo alle "sorgenti di calore" in senso generico (pensando la frontiera del continuo come una sorgente). Tuttavia esiste un legame fenomenologico che lega il calore ricevuto per unità di tempo da una porzione di continuo, *in quiete*¹ nel sistema di riferimento considerato, alla variazione di temperatura per unità di tempo del continuo stesso, prescindendo da *come* tale calore ci sia arrivato. Infatti, se è noto il *calore specifico* per unità di massa $c(t, \mathbf{x}) > 0$ del nostro mezzo continuo, possiamo scrivere l'ulteriore relazione:

$$\frac{dQ_V(t)}{dt} = \int_V \mu(t, \mathbf{x}) c(t, \mathbf{x}) \frac{\partial T}{\partial t} d^3x. \quad (8.3)$$

Mettendo insieme le ultime due equazioni, usando il teorema della divergenza nella prima, abbiamo che deve valere:

$$\int_V \left(\mu c(t, \mathbf{x}) \frac{\partial T}{\partial t} - \mu q + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{c} \right) d^3x = 0.$$

Questa equazione deve valere per ogni aperto a chiusura compatta con bordo regolare orientabile V . Se l'integrando è una funzione continua, l'arbitrarietà di V implica che deve valere, punto per punto nel volume di continuo ed istante per istante, l'equazione:

$$\mu(t, \mathbf{x}) c(t, \mathbf{x}) \frac{\partial T(t, \mathbf{x})}{\partial t} - \mu(t, \mathbf{x}) q(t, \mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{c}(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (8.4)$$

Se ora ricordiamo che, nel continuo, il flusso di calore soddisfa anche l'equazione di Fourier 8.1, troviamo un'equazione per la sola temperatura:

$$\frac{\partial T(t, \mathbf{x})}{\partial t} - \frac{1}{\mu(t, \mathbf{x}) c(t, \mathbf{x})} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (k(t, \mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} T(t, \mathbf{x})) = \frac{q(t, \mathbf{x})}{c(t, \mathbf{x})}. \quad (8.5)$$

che può essere riscritta come l'**equazione del calore** nella sua forma generale (per un mezzo in quiete):

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\nabla_{\mathbf{x}} k \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T}{\mu c} - \frac{k}{\mu c} \Delta_{\mathbf{x}} T = \frac{q}{c}. \quad (8.6)$$

¹In caso contrario è necessario sostituire la derivata parziale temporale della temperatura che appare sotto con la cosiddetta *derivata materiale*, per tenere conto del campo di velocità del continuo.

Deve essere chiaro che si tratta di un'equazione di tipo parabolico normale, secondo la classificazione vista nella sezione 1.3.2. Nel caso in cui la conduttività termica del mezzo, k , sia costante al variare di \mathbf{x} , l'equazione di sopra si riduce alla forma standard che considereremo d'ora in poi:

$$\frac{\partial T(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a(t, \mathbf{x})\Delta_{\mathbf{x}}T(t, \mathbf{x}) = q(t, \mathbf{x}), \quad (8.7)$$

dove $a > 0$ e q (ridefinita inglobando in essa la funzione $1/c$ rispetto alla situazione generale) sono funzioni note.

8.2 Condizioni iniziali ed al contorno, frontiera parabolica.

Nel seguito, come al solito, scriveremo Δ invece di $\Delta_{\mathbf{x}}$ e ∇ invece di ∇_x nei casi in cui ciò non è fonte di fraintendimenti. Inoltre, scrivere che $f \in C^{k_{x^1} \dots k_{x^n}}(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, significa che la funzione f ammette le derivate nelle variabili x^1, \dots, x^n fino ai rispettivi ordini k_{x^1}, \dots, k_{x^n} e le derivate dette sono funzioni continue congiuntamente in tutte le variabili. Nel caso in cui Ω sia l'unione di un aperto Ω_0 e tutto o parte di $\partial\Omega_0$ si assume che esistano anche i limiti delle derivate dall'interno verso i punti di $\partial\Omega_0$ che cadono in Ω e che le funzioni derivate siano congiuntamente continue su Ω .

Consideriamo le equazioni differenziali paraboliche ottenute sopra:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{b}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi - a(t, \mathbf{x})\Delta \varphi = q(t, \mathbf{x}). \quad (8.8)$$

con $a > 0$, \mathbf{b}, q funzioni assegnate, oppure

$$\frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a(t, \mathbf{x})\Delta_{\mathbf{x}}\varphi(t, \mathbf{x}) = q(t, \mathbf{x}), \quad (8.9)$$

con q e $a > 0$ funzioni assegnate.

I problemi tipici che si incontrano lavorando con equazioni paraboliche come (8.8) e (8.9), interpretate con $t \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, sono generalmente del seguente tipo.

$D \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto non vuoto \overline{D} compatto. Si cerca $\varphi \in C^{1+2\mathbf{x}}((0, T) \times D) \cap C^0([0, T] \times \overline{D})$ che, in $(0, T) \times D$, soddisfi (8.8) oppure (8.9) per $a \geq 0$, $\mathbf{b}, q \in C^0((0, T) \times D)$ funzioni assegnate, ovvero $a, q \in C^0((0, T) \times D)$ con $a > 0$, nel caso dell'equazione (8.9).

Si può anche considerare il caso del *problema esterno* in cui si lavora in $[0, T] \times (\mathbb{R}^n \setminus \overline{D})$. Il fatto di lavorare in D con \overline{D} compatto si dice *problema interno*. Restringendoci a considerare il solo problema interno, vengono quindi assegnate *condizioni iniziali* e *condizioni al bordo* sulla funzione φ .

Le **condizioni iniziali** corrispondono alla richiesta:

$$\varphi(0, \mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{D}, \text{ con } \varphi_0 \in C^0(\overline{D}) \text{ assegnata.} \quad (8.10)$$

Le **condizioni al bordo**, riferite all'insieme $S := (0, T] \times \partial D$ (notare che i punti a quota $t = T$ sono inclusi) con vettore normale uscente \mathbf{n} , possono essere di tre tipi distinti:

(i) $\varphi|_S = \psi$ con $\psi \in C^0(S)$ funzione assegnata;

(ii) se ∂D è regolare orientabile ed assumendo ulteriormente $\varphi \in C^1((0, T] \times \overline{D})$, si richiede che $\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi|_S = \psi$ con $\psi \in C^0(S)$ funzione assegnata;

(iii) se ∂D è regolare orientabile ed assumendo ulteriormente $\varphi \in C^1((0, T] \times \overline{D})$, si richiede che $a\varphi|_S + b\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi|_S = \psi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ costanti assegnate tali che $ab \neq 0$ e $\psi \in C^0(S)$ funzione assegnata.

L'insieme chiuso $\partial_p D_T := \overline{D} \cup S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ si dice la **frontiera parabolica** del problema e giocherà un certo ruolo nel seguito.

Osservazioni 8.1.

(1) Differentemente dalle equazioni delle onde, se $\varphi = \varphi(t, \mathbf{x})$ risolve l'equazione del calore, $\varphi' = \varphi(-t, \mathbf{x})$ generalmente *non* la risolve. Questo è dovuto al fatto che il tempo appaia in una derivata prima e non seconda e riflette l'*irreversibilità* fisica dei processi termodinamici di propagazione del calore.

(2) Differentemente dal caso delle equazioni iperboliche, siamo stati molto attenti a separare nettamente i dati che devono valere sul bordo S e condizioni che devono valere a $t = 0$. Il punto è che nelle equazioni paraboliche il passaggio da $t > 0$ a $t = 0$ è molto drastico e le soluzioni perdono regolarità, per esempio passando da funzioni analitiche a funzioni al più continue! In generale è impossibile richiedere più della sola continuità per raccordare le soluzioni con il dato a $t = 0$, mentre sul bordo laterale S si può chiedere molto di più. In ultima analisi ciò è dovuto al fatto che le superfici a $t = 0$ sono superfici caratteristiche delle equazioni paraboliche (8.8) e (8.9), come osservato nel capitolo iniziale.

(3) Si possono considerare casi in cui D non è limitato e sono assegnate condizioni iniziali. In questo caso le condizioni al contorno, che sono importanti per i teoremi di esistenza ed unicità sono, in generale, rimpiazzate da condizioni sull'andamento all'infinito spaziale (cioè per $|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty$ a t fissato) per il campo φ incognito. Anche nel caso di D illimitato può comunque esistere ∂D . Si devono in tal caso anche assegnare condizioni al bordo su $(0, T] \times \partial D$ per ottenere teoremi di esistenza ed unicità. Vedremo questo più avanti.

8.3 Principio del massimo parabolico e teoremi di unicità.

8.3.1 Principio del massimo parabolico in regioni limitate.

Uno strumento fondamentale per provare un teorema di unicità per il problema di Dirichlet ma anche per altri fini, è il teorema noto come *principio del massimo parabolico*, che ha un enunciato simile a quello per le funzioni armoniche, con l'importante differenza che ora la frontiera su cui

la funzione raggiunge il massimo è la frontiera parabolica menzionata sopra e che definiremo formalmente sotto.

Enunciamo e proviamo tale teorema sotto. L'aggettivo "debole" è dovuto al fatto che si può rafforzare la tesi provando che il massimo non può essere raggiunto nell'interno del dominio se non per le funzioni costanti.

Definizione 8.1. Se $D \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto non vuoto e $T > 0$, si definisce il **dominio parabolico** associato a D e T come:

$$D_T := (0, T) \times D$$

e la **frontiera parabolica** di D_T come:

$$\partial_p D_T := (\{0\} \times \overline{D}) \cup ((0, T] \times \partial D).$$

◇

Teorema 8.1. (Principio del massimo parabolico debole in regioni limitate). Sia $D \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto non vuoto con \overline{D} compatto e $T > 0$ e si consideri $\varphi \in C^{1,2 \times}(D_T) \cap C^0(\overline{D_T})$ che soddisfi

$$\frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a \Delta \varphi(t, \mathbf{x}) = q(t, \mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{se } (t, \mathbf{x}) \in D_T, \quad (8.11)$$

per qualche coppia di funzioni $a > 0, q$ definite sul dominio parabolico D_T . Allora il massimo di φ su $\overline{D_T}$ è raggiunto sulla frontiera parabolica $\partial_p D_T$:

$$\max_{\overline{D_T}} \varphi = \max_{\partial_p D_T} \varphi. \quad (8.12)$$

Se la condizione $q(t, \mathbf{x}) \leq 0$ in (8.11) è sostituita da $q(t, \mathbf{x}) \geq 0$, a parità delle altre ipotesi, al posto di (8.12) vale:

$$\min_{\overline{D_T}} \varphi = \min_{\partial_p D_T} \varphi. \quad (8.13)$$

◇

Osservazioni 8.2. Se a parità di tutte le altre ipotesi, la funzione q non è assegnata, ma è noto che, a parità di tutte le altre ipotesi, la condizione (8.11) su φ è rimpiazzata da:

$$\frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a \Delta \varphi(t, \mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{se } (t, \mathbf{x}) \in D_T, \quad (8.14)$$

il teorema si applica ugualmente, ovviamente *definendo* q come il primo membro di (8.14).

Dimostrazione del teorema 8.1. Dimostriamo solo la tesi per il caso $q(t, \mathbf{x}) \leq 0$, dato che l'altro caso si tratta analogamente considerando la funzione $-\varphi$. Assumiamo dunque $q(t, \mathbf{x}) \leq 0$. Proveremo che, per ogni $\epsilon > 0$ tale che $T - \epsilon > 0$, se $(t, \mathbf{x}) \in D_{T-\epsilon}$, allora:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) \leq \max_{\partial_p D_T} \varphi + \epsilon T. \quad (8.15)$$

Si noti che (8.15) implica (8.12). Infatti, se $(t, \mathbf{x}) \in D_T$, per ogni $\epsilon > 0$ tale che $\epsilon < T - t$ $(t, \mathbf{x}) \in D_{T-\epsilon}$ e quindi vale (8.15). L'arbitrarietà di $\epsilon > 0$ implica che $\varphi(t, \mathbf{x}) \leq \max_{\partial_p D_T} \varphi$. Per continuità questo risultato deve valere anche se $(t, \mathbf{x}) \in \overline{D_T}$ che implica (8.12) immediatamente. Per provare (8.15), osserviamo che per la continuità di φ su $\overline{D_{T-\epsilon}}$, (8.15) è equivalente a:

$$\max_{\overline{D_{T-\epsilon}}} \varphi \leq \max_{\partial_p D_T} \varphi + \epsilon T. \quad (8.16)$$

Proviamo (8.16) concludendo la dimostrazione.

Per $\epsilon > 0$ fissato tale che $T - \epsilon > 0$, introduciamo la funzione ausiliaria $u := \varphi - \epsilon t$. Tale funzione soddisfa ovviamente:

$$\frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a \Delta u(t, \mathbf{x}) = q(t, \mathbf{x}) - \epsilon < 0. \quad (8.17)$$

Mostriamo ora che il massimo di u in $\overline{D_{T-\epsilon}}$ è raggiunto su $\partial_p D_{T-\epsilon}$. Se così non fosse ci sarebbe un punto $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D_{T-\epsilon}$ di massimo assoluto. Se il punto è interno (cioè $t < T - \epsilon$), il gradiente di u si annulla in tale punto e la matrice hessiana della funzione $\mathbf{x} \mapsto \varphi(t_0, \mathbf{x})$ deve essere semidefinita negativa per $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. In particolare $\Delta_{\mathbf{x}} u|_{(t_0, \mathbf{x}_0)} \leq 0$. Questo è impossibile perchè implicherebbe diversamente da (8.17):

$$\frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial t} \Big|_{(t_0, \mathbf{x}_0)} - a \Delta_{\mathbf{x}} u(t, \mathbf{x}) \Big|_{(t_0, \mathbf{x}_0)} \geq 0.$$

Se invece $t_0 = T - \epsilon$, le derivate in \mathbf{x} di u si annullano ancora in (t_0, \mathbf{x}_0) , vale ancora $\Delta_{\mathbf{x}} u|_{(t_0, \mathbf{x}_0)} \leq 0$, ma $\frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial t} \Big|_{(t_0, \mathbf{x}_0)} \geq 0$. Anche in questo caso si ottiene il risultato in contrasto con (8.17):

$$\frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial t} \Big|_{(t_0, \mathbf{x}_0)} - a \Delta_{\mathbf{x}} u(t, \mathbf{x}) \Big|_{(t_0, \mathbf{x}_0)} \geq 0.$$

Abbiamo provato che il massimo di u in $\overline{D_{T-\epsilon}}$ è raggiunto su $\partial_p D_{T-\epsilon}$:

$$\max_{\overline{D_{T-\epsilon}}} u \leq \max_{\partial_p D_{T-\epsilon}} u, \quad (8.18)$$

ed essendo $u \leq \varphi$, abbiamo anche:

$$\max_{\partial_p D_{T-\epsilon}} u \leq \max_{\partial_p D_T} \varphi. \quad (8.19)$$

Infine, per definizione di u , vale $\varphi \leq u + \epsilon T$ in $\overline{D_T}$. Prendendo il massimo su $\overline{D_{T-\epsilon}}$ di ambo i membri di questa disuguaglianza, usando (8.18) ed infine (8.19), abbiamo:

$$\max_{\overline{D_{T-\epsilon}}} \varphi \leq \max_{\overline{D_{T-\epsilon}}} u + \epsilon T \leq \max_{\partial_p D_{T-\epsilon}} u + \epsilon T \leq \max_{\partial_p D_T} \varphi + \epsilon T,$$

cioè (8.16):

$$\max_{\overline{D_{T-\epsilon}}} \varphi \leq \max_{\partial_p D_T} \varphi + \epsilon T.$$

La dimostrazione è conclusa \square .

Segue immediatamente il seguente corollario.

Corollario. *Se $D \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto non vuoto con \overline{D} compatto e $T > 0$, usando le stesse notazioni del teorema precedente, si consideri $\varphi \in C^{1,2 \times}(D_T) \cap C^0(\overline{D_T})$ che soddisfi*

$$\frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a \Delta \varphi(t, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{se } (t, \mathbf{x}) \in D_T, \quad (8.20)$$

per qualche funzione $a > 0$ definita in D_T .

Allora:

$$\min_{\partial_p D_T} \varphi \leq \varphi(t, \mathbf{x}) \leq \max_{\partial_p D_T} \varphi \quad \text{se } (t, \mathbf{x}) \in \overline{D_T}, \quad (8.21)$$

ed in particolare:

$$|\varphi(t, \mathbf{x})| \leq \max_{\partial_p D_T} |\varphi| \quad \text{se } (t, \mathbf{x}) \in \overline{D_T}. \quad (8.22)$$

\diamond

Dimostrazione. L'unica cosa da provare è la (8.22). Nel caso generale, per una funzione che ammette massimo e minimo (come la funzione continua φ sul compatto $\overline{D_T}$ o ristretta al compatto $\partial_p D_T$), vale: $\max |f| = \max(|\min f|, |\max f|)$. Allora il teorema precedente implica che:

$$\max_{\overline{D_T}} |\varphi| = \max(|\min_{\overline{D_T}} \varphi|, |\max_{\overline{D_T}} \varphi|) = \max(|\min_{\partial_p D_T} \varphi|, |\max_{\partial_p D_T} \varphi|) = \max_{\partial_p D_T} |\varphi|.$$

Dunque:

$$\max_{\overline{D_T}} |\varphi| = \max_{\partial_p D_T} |\varphi|,$$

che equivale a (8.22). \square

8.3.2 Teorema di unicità per condizioni al bordo di Dirichlet.

Il teorema ed il corollario appena dimostrati permettono di provare un teorema di unicità per il problema con condizioni al bordo di Dirichlet e dimostrare anche che il problema è ben posto nel senso di Hadamard.

Teorema 8.2. **(Unicità e ben posizione del problema parabolico con dati di Dirichlet del massimo parabolico debole).** *Se $D \subset \mathbb{R}^n$ è aperto non vuoto, \overline{D} compatto e $T > 0$, definiti D_T e $\partial_p D_T$ seguendo la definizione 8.1, si considerino $\varphi_1, \varphi_2 \in C^{1,2 \times}(D_T) \cap C^0(\overline{D_T})$ che soddisfino:*

$$\frac{\partial \varphi_i(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a \Delta \varphi_i(t, \mathbf{x}) = q \quad \text{se } (t, \mathbf{x}) \in D_T, \text{ per } i = 1, 2, \quad (8.23)$$

per funzioni $a > 0, q$ definite in D_T .

Valgono allora i fatti seguenti.

(a) Se vale $\varphi_1 \geq \varphi_2$ sulla frontiera parabolica $\partial_p D_T$, allora

$$\varphi_1(t, \mathbf{x}) \geq \varphi_2(t, \mathbf{x}) \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in \overline{D_T}. \quad (8.24)$$

(b) Vale l'identità in $\overline{D_T}$:

$$\max_{\overline{D_T}} |\varphi_1 - \varphi_2| = \max_{\partial_p D_T} |\varphi_1 - \varphi_2|. \quad (8.25)$$

(c) Il problema, con $a > 0, q$ funzioni assegnate su D_T , per funzioni $\varphi \in C^{1+2\mathbf{x}}(D_T) \cap C^0(\overline{D_T})$ tali che:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a \Delta \varphi(t, \mathbf{x}) = q & \text{se } (t, \mathbf{x}) \in D_T, \\ \varphi(0, \mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \overline{D}, \\ \varphi \upharpoonright_{(0, T] \times \partial D} = \psi, \end{cases} \quad (8.26)$$

per assegnati dato iniziale $\varphi_0 \in C^0(\overline{D})$ e dato al bordo $\psi \in C^0((0, T] \times \partial D)$, ammette al più una soluzione. Infine la soluzione in $\overline{D_T}$, se esiste, dipende con continuità, nella norma $\| \cdot \|_\infty$ dai dati iniziali e da quelli al bordo. \diamond

Dimostrazione. Per provare (a) basta considerare $\varphi := \varphi_1 - \varphi_2$ che soddisfa l'equazione omogenea $\frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a \Delta \varphi(t, \mathbf{x}) = 0$ e poi osservare che $\varphi \geq \min_{\partial_p D_T} \varphi$ per il corollario precedente.

(b) segue immediatamente dal corollario precedente e (c) si ha da (b), osservando che se due soluzioni hanno gli stessi dati iniziali su \overline{D} e gli stessi dati al bordo $(0, T] \times \partial D$ allora la loro differenza è nulla sulla frontiera parabolica ed è quindi ovunque nulla per (b). L'ultima affermazione segue immediatamente da (b). \square

8.3.3 Principio del massimo parabolico in regioni spaziali illimitate.

Passiamo a considerare il caso di una regione D illimitata enunciando e provando la corrispondente versione del principio del massimo parabolico.

Teorema 8.3. (Principio del massimo parabolico debole in regioni spaziali illimitate). Se $D \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto non vuoto illimitato e $T > 0$, definiti D_T e $\partial_p D_T$ seguendo la definizione 8.1, si consideri una funzione $\varphi \in C^{1+2\mathbf{x}}(D_T) \cap C^0(\overline{D_T})$, limitata su $\overline{D_T}$ e che soddisfi

$$\frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a \Delta \varphi(t, \mathbf{x}) = q(t, \mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{se } (t, \mathbf{x}) \in D_T, \quad (8.27)$$

per qualche coppia di funzioni $a > 0, q$ definite in D_T con a limitata.

Se $\partial D \neq \emptyset$, allora:

$$\sup_{\overline{D_T}} \varphi = \sup_{\partial_p D_T} \varphi. \quad (8.28)$$

Se la condizione $q(t, \mathbf{x}) \leq 0$ in (8.27) è sostituita da $q(t, \mathbf{x}) \geq 0$, a parità delle altre ipotesi, al posto di (8.28) vale:

$$\inf_{D_T} \varphi = \inf_{\partial_p D_T} \varphi. \quad (8.29)$$

◇

Dimostrazione. Dimostriamo solo la tesi per il caso $q(t, \mathbf{x}) \leq 0$, dato che l'altro caso si tratta analogamente considerando la funzione $-\varphi$. Assumiamo dunque $q(t, \mathbf{x}) \leq 0$. Possiamo sempre ridurci a considerare il caso in cui $\sup_{\partial_p D_T} \varphi = 0$ (semplicemente ridefinendo la φ iniziale come $\varphi - \sup_{\partial_p D_T} \varphi$). In questo caso la tesi si riduce banalmente a provare che se $\varphi|_{\partial_p D_T} \leq 0$ allora $\varphi(t, \mathbf{x}) \leq 0$ per ogni $(t, \mathbf{x}) \in D_T$ (e quindi $(t, \mathbf{x}) \in \overline{D_T}$ per continuità). Dimostriamo che ciò è vero. Definiamo la funzione ausiliaria:

$$w_0(t, \mathbf{x}) := e^{\lambda t} (\cosh x^1) \cdots (\cosh x^n).$$

Se $\lambda > 0$ è abbastanza grande allora, ovunque su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial w_0}{\partial t} - a\Delta w_0 \geq 0.$$

Infatti il calcolo diretto prova che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_0}{\partial t} - a\Delta w_0 &= e^{\lambda t} (\lambda (\cosh x^1) \cdots (\cosh x^n) - a\Delta (\cosh x^1) \cdots (\cosh x^n)) \\ &= e^{\lambda t} (\lambda (\cosh x^1) \cdots (\cosh x^n) - na (\cosh x^1) \cdots (\cosh x^n)) \\ &= e^{\lambda t} ((\lambda - an) (\cosh x^1) \cdots (\cosh x^n)) \geq 0, \end{aligned}$$

dove abbiamo scelto $\lambda > n \sup_{D_T} a$, dato che a è limitato per ipotesi. Definiamo poi $D^{(L)} := ((-L, L)^n) \cap D$ per ogni $L > 0$, dove $(-L, L)^n = (-L, L) \times \cdots \times (-L, L)$ e dove il prodotto cartesiano è eseguito n volte. La funzione:

$$w(t, \mathbf{x}) := \varphi - w_0(t, \mathbf{x}) \frac{\sup_{\overline{D_T}} |\varphi|}{\cosh^n L}$$

soddisfa su $D_T^{(L)} := (0, T) \times D^{(L)}$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - a\Delta w = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - a\Delta \varphi - \frac{\sup_{\overline{D_T}} |\varphi|}{\cosh^n L} \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} - a\Delta w_0 \right) \leq 0$$

per costruzione. Infine, sempre per costruzione vale:

$$w|_{\partial_p D_T^{(L)}} \leq 0.$$

Infatti se $(t, \mathbf{x}) \in \partial_p D_T^{(L)}$ allora deve essere $t = 0$ e in questo caso la disuguaglianza è banalmente soddisfatta perchè $\varphi(0, \mathbf{x}) \leq 0$ per ipotesi (dato che, in tal caso, $(0, \mathbf{x}) \in \partial_p D_T$), oppure $\mathbf{x} \in \partial D$

e/o \mathbf{x} cade sul bordo di $[-L, L]^n$. Nel primo caso $\varphi(t, \mathbf{x}) \leq 0$ e quindi $w|_{\partial_p D_T^{(L)}} \leq 0$ perchè è comunque $w_0(t, \mathbf{x}) \frac{\sup_{\overline{D_T}} |\varphi|}{\cosh^n L} \geq 0$ per costruzione. Nel secondo caso:

$$w_0(t, \mathbf{x}) \frac{1}{\cosh^n L} = e^{\lambda t} \geq 1$$

e dunque, ancora:

$$w(t, \mathbf{x}) = \varphi(t, \mathbf{x}) - w_0(t, \mathbf{x}) \frac{\sup_{\overline{D_T}} |\varphi|}{\cosh^n L} \leq 0 \quad (t, \mathbf{x}) \in \partial_p D_T^{(L)}.$$

Dato che $D^{(L)}$ è limitato, possiamo applicare il principio del massimo parabolico per domini limitati per la funzione w , ottenendo che:

$$\max_{D_T^{(L)}} w \leq \max_{\partial_p D_T^{(L)}} w \leq 0$$

e quindi in particolare $w(t, \mathbf{x}) \leq 0$ se $(t, \mathbf{x}) \in D_T^{(L)}$, che significa:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) \leq w_0(t, \mathbf{x}) \frac{\sup_{\overline{D_T}} |\varphi|}{\cosh^n L}.$$

Si osservi ora che se $(t, \mathbf{x}) \in D_T$, possiamo trovare un $L > 0$ tanto grande per cui $(t, \mathbf{x}) \in D_T^{(L)}$. Allora, se, per ogni fissato $(t, \mathbf{x}) \in D_T$ prendiamo il limite per $L \rightarrow +\infty$ della disuguaglianza scritta sopra, troviamo:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{se } (t, \mathbf{x}) \in D_T.$$

Questo è quanto volevamo provare. \square .

Segue immediatamente il seguente corollario.

Corollario. *Se $D \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto non vuoto e $T > 0$, con le stesse notazioni del teorema precedente, si consideri $\varphi \in C^{1,2 \times}(D_T) \cap C^0(\overline{D_T})$ limitata su $\overline{D_T}$ che soddisfi*

$$\frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a \Delta \varphi(t, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{se } (t, \mathbf{x}) \in D_T, \quad (8.30)$$

per qualche funzione funzione $a > 0$, limitata e definita in D_T .

Se $\partial D \neq \emptyset$, allora:

$$\inf_{\partial_p D_T} \varphi \leq \varphi(t, \mathbf{x}) \leq \sup_{\partial_p D_T} \varphi \quad \text{se } (t, \mathbf{x}) \in \overline{D_T}, \quad (8.31)$$

ed in particolare:

$$|\varphi(t, \mathbf{x})| \leq \sup_{\partial_p D_T} |\varphi| \quad \text{se } (t, \mathbf{x}) \in \overline{D_T}. \quad (8.32)$$

◇

Dimostrazione. L'unica cosa da provare è la (8.32). Nel caso generale, per una funzione che ammette estremo superiore ed inferiore vale: $\sup |f| = \sup(|\inf f|, |\sup f|)$. Allora la dimostrazione procede come nel caso di dominio limitato. □

8.3.4 Teorema di unicità per condizioni al bordo di Dirichlet con domini spaziali illimitati.

Il teorema ed il corollario appena dimostrati permettono di provare un teorema di unicità per il problema con condizioni al bordo di Dirichlet, nel caso di domini illimitati, e dimostrare anche che il problema è ben posto nel senso di Hadamard.

Teorema 8.4. (Unicità e ben posizione del problema parabolico con dati di Dirichlet su dominio spaziale illimitato). *Se $D \subset \mathbb{R}^n$ è aperto non vuoto e $T > 0$, definendo D_T e $\partial_p D_T$ secondo la definizione 8.1, si considerino $\varphi_1, \varphi_2 \in C^{1+2\alpha}(D_T) \cap C^0(\overline{D_T})$ limitate, che soddisfino:*

$$\frac{\partial \varphi_i(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a \Delta \varphi_i(t, \mathbf{x}) = q \quad \text{se } (t, \mathbf{x}) \in D_T, \text{ per } i = 1, 2, \quad (8.33)$$

per funzioni $a > 0, q$ definite in D_T con a limitata.

Valgono allora i fatti seguenti assumendo $\partial D \neq \emptyset$.

(a) Se vale $\varphi_1 \geq \varphi_2$ sulla frontiera parabolica $\partial_p D_T$, allora

$$\varphi_1(t, \mathbf{x}) \geq \varphi_2(t, \mathbf{x}) \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in \overline{D_T}. \quad (8.34)$$

(b) Vale l'identità in $\overline{D_T}$:

$$\sup_{\overline{D_T}} |\varphi_1 - \varphi_2| = \sup_{\partial_p D_T} |\varphi_1 - \varphi_2|. \quad (8.35)$$

(c) Il problema, con $a > 0, q$ funzioni assegnate su $\overline{D_T}$, per funzioni $\varphi \in C^{1+2\alpha}(D_T) \cap C^0(\overline{D_T})$ limitate,

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a \Delta \varphi(t, \mathbf{x}) = q & \text{se } (t, \mathbf{x}) \in D_T, \\ \varphi(0, \mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \overline{D}, \\ \varphi \upharpoonright_{(0, T] \times \partial D} = \psi. \end{cases} \quad (8.36)$$

per assegnati dati iniziali $\varphi_0 \in C^0(\overline{D})$ e dati al bordo $\psi \in C^0((0, T] \times \partial D)$ ammette al più una soluzione.

Infine la soluzione in $\overline{D_T}$, se esiste, dipende con continuità, nella norma $\| \cdot \|_\infty$ dai dati iniziali e da quelli al bordo. ◇

Dimostrazione. La dimostrazione è la stessa che nel caso di D limitato, usando i corrispondenti teoremi per il caso illimitato. □

Appendice A

Un accenno all'approccio moderno per il problema ellittico: soluzioni in senso distribuzionale e teoremi di regolarità ellittica.

In questa appendice tutti gli integrali che appaiono sono riferiti alla misura di Lebesgue e le funzioni considerate sono a valori complessi. Tuttavia, per esempio, scriveremo $C^k(\Omega)$ in luogo di $C^k(\Omega; \mathbb{C})$ per semplicità.

Tutto l'approccio moderno allo studio delle soluzioni dell'equazione di Laplace e Poisson si basa sulla seguente definizione.

Definizione A.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto e sia $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ assegnata. Una funzione $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con $\varphi \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ è detta risolvere l'equazione di Poisson:

$$\Delta\varphi = f$$

in senso debole o, equivalentemente, in senso distribuzionale, se vale l'identità :

$$\int_{\Omega} \varphi \Delta g \, d^n x = \int_{\Omega} f g \, d^n x, \quad \text{per ogni funzione } g \in C_0^\infty(\Omega). \quad (\text{A.1})$$

◇

Chiariamo subito il significato di questa definizione. Prima di tutto vediamo perché si parla di soluzioni *in senso debole*. Supponiamo che $\varphi \in C^2(\Omega)$ risolva l'equazione di Poisson $\Delta\varphi = f$ in senso proprio. Usando l'integrazione per parti, se $g \in C_0^\infty(\Omega)$, si ha immediatamente che:

$$\int_{\Omega} f g \, d^n x = \int_{\Omega} (\Delta\varphi) g \, d^n x = \int_{\Omega} \nabla \cdot [(\nabla\varphi)g] \, d^n x - \int_{\Omega} (\nabla\varphi) \cdot \nabla g \, d^n x$$

$$= \int_{\Omega} \nabla \cdot [(\nabla \varphi)g] d^n x - \int_{\Omega} \nabla \cdot [\varphi \nabla g] d^n x + \int_{\Omega} \varphi \Delta g d^n x .$$

Tenendo conto che g si annulla (con tutte le derivate) prima di arrivare al bordo di Ω , i primi due integrali nell'ultima riga risultano essere nulli (per il secondo teorema fondamentale del calcolo oppure il teorema della divergenza). Pertanto rimane:

$$\int_{\Omega} fg d^n x = \int_{\Omega} f \Delta g d^n x .$$

Abbiamo in tal modo provato che: *le soluzioni in senso proprio sono anche soluzioni in senso debole.*

Non ci aspettiamo che valga il contrario per un motivo elementare: se φ soddisfa l'equazione di Poisson in senso proprio e pertanto vale l'identità (A.1), quest'ultima varrà anche se la funzione φ è ridefinita in modo da non essere più differenziabile su un insieme di misura nulla secondo Lebesgue, per esempio l'insieme dei punti di coordinate razionali in Ω . Tuttavia, se sappiamo che la soluzione in senso distribuzionale φ di $\Delta \varphi = f$, con $f \in C^0(\Omega)$, è una funzione di classe $C^2(\Omega)$, allora possiamo concludere che φ è anche una soluzione in senso proprio. La dimostrazione è abbastanza semplice. Partendo dalla (A.1) e tenendo conto che $\varphi \in C^2(\Omega)$ si ha immediatamente procedendo in senso inverso a quanto fatto sopra:

$$\int_{\Omega} (\Delta \varphi - f)g = 0 d^n x, \quad \text{per ogni } g \in C_0^\infty(\Omega) \quad (\text{A.2})$$

Se fosse $\Delta_x \phi - f(x) \neq 0$ nel punto $x \in \Omega$, per continuità, il segno di tale funzione dovrebbe mantenersi costante in un intorno di x . Supponiamo il segno sia positivo (l'altro caso si studia analogamente) sulla palla aperta $B(x)$ a chiusura compatta con $\overline{B(x)} \subset \Omega$. Stringendo tale palla se necessario, si avrebbe $\min_{\overline{B(x)}} (\Delta \phi - f) \geq k > 0$. Se ora $g \in C_0^\infty(\Omega)$ è tale che $\text{supp } g \subset \overline{B(x)}$, $g \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}^n} g d^n x = 1$ (si possono costruire facilmente tali funzioni), allora:

$$\int_{\Omega} (\Delta \phi - f)g d^n x = \int_{\overline{B(x)}} (\Delta \phi - f)g d^n x \geq \int_{\overline{B(x)}} kg d^n x \geq k > 0 .$$

La nozione di soluzione distribuzionale è legata ad una nozione più generale: quella di *derivata in senso debole*.

Definizione A.2. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto non vuoto, si dice che $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} (\mathbb{C})$ **ammette derivata**

$$h = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f}{\partial x^{1\alpha_1} \dots \partial x^{n\alpha_n}}$$

in senso debole, se $h \in \mathcal{L}_{loc}^1(\Omega)$ e vale:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} g}{\partial x^{1\alpha_1} \dots \partial x^{n\alpha_n}} f d^n x = (-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \int_{\Omega} gh d^n x, \quad \text{per ogni } g \in C_0^\infty(\Omega) .$$

◇

Procedendo come prima si verifica che se h è la derivata in senso proprio (o *forte*) dell'ordine detto di f allora è anche derivata in senso distribuzionale di f . Viceversa se h è la derivata in senso proprio dell'ordine detto di f e vale $f \in C^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}(\Omega)$ allora h è la derivata in senso proprio (o *forte*) dell'ordine detto di f .

Deve essere chiaro che le soluzioni in senso distribuzionale di $\Delta\varphi = f$ non sono altro che le soluzioni di tale equazione quando il laplaciano è inteso come operatore differenziale in senso debole.

La procedura moderna per risolvere l'equazione di Poisson (aggiungendo dati al bordo se assegnati) è decomposta in due passi:

- (i) cercare, se esiste, una soluzione *in senso debole* dell'equazione considerata,
- (ii) dimostrare, se possibile, che tale soluzione o una sua ri-definizione su insiemi di misura nulla, è soluzione anche in senso ordinario. Cioè, nella terminologia moderna, è soluzione in *senso forte*.

La tecnologia matematica per determinare le soluzioni in senso distribuzionale di una qualsiasi equazione differenziale a derivate parziali, non necessariamente quella di Poisson, è stata enormemente sviluppata e costituisce un ramo importantissimo dell'analisi funzionale moderna. Essa si basa sulla definizione e sull'uso delle proprietà di funzioni che appartengono ad opportuni spazi funzionali detti *spazi di Sobolev* [Ru91], sui quali si rimanda a corsi più avanzati [Ta96]. Diremo solo che vale la seguente definizione.

Definizione A.3. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto non vuoto e $k = 0, 1, 2, \dots$ è fissato, lo **spazio di Sobolev** $W^k(\Omega)$ è costituito dalle funzioni $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ per le quali esistono le derivate in senso debole fino all'ordine k , sono funzioni misurabili, e soddisfano:

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_n} f}{\partial x^{1\alpha_1} \dots \partial x^{n\alpha_n}} \right|^2 dx < +\infty \quad \text{per } \alpha_1 = 0, 1, \dots, \text{ con } i = 1, \dots, n \text{ tali che } \sum_i \alpha_i = k.$$

◇

Nel caso specifico di equazioni lineari di tipo ellittico, esistono teoremi di regolarità che stabiliscono sotto quali ipotesi soluzioni deboli sono soluzioni in senso forte: sono i noti *teoremi di regolarità ellittica*. Tali teoremi sono stati estesi anche a casi più generali (equazioni ipoellittiche) in particolare dal matematico L. Hörmander. I teoremi fondamentali sono due: Il *Lemma di Sobolev* [Ru91] ed il *teorema di regolarità ellittica di Friedrichs* [RS75]. Il primo, nella versione più elementare (la tesi vale infatti imponendo solo che le derivate *non miste*, fino all'ordine r , esistano in senso distribuzionale e siano funzioni a quadrato sommabile [Ru91]), afferma quanto segue. (Ricordiamo che $g \in \mathcal{L}_{loc}^2(\Omega)$ quando $g\chi_A \in \mathcal{L}^2(A)$ per ogni aperto limitato $A \subset \Omega$ e dove χ_A è la funzione caratteristica di A .)

Teorema A.1. (**Lemma di Sobolev.**) *Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto e $r \geq 0$ intero. Se, per $0 \leq k \leq r$, f ammette derivate in senso debole, $\frac{\partial^k f}{\partial (x^i)^k}$, separatamente in ogni*

variabile x^i con $i = 1, 2, \dots, n$ e tutte queste derivate sono funzioni $\mathcal{L}_{loc}^2(\Omega)$, allora f differisce su un insieme di misura nulla da una funzione $C^p(\Omega)$, per ogni intero $p \geq 0$ tale che:

$$r > p + \frac{n}{2}.$$

(In particolare quindi $f \in C^p(\Omega)$ se f è anche continua.) \diamond

Osservazioni A.1. Si noti che non è richiesto nella tesi che esistano le derivate miste (in senso debole), tuttavia la tesi sicuramente è verificata se più fortemente $f \in W^r(\Omega)$.

Il secondo teorema, nella versione più semplice (si generalizza infatti ad operatori ellittici di ordine superiore al secondo) si enuncia come segue.

Teorema A.2. (Teorema di regolarità ellittica di Friedrichs.) Sia $P\varphi = f$ un'equazione differenziale alle derivate parziali, lineare del secondo ordine su $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, a coefficienti dati da funzioni di classe $C^2(\Omega)$, dove:

$$P\varphi = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left(A^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \varphi \right).$$

Si supponga che la matrice caratteristica del sistema $A = A(x)$ associata all'operatore P soddisfi la condizione di **forte ellitticità**, per qualche $C > 0$:

$$\sum_{i,j=1}^n A^{ij}(x) y_i y_j \geq C \|y\|^2, \quad \text{per ogni } x \in \Omega \text{ e ogni } y \in \mathbb{R}^n.$$

Se $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ risolve in senso distribuzionale l'equazione $P\varphi = f$, cioè:

$$\int_{\Omega} \varphi P g \, d^n x = \int_{\Omega} f g \, d^n x, \quad \text{per ogni } g \in C_0^\infty(\Omega)$$

e $f \in W^k(\Omega)$ per qualche $k = 0, 1, \dots$ fissato, allora $\varphi \in W^{k+2}(\Omega)$. \diamond

A titolo di esempio, supponiamo che $f \in C^\infty(\Omega)$ e che $\varphi \in W^k(\Omega)$, per qualche $k = 0, 1, \dots$ fissato, sia soluzione in senso distribuzionale di $P\varphi = f$. Se le ipotesi del teorema di Friedrichs sono valide, allora $\varphi \in W^\infty(\Omega)$. A sua volta però il Lemma di Sobolev prova che, più fortemente, modificando φ su un insieme di misura nulla ed ottenendo φ' , si ha che $\varphi' \in C^\infty(\Omega)$. Mostriamo che questa nuova funzione φ' è in realtà una *soluzione in senso classico dell'equazione* $P\varphi = f$. Infatti, per ipotesi vale:

$$\int_{\Omega} \varphi P g \, d^n x = \int_{\Omega} f g \, d^n x$$

per ogni $g \in C_0^\infty(\Omega)$. La ridefinizione di φ in φ' non altera l'identità scritta sopra visto che le due funzioni differiscono su un insieme di misura nulla. Possiamo allora usare la derivazione per parti ottenendo che:

$$\int_{\Omega} (P\varphi') g \, d^n x = \int_{\Omega} f g \, d^n x$$

per ogni $g \in C_0^\infty(\Omega)$. Procedendo come mostrato sopra, l'arbitrarietà di $g \in C_0^\infty(\Omega)$ implica che $P\varphi' = f$ sia valida in senso classico su Ω . Per cui la funzione φ , ridefinita come una funzione $\varphi' \in C^\infty(\Omega)$, grazie al Lemma di Sobolev, soddisfa in senso classico l'equazione differenziale.

Appendice B

Limite e derivazione sotto il segno integrale e di serie dalla teoria della misura.

In questa appendice dimostreremo alcuni teoremi che consentono di scambiare il simbolo di integrale e di serie con quello di derivata, facendo uso essenzialmente del teorema della convergenza dominata di Lebesgue. Il caso della serie sarà visto come sottocaso del caso integrale, in riferimento alla misura che conta i punti su \mathbb{N} . I teoremi che daremo sono quindi, nel caso dell'integrale, riferiti ad una generica misura positiva assegnata su uno spazio misurabile.

Note.

(1) Nel seguito, quando ci riferiremo a serie *assolutamente convergenti* (cioè la serie dei valori assoluti converge ad un numero finito) indicheremo a volte la somma con

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n,$$

dove non è specificato l'ordine con cui si esegue la somma. Ciò non è scorretto dato che le serie assolutamente convergenti possono essere riordinate a piacimento senza alterarne la somma per il teorema 1.2.

(2) La misura dell'integrale di Lebesgue sarà ancora indicata con $d^n x$, che è lo stesso simbolo usato nell'integrale di Riemann. Questa notazione non genererà confusione in quanto nelle situazioni in cui compariranno entrambi gli integrali essi coincideranno in valore.

B.1 Teoremi della convergenza monotona e dominata.

Se (X, Σ, μ) è uno spazio misurabile, dove X è l'insieme ambiente, Σ una σ -algebra su X e $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ una misura positiva su X , lo strumento fondamentale per ottenere i teoremi di scambio tra simbolo di integrale e quello di limite/derivata è il ben noto *teorema della*

convergenza dominata di Lebesgue [Ru82]. Per completezza prima citiamo anche il cosiddetto teorema della convergenza monotona [Ru82] dato che lo abbiamo usato nelle dispense. Nel seguito $\mathcal{L}^1(X, \Sigma, \mu)$ indicherà lo spazio delle funzioni misurabili su X integrabili rispetto a μ . Nel caso in cui $X = A \subset \mathbb{R}^n$ è Lebesgue-misurabile (cioè appartiene alla σ -algebra di Lebesgue) e μ è la misura di Lebesgue $d^n x$ su \mathbb{R}^n , scriveremo semplicemente $\mathcal{L}^1(A)$.

Teorema B.1. (Convergenza monotona.) *In riferimento allo spazio misurabile (X, Σ, μ) , sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite su X che siano Σ -misurabili ed μ -integrabili. Se valgono le due condizioni:*

- (i) $f_n(x) \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
 - (ii) $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ quasi ovunque su X e per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- allora, posto $f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$, vale

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

◇

Passiamo al teorema della convergenza dominata.

Teorema B.2. (Convergenza dominata.) *In riferimento allo spazio misurabile (X, Σ, μ) , sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite su X che siano Σ -misurabili ed μ -integrabili. Se valgono le due condizioni:*

- (i) esiste $f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \in \mathbb{C}$ quasi ovunque rispetto a μ su X ,
- (ii) esiste $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ con $g \geq 0$ quasi ovunque su X e tale che:

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \text{quasi ovunque su } X, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N},$$

allora valgono i seguenti fatti.

- (a) $f \in \mathcal{L}^1(X, \Sigma, \mu)$,
- (b) $\int_X |f| d\mu \leq \int_X g d\mu$,
- (c) $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$,
- (d) $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$ per $n \rightarrow +\infty$ ovvero, in altre parole:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right) d\mu. \quad (\text{B.1})$$

◇

Osservazioni B.1.

(1) Il controesempio classico per il teorema della convergenza dominata è quello in cui si lavora in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ con le gaussiane di centro $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) := e^{-(x-n)^2}$. Vale, a causa dell'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-n)^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \sqrt{\pi}.$$

D'altra parte, se $x \in \mathbb{R}$ è fissato, si ha immediatamente che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-(x-n)^2} = 0.$$

Concludiamo che la (B.1) non può valere, dato che il primo membro varrebbe $\sqrt{\pi}$ nel caso in esame, mentre il secondo membro varrebbe 0.

La spiegazione del fatto che non si possa applicare il teorema della convergenza dominata è evidente. Non può esistere una funzione g che soddisfa le ipotesi: in ciascun punto dovrebbe maggiorare ogni gaussiana traslata arbitrariamente verso destra. Si può dimostrare che questo implica che g non possa essere integrabile. In realtà l'inesistenza di g segue immediatamente dal fatto che non vale (B.1) come abbiamo direttamente appurato.

(2) La non esistenza di una funzione g che soddisfi le ipotesi del teorema della convergenza dominata, *non* implica automaticamente che non valga la (B.1), visto che il teorema della convergenza dominata fornisce condizioni *sufficienti*, ma non necessarie affinché valga la (B.1).

(3) Il teorema della convergenza dominata di Lebesgue include il caso in cui si esaminano delle serie. In questo caso (X, Σ, μ) è costruito in questo modo: $X = \mathbb{N}$, Σ è $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: l'insieme delle parti di \mathbb{N} , e $\mu = \delta$, la *misura che conta i punti*: $\delta(N) =$ numero di elementi di $N \subset \mathbb{N}$. Le funzioni misurabili sono le successioni $\{a(m)\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. Infine le funzioni integrabili sono le successioni tali che

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} |a(m)| < +\infty.$$

In altre parole le funzioni integrabili non sono altro che le successioni che producono serie assolutamente convergenti. Si osservi che in tal caso, come ben noto, la somma della serie $\sum_{m \in \mathbb{N}} a(m)$ *non* dipende dall'ordinamento con cui si esegue la somma.

In questo caso, il teorema di Lebesgue fornisce condizioni sufficienti per poter scambiare il simbolo di somma con quello di limite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{m \in \mathbb{N}} a_n(m) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(m) \right),$$

quando si ha *una classe* di successioni $\{\{a_n(m)\}_{m \in \mathbb{N}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ per cui $a_n(m) \rightarrow a(m)$ se $n \rightarrow +\infty$.

(4) Il teorema della convergenza dominata benché molto più generale (vale con ogni tipo di misura e lavora anche su domini di misura infinita), fornisce una dimostrazione alternativa del classico teorema riferito all'integrale di Riemann enunciato alla fine di (a) nel teorema seguente.

Teorema B.3. *Si consideri una classe di funzioni a valori in \mathbb{R} , $\{f_t\}_{t \in A}$, definite sul compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ e dove $A \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto. Se valgono le condizioni seguenti:*

- (i) $K \ni x \mapsto f_t(x)$ è continua sul compatto K per ogni $t \in I$,
- (ii) esiste

$$A \times K \ni (t, x) \mapsto \frac{\partial f_t(x)}{\partial t}$$

è continua (congiuntamente nelle due variabili), allora la funzione (tutti gli integrali sono indifferentemente intesi nel senso di Riemann o Lebesgue):

$$I \ni t \mapsto \int_K f_t(x) d^n x$$

è di classe $C^1(I)$ e vale l'identità :

$$\frac{d}{dt} \int_K f_t(x) d^n x = \int_K \frac{\partial f_t(x)}{\partial t} d^n x. \quad (\text{B.2})$$

◇

(5) Il teorema della convergenza dominata permette di dare una dimostrazione alternativa delle seconde parti di (a) e (b) nel teorema 1.3 come mostriamo ora provando (a) ((b) segue nello stesso modo). Essendo le funzioni f_n continue su un compatto, l'integrale di esse secondo Riemann coincide con quello di Lebesgue [Ru82]. Dato che la successione di funzioni continue converge uniformemente, il limite di tali funzioni sarà ancora una funzione continua $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ (per cui integrabile secondo Riemann e Lebesgue e i due integrali coincideranno nuovamente). Sia $M = \max_K |f(x)|$, che esiste finito in virtù del fatto che K è compatto e f continua. In virtù della convergenza uniforme, se $\epsilon > 0$ esisterà $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che, se $n > N_\epsilon$

$$\max_K |f_n - f| \leq \epsilon.$$

Quindi in particolare:

$$-\epsilon - M < f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon < M + \epsilon, \quad \text{per ogni } x \in K.$$

In particolare, per $n > N_\epsilon$:

$$|f_n(x)| < M + \epsilon, \quad \text{per ogni } x \in K.$$

Possiamo allora applicare il teorema convergenza dominata con $g(x) := M + \epsilon$ costantemente su K , provando la (B.1) che coincide con la nostra tesi. Si noti che g è per costruzione in $\mathcal{L}^1(K)$ dato che $\int_K |g| d^n x = (M + \epsilon) \text{Vol}(K)$ dove $\text{Vol}(K)$ è la misura di Lebesgue (coincidente con quella di Peano-Jordan-Riemann) di K che esiste ed è finita essendo K un compatto.

Per studiare il problema di scambiare il simbolo di derivata con quello di integrale e di serie abbiamo bisogno di una formulazione leggermente modificata del teorema della convergenza dominata.

Teorema B.4. (Convergenza dominata 2.) *Se si generalizzano le ipotesi del teorema B.2 rimpiazzando la successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con una famiglia di funzioni $\{f_t\}_{t \in A} \subset \mathcal{L}^1(X, \mu)$ dove $A \subset \mathbb{R}$ è un intorno aperto di $t_0 \in \mathbb{R}$, in modo tale che:*

(i) *esiste $f(x) := \lim_{t \rightarrow t_0} f_t(x) \in \mathbb{C}$ quasi ovunque rispetto a μ su X ,*

(ii) esiste $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ con $g \geq 0$ quasi ovunque su X e tale che:

$$|f_t(x)| \leq g(x), \quad \text{quasi ovunque su } X, \text{ per ogni } t \in A,$$

gli enunciati (a), (b), (c) e (d) del teorema B.2 sono ancora validi sostituendo ovunque $\lim_{n \rightarrow +\infty}$ con $\lim_{t \rightarrow t_0}$. \diamond

Dimostrazione. La tesi è immediata conseguenza del teorema della convergenza dominata e del noto risultato di analisi che afferma che: *una funzione tra due spazi metrici $f : X_1 \rightarrow X_2$ ammette limite $y \in X_2$ per $x \rightarrow x_0 \in X_1$ se e solo se ammette tale limite per successioni, ovvero, per ogni successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X_1$ vale*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = y.$$

Nel caso in esame $X_1 = A \subset \mathbb{R}^m$ e $X_2 = \mathbb{C}$ dotati delle distanze standard. \square

Questa formulazione del teorema della convergenza dominata ha diverse conseguenze immediate sulle serie di funzioni. A titolo di esempio citiamo il seguente corollario che si dimostra subito lavorando sullo spazio con misura $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \delta)$ già visto in un precedente esempio.

Proposizione B.1. *Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni a valori in \mathbb{C} (o \mathbb{R}) definite sull'insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ tale che, per ogni $t \in A$ valga*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n(t)| < +\infty.$$

e, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste finito

$$f_n = \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t)$$

dove t_0 è un punto di accumulazione di A (includendo valori infiniti come casi limite). Se esiste $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $g_n \geq 0$ e $\sum_{n \in \mathbb{N}} g_n < +\infty$ tale che:

$$|f_n(t)| \leq g_n, \quad \text{per ogni } t \in A,$$

allora, per ogni $t_0 \in A$:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \quad \text{e} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n| < +\infty.$$

\diamond

B.2 Derivazione sotto il segno di integrale e di serie.

Possiamo allora enunciare e provare il teorema fondamentale riguardante la derivazione sotto il segno di integrale per una misura positiva generale.

Teorema B.5. (Derivazione sotto il segno di integrale.) In riferimento allo spazio misurabile (X, Σ, μ) , si consideri una famiglia di funzioni $\{f_t\}_{t \in A} \subset \mathcal{L}^1(X, \mu)$ dove $A \subset \mathbb{R}^m$ è un insieme aperto e $t = (t^1, \dots, t^m)$. Se valgono le seguenti due condizioni:

(i) per un certo valore k in $\{1, 2, \dots, n\}$ esistono le derivate:

$$\frac{\partial h_t(x)}{\partial t^k}, \quad \text{per ogni } x \in X \text{ e } t \in A$$

(ii) esiste $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ con $g \geq 0$ quasi ovunque su X e tale che:

$$\left| \frac{\partial h_t(x)}{\partial t^k} \right| \leq g(x), \quad \text{quasi ovunque su } X, \text{ per ogni } t \in A,$$

allora valgono i seguenti fatti.

(a) $X \ni x \mapsto \frac{\partial h_t}{\partial t^k} \in \mathcal{L}^1(X, \Sigma, \mu)$,

(b) si possono scambiare i simboli di integrale con quello di derivata per ogni $t \in A$:

$$\frac{\partial}{\partial t^k} \int_X h_t(x) d\mu(x) = \int_X \frac{\partial h_t(x)}{\partial t^k} d\mu(x). \quad (\text{B.3})$$

Se infine:

(iii) per una fissata g la condizione in (ii) vale contemporaneamente per tutti i valori di $k = 1, 2, \dots, m$, quasi ovunque in $x \in X$ e tutte le funzioni (per ogni $t \in A$ fissato):

$$A \ni t \mapsto \frac{\partial h_t(x)}{\partial t^k}$$

sono continue, allora

(c) la funzione:

$$A \ni t \mapsto \int_X h_t(x) d\mu(x)$$

è in $C^1(A)$. \diamond

Dimostrazione. Notiamo che, per ogni $t \in A$, le funzioni $X \ni x \mapsto \frac{\partial h_t}{\partial t^k}$ sono sicuramente misurabili essendo limite (usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale) di funzioni misurabili. Inoltre sono μ -integrabili dato che sono maggiorate, in valore assoluto, da una funzione integrabile per l'ipotesi (ii). Fissiamo $t_0 \in A$. Considerando il rapporto incrementale si ha, dove scriviamo, un po' impropriamente, $t_0 + \tau^k$ al posto di $(t_0^1, \dots, t_0^{k-1}, t_0^k + \tau^k, t_0^{k+1}, \dots, t_0^m)$:

$$\frac{\partial}{\partial t^k} \Big|_{t_0} \int_X h_t(x) d\mu(x) = \lim_{\tau^k \rightarrow 0} \int_X \frac{h_{t_0 + \tau^k}(x) - h_{t_0}(x)}{\tau^k} d\mu(x).$$

D'altra parte, per il teorema di Lagrange (restringendosi a lavorare in un intorno aperto e convesso di t_0) e tenendo conto dell'ipotesi (ii) abbiamo:

$$\left| \frac{h_{t_0 + \tau^k}(x) - h_{t_0}(x)}{\tau^k} \right| = \left| \frac{\partial h_t(x)}{\partial t} \Big|_{t(\tau^k, x)} \right| \leq g(x),$$

dove $t(\tau^k, x)$ è un punto che si trova tra t_0 e $(t_0^1, \dots, t_0^{k-1}, t_0^k + \tau^k, t_0^{k+1}, \dots, t_0^m)$ sul segmento che unisce tale coppia di punti. Possiamo allora applicare il teorema B.4 per:

$$f_{\tau^k}(x) := \frac{h_{t_0+\tau^k}(x) - h_{t_0}(x)}{\tau^k},$$

ottendo che esiste il limite

$$\lim_{\tau^k \rightarrow 0} \int_X \frac{h_{t_0+\tau^k}(x) - h_{t_0}(x)}{\tau^k} d\mu(x) =: \left. \frac{\partial}{\partial t^k} \right|_{t_0} \int_X h_t(x) d\mu(x),$$

e vale:

$$\int_X \lim_{\tau^k \rightarrow 0} \frac{h_{t_0+\tau^k}(x) - h_{t_0}(x)}{\tau^k} d\mu(x) =: \int_X \left. \frac{\partial h_t(x)}{\partial t^k} \right|_{t_0} d\mu(x).$$

La tesi è stata provata per quanto riguarda (a) e (b). La dimostrazione di (c) è immediata: dal teorema B.4 tenendo conto dell'ipotesi (ii) si ha che ogni funzione, per $k = 1, \dots, m$,

$$A \ni t \mapsto \frac{\partial}{\partial t^k} \int_X h_t(x) d\mu(x)$$

è continua, da cui la tesi. \square

Osservazioni B.2. Nell'ipotesi di validità di (c) la funzione

$$A \ni t \mapsto \int_X h_t(x) d\mu(x)$$

risulta essere $C^1(A)$ e quindi differenziabile su A come funzione di più variabili.

Il teorema B.5 riproduce, come sottocaso il teorema classico B.3. È però fondamentale notare che il teorema B.5 ha validità molto più generale, in quanto lavora con l'integrale di Lebesgue o qualsiasi altra misura positiva, non richiede la continuità delle derivate nelle variabili congiuntamente: lo spazio X su cui si integra nel teorema B.5 potrebbe non essere uno spazio topologico e può anche avere misura infinita.

Dimostrazione del Teorema B.3. Dato che si integra su un compatto, la richiesta di continuità in x di f e della sua derivata assicura che gli integrali di Riemann considerati esistano e coincidano con quelli di Lebesgue. Per ogni $t_0 \in A$ e sia $A_0 \subset A$ un intervallo aperto a chiusura compatta, con $t_0 \in A_0$. La dimostrazione è un'immediata conseguenza del fatto che la funzione

$$\overline{A_0} \times K \ni (t, x) \mapsto \frac{\partial f_t(x)}{\partial t}$$

essendo continua sarà limitata, in valore assoluto, da qualche costante $M > 0$. Pertanto possiamo applicare il teorema B.5 usando come funzione g quella che vale costantemente M su K . \square

Infine, per quanto riguarda le serie di funzioni, il teorema B.5 si specializza alla seguente proposizione lavorando sullo spazio con misura $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \delta)$.

Proposizione B.2. *Si consideri una successione di funzioni $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dove $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, con $A \subset \mathbb{R}^m$ insieme aperto, $t = (t^1, \dots, t^m)$ e si assuma che valga la convergenza assoluta della serie associata alle f_n :*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n(t)| < +\infty, \quad \text{per ogni } t \in A,$$

per cui in particolare anche la serie delle f_n (senza valore assoluto) converge per ogni valore di t . Se sono verificate le seguenti due condizioni:

(i) per un certo valore k in $\{1, 2, \dots, n\}$ esistono le derivate:

$$\frac{\partial f_n(t)}{\partial t^k}, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ e } t \in A$$

(ii) esiste una successione $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $0 \leq g_n$ costante, con $\sum_{n \in \mathbb{N}} g_n < +\infty$, e tale che:

$$\left| \frac{\partial f_n(t)}{\partial t^k} \right| \leq g_n, \quad \text{per ogni } t \in A \text{ e } n \in \mathbb{N},$$

allora valgono i seguenti fatti.

(a) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{\partial f_n(t)}{\partial t^k} \right| < +\infty$, per cui in particolare anche la serie delle derivate f_n rispetto a t^k (senza valore assoluto) converge per ogni valore di t ,

(b) si possono scambiare i simboli di integrale con quello di somma per ogni $t \in A$:

$$\frac{\partial}{\partial t^k} \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\partial f_n(t)}{\partial t^k}. \quad (\text{B.4})$$

Se infine:

(iii) per una fissata successione di costanti $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la condizione in (ii) vale contemporaneamente per tutti i valori di $k = 1, 2, \dots, m$, e tutte le funzioni (per ogni $t \in A$ fissato):

$$A \ni t \mapsto \frac{\partial f_n(t)}{\partial t^k}$$

sono continue, allora

(c) la funzione:

$$A \ni t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(t)$$

è in $C^1(A)$. \diamond

Diversamente dal teorema classico 1.4 di derivazione sotto il segno di serie, questo teorema non richiede (eccetto che per la validità dell'ultimo punto) che le derivate delle funzioni nella serie siano funzioni continue. Non è nemmeno richiesta la convergenza uniforme della serie delle funzioni non derivate. La condizione (ii) in ogni caso assicura tra l'altro la convergenza uniforme della serie delle derivate per il teorema 1.1.

Appendice C

Relazioni di ortogonalità tra funzioni trigonometriche utili nella teoria della serie di Fourier.

Nel seguito dimostreremo alcune relazioni di ortogonalità per funzioni trigonometriche o esponenziali immaginarie definite, nei primi due casi, sull'intervallo $J := [a, b]$ con $b - a = L$ (possiamo pensare in particolare che $b = L$ e $a = 0$, oppure che $b = L/2$ e $a = -L/2$). Nell'ultimo caso faremo invece esplicito riferimento all'intervallo $J = [0, L]$. La nozione di ortogonalità è quella riferita al prodotto scalare standard di $L^2(J, dx)$.

C.1 Esponenziali immaginari periodici su $J = [a, a + L]$.

Cominciamo con le relazioni di ortogonalità per le funzioni esponenziali complesse periodiche, di periodo L/m (se $m \neq 0$) sull'intervallo J di lunghezza L e della forma: $J \ni x \mapsto e^{i\frac{2\pi m}{L}x}$ con $m \in \mathbb{Z}$. Queste funzioni sono autofunzioni dell'operatore $-\frac{d^2}{dx^2}$, periodiche su J , con autovalori rispettivamente $\left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2$. Vogliamo provare le relazioni di ortogonalità:

$$\int_J e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} e^{i\frac{2\pi m}{L}x} dx = L\delta_{nm}. \quad (\text{C.1})$$

Si osservi che le relazioni di ortogonalità scritte sopra dicono che il sistema di funzioni complesse:

$$\frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in J,$$

definisce un sistema ortonormale nello spazio di Hilbert $L^2(J, dx)$. Questo sistema risulta anche essere completo, cioè definisce una base hilbertiana dello spazio di Hilbert $L^2(J, dx)$.

Passiamo a provare (C.1). Nel caso in cui $n = m$, l'integrale si riduce all'integrale della funzione

costante 1 sull'intervallo di misura L , per cui la (C.1) è evidente in tal caso. Non resta che provare tale identità per $n \neq m$, che significa, definendo $k := m - n$:

$$\int_J e^{i\frac{2\pi k}{L}x} dx = 0 \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (\text{C.2})$$

Tenendo conto del fatto che $e^{i\frac{2\pi k}{L}x} = \cos\left(\frac{2\pi k}{L}x\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{L}x\right)$ abbiamo:

$$\int_J e^{i\frac{2\pi k}{L}x} dx = \int_J \cos\left(\frac{2\pi k}{L}x\right) dx + i \int_J \sin\left(\frac{2\pi k}{L}x\right) dx.$$

Cambiando variabile di integrazione e passando a $\theta := \frac{2\pi k}{L}x$ abbiamo che:

$$\int_J e^{i\frac{2\pi k}{L}x} dx = \frac{L}{2\pi k} \int_{\Theta_k} \cos \theta d\theta + i \frac{L}{2\pi k} \int_{\Theta_k} \sin \theta d\theta,$$

dove Θ_k è un segmento di lunghezza $2k\pi$ (per esempio $[0, 2k\pi]$ se $I = [0, L]$). Dato che la funzione seno e la funzione coseno sono periodiche di periodo 2π , abbiamo alla fine che:

$$\int_J e^{i\frac{2\pi k}{L}x} dx = \frac{L}{2\pi} \int_{\Theta_1} \cos \theta d\theta + i \frac{L}{2\pi} \int_{\Theta_1} \sin \theta d\theta = 0,$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che l'integrale della funzione seno e quello della funzione coseno, eseguito su un segmento di lunghezza 2π è sempre nullo, come si calcola immediatamente tenendo anche conto della periodicità di 2π di tali funzioni. La (C.1) risulta essere completamente provata.

C.2 Funzioni seni e coseni periodiche su $J = [a, a + L]$.

Consideriamo ora le funzioni seno e coseno definite sull'intervallo J di lunghezza L e di periodicità ancora L/n con $n = 1, 2, \dots$, cioè:

$$J \ni x \mapsto \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e

$$J \ni x \mapsto \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Tutte queste funzioni sono autofunzioni reali dell'operatore $-\frac{d^2}{dx^2}$, periodiche su J , con autovalori rispettivamente $\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2$. Vogliamo provare le relazioni di ortogonalità:

$$\int_J \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx = \frac{L\delta_{nm}}{2}, \quad \int_J \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx = \frac{L\delta_{nm}}{2}, \quad (\text{C.3})$$

$$\int_J \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx = 0, \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (\text{C.4})$$

Si osservi che queste relazioni dicono che il sistema di funzioni reali:

$$\frac{1}{\sqrt{L}}, \quad \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right), \quad \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, x \in J$$

definisce un sistema ortonormale nello spazio di Hilbert complesso $L^2(J, dx)$. Questo sistema risulta anche essere completo, cioè definisce una base hilbertiana dello spazio di Hilbert $L^2(J, dx)$. Passiamo a provare le relazioni di ortogonalità scritte sopra. Cominciamo dalla prima nel caso $n = m$. In tal caso essa si scrive:

$$\int_J \cos^2\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx = \frac{L}{2}.$$

Per dimostrare questa identità osserviamo che, se

$$I := \int_J \cos^2\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx$$

allora, procedendo come per l'esponenziale immaginario, dove Θ_1 è un intervallo di lunghezza 2π (per esempio $[0, 2k\pi]$ se $I = [0, L]$) con un semplice cambio di variabile si ha:

$$I = \frac{L}{2\pi} \int_{\Theta_1} \cos^2 \theta d\theta.$$

Usando la relazione trigonometrica fondamentale $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, abbiamo che:

$$I = L - \frac{L}{2\pi} \int_{\Theta_1} \sin^2 \theta d\theta.$$

Tenendo conto che $\sin^2 \theta$, periodica di periodo π , non è altro che la funzione $\cos^2 \theta$, che ha lo stesso periodo, traslata di un semiperiodo $\pi/2$ e che l'integrale è calcolato su un doppio periodo, abbiamo che:

$$\int_{\Theta_1} \sin^2 \theta d\theta = \int_{\Theta_1} \cos^2 \theta d\theta.$$

Pertanto:

$$I = L - I$$

e quindi $I = L/2$ che quanto volevamo provare. La seconda in (C.3) per $n = m$ si prova nello stesso modo. Dimostriamo la validità della prima e della seconda in (C.3) per $n \neq m$. Eseguiamo la prova per il caso del coseno. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \int_J \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx &= \frac{L}{2\pi m} \int_J \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \frac{d}{dx} \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx \\ &= \frac{L}{2\pi m} \int_J \frac{d}{dx} \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) \right) dx - \frac{L}{2\pi m} \int_J \left(\frac{d}{dx} \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \right) \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx. \end{aligned}$$

Il primo integrale nella seconda riga è nullo, dato che la funzione dentro la derivata è periodica sul dominio di integrazione. Eseguendo l'ultima derivata otteniamo che:

$$\int_J \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx = \frac{n}{m} \int_J \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx. \quad (\text{C.5})$$

Possiamo ripetere la procedura notando che:

$$\sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) = -\frac{L}{2\pi m} \frac{d}{dx} \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right),$$

ottenendo alla fine:

$$\int_J \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx = \left(\frac{n}{m}\right)^2 \int_J \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx.$$

e quindi:

$$\left[1 - \left(\frac{n}{m}\right)^2\right] \int_J \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx = 0.$$

Dato che è $n \neq m$, l'unica possibilità è che:

$$\int_J \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx = 0,$$

come volevamo. Osserviamo anche che la (C.5) prova di conseguenza anche la seconda in (C.3) per $n \neq m$.

Per finire e provare la (C.4), osserviamo che, con la solita procedura di integrazione per parti eseguita due volte, si verifica subito che:

$$\int_J \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx = -\left(\frac{n}{m}\right)^2 \int_J \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx,$$

e quindi:

$$\left[1 + \left(\frac{n}{m}\right)^2\right] \int_J \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx = 0,$$

da cui segue che, anche se $n = m$, l'integrale a fattore nel secondo membro deve annullarsi.

C.3 Seni e coseni su $[0, L]$ con condizioni di annullamento, o di annullamento della derivata, ai bordi.

Consideriamo ora le funzioni seno e coseno definite sull'intervallo $J = [0, L]$:

$$J \ni x \mapsto \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e

$$J \ni x \mapsto \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

La prima classe di funzioni è costituita da autofunzioni reali dell'operatore $-\frac{d^2}{dx^2}$, con derivate prime che si annullano al bordo dell'intervallo, con autovalori rispettivamente $(\frac{\pi n}{L})^2$. La seconda classe di funzioni è costituita da autofunzioni reali dell'operatore $-\frac{d^2}{dx^2}$ che si annullano al bordo dell'intervallo, con autovalori rispettivamente $(\frac{\pi n}{L})^2$.

Vogliamo provare le relazioni di ortogonalità, separatamente per le due classi di funzioni:

$$\int_0^L \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx = \frac{L\delta_{nm}}{2}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{C.6})$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx = \frac{L\delta_{nm}}{2}, \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (\text{C.7})$$

Si osservi che queste relazioni dicono che ciascuno dei due sistemi di funzioni considerato sopra con un opportuno coefficiente di normalizzazione:

$$\sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad x \in [0, L]$$

e

$$\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad x \in [0, L],$$

definisce, separatamente, un sistema ortonormale nello spazio di Hilbert complesso $L^2([0, L], dx)$. Ciascuno dei due sistemi risulta anche essere completo, cioè definisce una base hilbertiana dello spazio di Hilbert complesso $L^2([0, L], dx)$.

Facciamo solo la dimostrazione di (C.7), dato che quella di (C.6) è del tutto analoga. Per cominciare consideriamo il caso $n = m$. Abbiamo allora che:

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi n}{L}x\right) dx = \frac{L}{\pi n} \int_0^{\pi n} \sin^2 \theta d\theta = \frac{L}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{L}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) d\theta.$$

Abbiamo trovato che:

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi n}{L}x\right) dx = L - \frac{L}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta.$$

Dato che $\sin^2 \theta$ non è altro che $\cos^2 \theta$ traslata di $\pi/2$ e che l'integrale avviene su di un intervallo lungo come il periodo, pari a π , di entrambe le funzioni, concludiamo che:

$$\int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta$$

e quindi:

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi n}{L}x\right) dx = L - \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi n}{L}x\right) dx.$$

Concludiamo che:

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi n}{L}x\right) dx = \frac{L}{2},$$

come voluto. Per finire proviamo la (C.7) se $n \neq m$. Vale:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx = -\frac{L}{\pi m} \int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \frac{d}{dx} \cos\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx.$$

Integrando per parti troviamo che:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx \\ &= -\frac{L}{\pi m} \int_0^L \frac{d}{dx} \left(\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{L}x\right) \right) dx + \frac{L}{\pi m} \int_0^L \left(\frac{d}{dx} \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \right) \cos\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx. \end{aligned}$$

Il primo integrale a secondo membro è nullo dato che la funzione seno si annulla in 0 e L . Calcolando la derivata nell'ultimo integrale, si conclude che:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx = \frac{n}{m} \int_0^L \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx,$$

e quindi:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx = \frac{n}{m} \frac{L}{\pi m} \int_0^L \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \frac{d}{dx} \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx.$$

Integrando nuovamente per parti nell'integrale a secondo membro, tenendo conto del fatto che la funzione seno si annulla agli estremi di integrazione, troviamo che:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx = \frac{n}{m} \frac{n}{m} \int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx.$$

Dunque:

$$\left(1 - \left(\frac{n}{m}\right)^2\right) \int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx = 0.$$

Dato che è $m \neq n$ per ipotesi, l'integrale a fattore deve essere nullo e ciò conclude la dimostrazione di (C.7).

Bibliografia

- [Gi03] E. Giusti, *Analisi Matematica*, vol 1 e 2, Bollati-Boringhieri, Torino (2003).
- [RS75] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, vol. II, Academic Press, New York, (1975).
- [Mo10] V. Moretti, *Teoria spettrale e meccanica quantistica. Operatori in spazi di Hilbert*, Springer, Milano (2010).
- [Ru82] W. Rudin, *Analisi reale e complessa*, Bollati-Boringhieri, Torino (1982)
- [Ru91] W. Rudin, *Functional Analysis*, Mc Graw Hill, Boston (1991).
- [Ta96] M. E. Taylor, *Partial Differential Equations*, vol. I, II and III, New York, Springer-Verlag (1996).
- [Sa10] S. Salsa, *Equazioni alle derivate parziali. Metodi, modelli e applicazioni*, seconda edizione, Springer, Milano (2010).
- [ST84] A.G. Svesnikov e A.N. Tichonov, *Teoria delle funzioni di una variabile complessa*, Editori Riuniti, Roma (1984).
- [Vl84] V. S. Vladimirov, *Equations of Mathematical Physics*, Mir, Moscow (1984).