

Capitolo 11

Alcuni argomenti più avanzati di Meccanica Hamiltoniana.

In questo capitolo ci occuperemo di alcuni argomenti più avanzati di meccanica di Hamilton. In particolare introdurremo le trasformazioni canoniche, le parentesi di Poisson al fine di studiare, in formulazione di Hamilton, il legame tra simmetrie e leggi di conservazione. Nella prima parte introduciamo un atlante particolare dello spaziotempo delle fasi che estende quello delle coordinate naturali. Usando tale atlante riformuleremo il teorema di Liouville e ne otterremo come conseguenza il teorema del ritorno Poincaré.

11.1 Trasformazioni canoniche e loro proprietà fondamentali.

Nel capitolo 10 abbiamo visto che le equazioni di Hamilton hanno la forma:

$$\begin{cases} \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k}, \\ \frac{dq^k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \end{cases} \text{ per } k = 1, \dots, n, \quad (11.1)$$

in ogni sistema locale di coordinate naturali $(t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ costruito sullo spaziotempo delle fasi $F(\mathbb{V}^{n+1})$. Questi sistemi di coordinate che formano un atlante dello spazio delle fasi, sono, in un certo senso “duali” dei sistemi di coordinate locali naturali su $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ (cfr. sezione 10.3) $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ che formano un corrispondente atlante nello spaziotempo degli atti di moto. Cambiando queste ultime coordinate locali e passando ad un analogo sistema locale $(t', q'^1, \dots, q'^n, \dot{q}'^1, \dots, \dot{q}'^n)$ in modo che:

$$\begin{aligned} t' &= t + c, \\ q'^k &= q'^k(t, q^1, \dots, q^n), \\ \dot{q}'^k &= \sum_{h=1}^n \frac{\partial q'^k}{\partial q^h} \dot{q}^h + \frac{\partial q'^k}{\partial t}, \end{aligned}$$

le coordinate nello spaziotempo delle fasi cambiano di conseguenza come:

$$t' = t + c, \quad (11.2)$$

$$q'^k = q'^k(t, q^1, \dots, q^n), \quad (11.3)$$

$$p'_k = \sum_{h=1}^n \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} p_h. \quad (11.4)$$

Nelle nuove coordinate naturali, le equazioni di Hamilton hanno la stessa forma di prima

$$\begin{cases} \frac{dp'_k}{dt'} = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial q'^k}, \\ \frac{dq'^k}{dt'} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial p'_k}, \end{cases} \text{ per } k = 1, \dots, n,$$

dove la nuova funzione Hamiltoniana è legata alla vecchia da:

$$\mathcal{H}'(t'(t, q, p), q'(t, q, p), p'(t, q, p)) = \mathcal{H}(t, q, p) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial q'^k}{\partial t} \bigg|_{(t, q, p)} p'_k(t, q, p). \quad (11.5)$$

Ci chiediamo se esistono trasformazioni di coordinate locali che preservano la forma (11.1) delle equazioni di Hamilton indipendentemente dalla struttura dello spaziotempo degli atti di moto e ragionando completamente nello spaziotempo delle fasi senza fare riferimento alle coordinate $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ nello spaziotempo degli atti di moto. La risposta è positiva ed in particolare trasformazioni siffatte sono le cosiddette *trasformazioni canoniche*.

11.1.1 Trasformazioni canoniche

Definizione 11.1. (**Trasformazioni canoniche e coordinate canoniche.**) Consideriamo un sistema Hamiltoniano descritto su $F(\mathbb{V}^{n+1})$ in coordinate locali arbitrarie (t, x^1, \dots, x^{2n}) dove t è il tempo assoluto e (x^1, \dots, x^{2n}) è, per ogni fissato t , un sistema di coordinate sulla fibra \mathbb{F}_t (spazio delle fasi al tempo t).

Un nuovo sistema di coordinate locali $(t', x'^1, \dots, x'^{2n})$ si dice connesso da una **trasformazione canonica** al precedente se la trasformazione di coordinate, supposta invertibile di classe C^2 con la sua inversa, ha la forma

$$t' = t + c, \quad (11.6)$$

$$x'^k = x'^k(t, x^1, \dots, x^{2n}), \quad (11.7)$$

in cui la matrice jacobiana delle *sole coordinate non temporali*, di coefficienti

$$\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}, \quad \text{per } i, j = 1, \dots, 2n,$$

appartiene al gruppo $Sp(n, \mathbb{R})$ per ogni tempo t . Nel caso in cui non compaia esplicitamente t nel secondo membro in (11.15) la trasformazione di coordinate (11.6)-(11.7) è detta **completamente canonica**.

Ogni sistema di coordinate locali su $F(\mathbb{V}^{n+1})$ connesso ad ogni sistema di coordinate locali naturali tramite una trasformazione canonica è detto sistema locale di **coordinate canoniche** su $F(\mathbb{V}^{n+1})$. \diamond

Osservazioni 11.1.

(1) È chiaro che la composizione di trasformazioni canoniche definisce ancora una trasformazione canonica in quanto la matrice jacobiana della trasformazione risultante è semplicemente il prodotto delle due matrici jacobiane delle due trasformazioni fattore e l'insieme delle matrici simplettriche è chiuso per prodotto matriciale essendo un gruppo matriciale. Pertanto un sistema di coordinate costruito con una trasformazione canonica partendo da un sistema di coordinate canonico è anch'esso canonico.

(2) È chiaro che l'inversa di una trasformazione canonica definisce ancora una trasformazione canonica: la matrice jacobiana dell'inversa di una trasformazione canonica, in riferimento alla sottomatrice riguardante solo le coordinate non temporali, è data dall'inversa della matrice jacobiana della trasformazione di partenza in riferimento alla sottomatrice riguardante solo le coordinate non temporali. Dato che l'insieme delle matrici simplettriche è chiuso sotto inversione dei suoi elementi essendo un gruppo matriciale, la trasformazione inversa di una trasformazione canonica risulta essere ancora canonica.

Prima di tutto mostriamo che esistono sistemi di coordinate canonici e l'insieme di essi estende l'atlante dei sistemi di coordinate naturali.

Proposizione 11.1. *Nello spazio delle fasi $F(\mathbb{V}^{n+1})$ ogni sistema locale di coordinate nell'atlante dei sistemi di coordinate naturali (di classe C^2 almeno) è canonico.* \diamond

Dimostrazione. Consideriamo la trasformazione di coordinate (11.2)-(11.4). La matrice jacobiana di tale trasformazione, considerando solo la parte relativa alle coordinate non temporali ha struttura:

$$J := \left[\begin{array}{c|c} Q & 0 \\ \hline P & Q^{-1t} \end{array} \right], \tag{11.8}$$

Dove Q è la matrice jacobiana i cui coefficienti sono

$$Q_{ki} := \frac{\partial q^k}{\partial q^i},$$

P è la matrice i cui coefficienti sono

$$P_{kr} := \sum_{l,s=1}^n p_s \frac{\partial^2 q^s}{\partial q^k \partial q^l} \frac{\partial q^l}{\partial q^r}.$$

La forma della matrice J , per computo diretto ed usando il fatto che risulta $Q^t P = P^t Q$ dal teorema di Schwartz, implica immediatamente che:

$$J^t S J = S .$$

Questo prova la tesi. \square

Osservazioni 11.2. Ci sono sistemi di coordinate canoniche che *non sono* sistemi di coordinate naturali sullo spazio delle fasi. Basta considerare la trasformazione che, partendo dalle coordinate naturali $(t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$, definisce le nuove coordinate locali: $(t, Q^1, \dots, Q^n, P_1, \dots, P_n)$ individuate dalla trasformazione di classe C^∞ con inversa nella stessa classe:

$$\begin{aligned} t' &= t , \\ Q^k &= p_k , \quad k = 1, \dots, n \\ P_k &= -q^k , \quad k = 1, \dots, n . \end{aligned}$$

In questo caso la matrice jacobiana delle coordinate non temporali è proprio S e vale $S^t S S = -S S S = -S(-I) = S$. Non possiamo pensare le coordinate $(t, Q^1, \dots, Q^n, P_1, \dots, P_n)$ come coordinate naturali sullo spazio delle fasi e quindi connesse ad un sistema di coordinate naturali $(t, Q^1, \dots, Q^n, \dot{Q}^1, \dots, \dot{Q}^n)$ nello spaziotempo degli atti di moto, in quanto la legge di trasformazione tra coordinate naturali non ammette trasformazioni in cui compaia la *seconda* equazione scritta sopra. In tale equazione, a secondo membro può solo apparire una funzione delle coordinate (t, q^1, \dots, q^n) .

L'insieme dei sistemi di coordinate locali canonici include l'atlante dei sistemi di coordinate locali naturali ed è esso stesso un atlante per costruzione. Tale atlante verrà detto **atlante canonico** di $F(\mathbb{V}^{n+1})$.

11.1.2 Preservazione della forma delle equazioni di Hamilton.

L'atlante canonico gode della notevole proprietà di preservare la forma delle equazioni di Hamilton. In ogni sistema di coordinate canoniche, le equazioni di Hamilton hanno sempre la forma (11.1) dove abbiamo convenzionalmente indicato con q^1, \dots, q^n le prime n coordinate non temporali e con p_1, \dots, p_n le rimanente n coordinate non temporali. La scelta di questa notazione è tuttavia abbastanza arbitraria, visto che le coordinate canoniche non sono in generali naturali e non possiamo pensare le prime n coordinate non temporali, le q^k , come coordinate nello spazio delle configurazioni. Una notazione equivalente per le equazioni di Hamilton è comunque

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = S \nabla \mathcal{H}(t, \mathbf{x}) . \tag{11.9}$$

dove $(t, \mathbf{x}) \equiv (t, x^1, \dots, x^{2n})$ sono le coordinate canoniche considerate.

Teorema 11.1. *Le trasformazioni canoniche preservano la forma delle equazioni di Hamilton. Più precisamente, se (t, q, p) è in un sistema di coordinate locali nelle coordinate dell'atlante canonico, allora in ogni altro sistema di coordinate locali dell'atlante canonico – ristretto se necessario in modo da prendere valori su un insieme della forma $(a, b) \times \Omega$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ aperto semplicemente connesso – le soluzioni di:*

$$\begin{cases} \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k}, \\ \frac{dq^k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \end{cases} \text{ per } k = 1, \dots, n, \quad (11.10)$$

per una fissata funzione Hamiltoniana \mathcal{H} (di classe C^1) sono, se trasformate nelle nuove variabili, soluzioni di

$$\begin{cases} \frac{dp'_k}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial q'^k}, \\ \frac{dq'^k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial p'_k}, \end{cases} \text{ per } k = 1, \dots, n. \quad (11.11)$$

Vale inoltre:

$$\mathcal{H}'(t', q', p') = \mathcal{H}(t(t'), q(t', q', p'), p(t', q', p')) + \mathcal{K}(t', q', p') \quad (11.12)$$

dove la funzione \mathcal{K} definita su $(a, b) \times \Omega$ e di classe C^1 è individuata dalla trasformazione canonica considerata e non dipende da \mathcal{H} ed è definita a meno di funzioni additive della sola variabile t' e soddisfa:

$$\begin{cases} \frac{\partial q'_k}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial p'_k}, \\ \frac{\partial p'_k}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q'^k}, \end{cases} \text{ per } k = 1, \dots, n. \quad (11.13)$$

In particolare, se la trasformazione di coordinate tra i due sistemi di coordinate è completamente canonica, si può scegliere:

$$\mathcal{K}'(t', q', p') = \mathcal{K}(t(t'), q(t', q', p'), p(t', q', p')).$$

◇

Dimostrazione. Per semplicità notazionale faremo la dimostrazione nel caso in cui $t' = t$, dato che il caso generale $t' = t + c$ dove c è una costante non presenta alcun problema in più. Consideriamo una curva differenziabile $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ (non supponiamo per ora che sia soluzione delle equazioni di Hamilton (11.10)). Passiamo in coordinate primarie ottenendo la curva $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}'(t, \mathbf{x}(t))$. Abbiamo allora che:

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial t} + J \frac{d\mathbf{x}}{dt},$$

dove $J(t, \mathbf{x})$ è la matrice jacobiana i cui coefficienti sono le derivate $\partial x^i / \partial x^k$, valutata sulla funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$. Tale curva soddisfa le equazioni di Hamilton nelle coordinate iniziali se e solo se

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = S \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{H}(t, \mathbf{x}(t)).$$

Pertanto la curva $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(t)$ soddisfa le equazioni di Hamilton nelle coordinate non primarie se e solo se

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial t} + JS \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{H}(t, \mathbf{x}(t)).$$

Essendo

$$\frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^i},$$

deve essere:

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial t} + JSJ^t \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{H}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{x}'(t))).$$

Dato che $JSJ^t = S$ come provato in Proposizione 10.2 (in quanto $J \in Sp(n, \mathbb{R})$ per ipotesi e quindi $J^t \in Sp(n, \mathbb{R})$), la curva $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(t)$ soddisfa le equazioni di Hamilton nelle coordinate iniziali se e solo se:

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial t} + S \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{H}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{x}'(t))).$$

Nel caso la trasformazione di coordinate $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(t, \mathbf{x})$ non dipenda in realtà dal tempo, la dimostrazione è conclusa definendo

$$\mathcal{H}'(t, \mathbf{x}') := \mathcal{H}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{x}')).$$

Per concludere nel caso generale è sufficiente verificare che la funzione:

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}') := \left. \frac{\partial \mathbf{x}'(t, \mathbf{x})}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t, \mathbf{x}')}$$

si possa sempre scrivere, nelle nostre ipotesi, nella forma:

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}') = S \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{H}'(t, \mathbf{x}')$$

per qualche funzione scalare $\mathcal{H}' = \mathcal{H}'(t, \mathbf{x}')$. Si osservi che ciò equivale a dimostrare (11.13). In virtù dell'osservazione 10.6 questo è vero se e solo se per ogni (t, \mathbf{x}') la matrice i cui coefficienti sono

$$V_{ij}(t, \mathbf{x}') := \sum_{k=1}^{2n} \left. \frac{\partial^2 x^i(t, \mathbf{x})}{\partial t \partial x^k} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t, \mathbf{x}')} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} \Big|_{(t, \mathbf{x}')$$

è hamiltoniana. In altre parole dobbiamo verificare che la matrice

$$V(t, \mathbf{x}') := \left. \frac{\partial J}{\partial t} J^{-1} \right|_{(t, \mathbf{x}'})$$

sia hamiltoniana per ogni (t, \mathbf{x}') nell'ipotesi che la trasformazione di coordinate sia canonica. Derivando in t i due membri dell'identità – che sappiamo essere verificata nelle nostre ipotesi – :

$$J^t S J = S$$

si trova:

$$\frac{\partial J^t}{\partial t} S J + J^t S \frac{\partial J}{\partial t} = 0.$$

Questa si può scrivere come, moltiplicando per J^{-1} a destra e J^{-1t} a sinistra:

$$J^{-1t} \frac{\partial J^t}{\partial t} S + S \frac{\partial J}{\partial t} J^{-1} = 0.$$

Ossia:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial t} J^{-1} \right)^t S + S \frac{\partial J}{\partial t} J^{-1} = 0.$$

che è quanto volevamo. Si osservi che \mathcal{H} è indipendente da \mathcal{H} per costruzione ed è definita (dato che si ottiene integrando un campo vettoriale irrotazionale) a meno di costanti additive per ogni fissato istante di tempo. Variando il tempo \mathcal{H} può quindi essere ridefinita al più aggiungendo una funzione arbitraria della sola variabile temporale. \square

Osservazioni 11.3.

(1) Dalla dimostrazione si evince che, nel caso in cui la trasformazione canonica sia completamente canonica, possiamo lasciare cadere l'ipotesi della forma $(a, b) \times \Omega$, con Ω aperto semplicemente connesso, dell'insieme su cui prendono i valori le coordinate (t', \mathbf{x}') .

(2) Ci si può chiedere se la più generale trasformazione di coordinate che preserva la forma hamiltoniana delle equazioni del moto sia una trasformazione canonica. La risposta è negativa. A titolo di esempio, la trasformazione:

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ q'^k &= \lambda q^k, \quad k = 1, \dots, n \\ p'_k &= \mu p_k, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

dove $\lambda, \mu > 0$ sono costanti, preserva banalmente la forma delle equazioni del moto, pur di definire:

$$\mathcal{H}'(t', q', p') = \lambda \mu \mathcal{H}(t(t'), q(t', q', p'), p(t', q', p')).$$

Tuttavia $J^t S J = \mu \lambda S$, per cui non si ha una trasformazione canonica se $\mu \lambda \neq 1$. In effetti si riesce a dimostrare che una trasformazione differenziabile con inversa differenziabile (entrambe di classe C^2):

$$t' = t + c, \tag{11.14}$$

$$x'^k = x'^k(t, x^1, \dots, x^{2n}), \tag{11.15}$$

preserva la forma hamiltoniana delle equazioni del moto se e solo se la matrice jacobiana delle sole coordinate non temporali associata alla trasformazione soddisfa, per ogni (t, \mathbf{x}) , $J^t S J = aS$ per qualche costante $a \neq 0$.

(3) Il fatto che la funzione hamiltoniana *non* abbia comportamento scalare sotto trasformazione di coordinate canoniche, ma riceva un addendo della forma \mathcal{K} come in (11.12), suggerisce, per una fissata \mathcal{H} , di cercare un sistema di coordinate canoniche in cui \mathcal{H}' sia identicamente nulla. Questo equivale evidentemente a risolvere le equazioni di Hamilton per ogni condizione iniziale, dato che nelle nuove coordinate canoniche le equazioni di Hamilton risultano essere banali $q'^k = q'_0{}^k$ costante, $p'_k = p'_{0k}$ costante. Il metodo che parte da questa osservazione, sviluppato da Jacobi, conduce alla famosa equazione di Hamilton-Jacobi.

(4)* Quando è data su $F(\mathbb{V}^{n+1})$ un'assegnazione di hamiltoniane \mathcal{H} indotta da una funzione lagrangiana \mathcal{L} su $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$, le soluzioni delle equazioni di Hamilton sono, come visto nella sezione 10.3 del capitolo 10, le curve integrali del campo vettoriale Z *globalmente definito* su $F(\mathbb{V}^{n+1})$, detto **campo vettoriale dinamico** (o più brevemente **vettore dinamico**). Z è individuato in ogni sistema di coordinate locali naturali da

$$Z(t, q, p) = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q^k} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial p_k}. \quad (11.16)$$

Infatti, è evidente che le linee integrali di tale campo sono tutte e sole le curve che soddisfano le equazioni di Hamilton (11.11). A differenza della situazione descritta nel capitolo 10 i sistemi di coordinate locali che ora possiamo usare sullo spaziotempo delle fasi non sono solo quelli naturali, ma possiamo fare uso anche dei sistemi di coordinate nell'atlante canonico. È chiaro che, per merito del Teorema 11.1 e tenendo conto che le coordinate naturali su $F(\mathbb{V}^{n+1})$ sono una sottoclasse delle coordinate canoniche, il vettore dinamico avrà sempre la stessa espressione (11.16) in ogni sistema locale di coordinate canonico.

Per concludere citiamo un utile corollario tecnico del teorema precedente.

Corollario. *Nelle ipotesi del teorema precedente vale l'identità tra operatori differenziali sull'intersezione delle carte locali canoniche (t', q', p') e (t, q, p) :*

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q'^k} \frac{\partial}{\partial p'_k} - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial p'_k} \frac{\partial}{\partial q'^k} \right) = - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial q'^k}{\partial t} \frac{\partial}{\partial q'^k} + \frac{\partial p'_k}{\partial t} \frac{\partial}{\partial p'_k} \right). \quad (11.17)$$

Dimostrazione La dimostrazione di (11.17) è ovvia: la stessa identità si riscrive equivalentemente

$$\sum_{k,h=1}^n S^{kh} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x'^k} \frac{\partial}{\partial x'^h} = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial x'^k}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'^k},$$

e questa segue immediatamente da:

$$\frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial t} = S \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{K}$$

che è un modo sintetico di scrivere (11.13). \square

11.1.3 *Struttura globale delle equazioni di Hamilton in riferimento all'atlante canonico di $F(\mathbb{V}^{n+1})$.

Mostriamo ora come le proprietà delle trasformazioni canoniche consentano di emancipare la formulazione di Hamilton della meccanica da quella di Lagrange. Indipendentemente da (4) in osservazioni 11.3, il fatto che si possa definire un campo vettoriale Z globalmente ben definito su tutto lo spaziotempo delle fasi le cui curve integrali siano tutte e sole le soluzioni delle equazioni di Hamilton e che quindi le equazioni di Hamilton abbiano significato globale, *prescinde dall'assegnazione di una lagrangiana su $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ dalla quale ricavare le funzioni di Hamilton in $F(\mathbb{V}^{n+1})$* . In questo senso è possibile partire direttamente dalla formulazione hamiltoniana della meccanica senza fare riferimento ad una preesistente formulazione lagrangiana ed assegnando direttamente le funzioni di Hamilton sullo spazio delle fasi. Diamo la prova di ciò nel seguente importante teorema che è in realtà un corollario del Teorema 11.1.

Teorema. *Si supponga di assegnare una funzione \mathcal{H} di classe C^2 in ogni carta dell'atlante canonico su $F(\mathbb{V}^{n+1})$ in modo tale che, cambiando coordinate locali in tale atlante le funzioni \mathcal{H} si trasformino secondo l'equazione (11.12) con \mathcal{K} che verifica (11.17). Valgono i seguenti fatti.*

(a) *C'è un campo vettoriale Z di classe C^1 globalmente definito su $F(\mathbb{V}^{n+1})$ (e detto **campo vettoriale dinamico**) che assume la stessa forma*

$$Z = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q^k} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial p_k}$$

in ogni sistema locale di coordinate canoniche.

(b) *Le curve integrali di tale campo sono le soluzioni delle equazioni di Hamilton in ogni carta dell'atlante canonico rispetto alla corrispondente funzione hamiltoniana \mathcal{H} . \diamond*

Dimostrazione. (a) Prima di tutto notiamo che se $(t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n) \equiv (t, \mathbf{x})$, abbiamo che:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q^k} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial p_k} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^n S^{ij} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

è un'espressione equivalente per Z . Consideriamo ora due sistemi locali di coordinate canoniche (t, \mathbf{x}) e (t', \mathbf{x}') . Usando il fatto che la trasformazione tra sistemi di coordinate canoniche è tale che la matrice jacobiana delle coordinate non temporali preserva la matrice S , si ha subito che:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^n S^{ij} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i,j,h,k=1}^n S^{ij} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial x'^h}{\partial x^j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x'^h} \frac{\partial}{\partial x'^k},$$

ossia

$$\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^n S^{ij} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{h,k=1}^n S^{hk} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x'^h} \frac{\partial}{\partial x'^k},$$

Dove, in conformità con il teorema precedente $\mathcal{H} = \mathcal{H}' - \mathcal{K}$. Usando l'identità :

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial x'^k}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'^k},$$

possiamo scrivere che:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^n S^{ij} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial t'} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial x'^k}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'^k} + \sum_{h,k=1}^n S^{hk} \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial x'^h} \frac{\partial}{\partial x'^k} - \sum_{h,k=1}^n S^{hk} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x'^h} \frac{\partial}{\partial x'^k}.$$

Valendo (11.17) abbiamo che:

$$\sum_{k,h=1}^n S^{kh} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x'^k} \frac{\partial}{\partial x'^h} = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial x'^k}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'^k},$$

e pertanto, sostituendo sopra, abbiamo che:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^n S^{ij} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial t'} + \sum_{h,k=1}^n S^{hk} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x'^h} \frac{\partial}{\partial x'^k}.$$

Di conseguenza il campo vettoriale

$$Z := \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q^k} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial p_k}$$

è in realtà ben definito su tutta la varietà spaziotempo delle fasi dato che (1) è assegnato su ogni carta locale di un atlante e (2) nelle intersezioni di due carte risulta essere indipendente dalla carta scelta. La prova di (b) è ovvia data la forma del campo Z . \square

11.2 *Il teorema di Liouville in forma globale ed il teorema “del ritorno” di Poincaré.

Il formalismo introdotto nella sezione precedente permette di dare la versione globale del teorema di Liouville sullo spaziotempo delle fasi $F(\mathbb{V}^{n+1})$ senza alcuna restrizione alla forma di questo spazio. Una conseguenza di tale formulazione è il teorema del ritorno di Poincaré che esamineremo di seguito.

11.2.1 Teorema di Liouville e l'equazione di Liouville.

Un'altra proprietà fondamentale delle trasformazioni canoniche è che esse preservano il volume di ogni spazio delle fasi. Fissiamo una fibra \mathbb{F}_{τ_0} al tempo τ_0 e consideriamo un sistema locale di coordinate canoniche $(t, \mathbf{x}) \equiv (t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ definito nell'intorno \mathcal{O} di un punto $p \in \mathbb{F}_{\tau_0}$. Passiamo ad un altro analogo sistema di coordinate canoniche definite nell'intorno

\mathcal{O} dello stesso punto: $(t' \mathbf{x}') \equiv (t', q^1, \dots, q^n, p'_1, \dots, p'_n)$. Se $D \subset \mathbb{F}_{\tau_0}$ è un insieme misurabile contenuto in \mathcal{O} , possiamo ad esso associare due misure di volume:

$$\int_{\mathbf{x}(D)} dq^1 \cdots dq^n dp_1 \cdots dp_n \quad \text{e} \quad \int_{\mathbf{x}'(D)} dq^1 \cdots dq^n dp'_1 \cdots dp'_n.$$

In virtù della canonicità della trasformazione di coordinate, in realtà le due misure coincidono. Infatti:

$$\int_{\mathbf{x}'(D)} dq^1 \cdots dq^n dp'_1 \cdots dp'_n = \int_{\mathbf{x}(D)} |\det J(t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)| dq^1 \cdots dq^n dp_1 \cdots dp_n$$

J è la matrice jacobiana della trasformazione di coordinate che deve avere determinante di modulo 1 in virtù del fatto che $J^t S J = S$ per cui $(\det J)^2 = 1$ come già osservato. In definitiva:

$$\int_{\mathbf{x}(D)} dq^1 \cdots dq^n dp_1 \cdots dp_n = \int_{\mathbf{x}'(D)} dq^1 \cdots dq^n dp'_1 \cdots dp'_n.$$

I sistemi di coordinate canonici individuano localmente una misura naturale intrinseca sugli spazi delle fasi. Usando tecniche standard di teoria della misura su varietà differenzibili che fanno uso di una partizione dell'unità, si arriva per questa via a definire una **misura canonica** μ_τ globale su ogni fibra \mathbb{F}_τ dello spazio delle fasi individuata completamente dall'atlante canonico di $F(\mathbb{V}^{n+1})$. Tale misura è una misura di Borel positiva per costruzione che coincide con la misura di Lebesgue di \mathbb{R}^{2n} quando ci si restringe ad ogni sistema di coordinate canoniche. Di conseguenza con μ possiamo misurare in particolare gli insiemi aperti che non possono avere misura nulla ed i compatti che devono avere misura finita. Possiamo sempre completare tale misura ed assumere dunque che sia completa¹.

Usando questa misura canonica si giunge infine, sempre con tecniche standard e facendo uso del teorema di Liouville su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$ dimostrato nel capitolo 10, a dimostrare il teorema di Liouville nella forma generale.

Teorema 11.2. (Teorema di Liouville.) *In riferimento ad un sistema fisico descritto nello spazio delle fasi $F(\mathbb{V}^{n+1})$ con fibre (spazi delle fasi al tempo τ) \mathbb{F}_τ , si supponga che le soluzioni delle equazioni di Hamilton – cioè le linee integrali del campo vettoriale globale Z (10.47) – siano complete e pertanto sia definito, da tali soluzioni, un gruppo (globale) ad un parametro $\{\Phi_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ su $F(\mathbb{V}^{n+1})$ – il **flusso di fase**.*

Il flusso di fase conserva il volume canonico delle fibre: se $D_{t_0} \subset \mathbb{F}_{t_0}$ è un insieme misurabile e per ogni $s \in \mathbb{R}$, $(\{t\} \times D_t) = \Phi_s(\{t_0\} \times D_{t_0})$ dove $t = t_0 + s$, vale:

$$\int_{D_t} d\mu_t = \int_{D_{t_0}} d\mu_{t_0}.$$

◇

¹Anche la misura completata risulta essere invariante sotto l'evoluzione hamiltoniana, come si prova subito dalla procedura di completamento.

La presenza di una misura naturale nello spazio delle fasi consente di dare senso alla nozione di distribuzione di probabilità che ha avuto fondamentali applicazioni in fisica. Il teorema enunciato sopra è infatti il punto di partenza della cosiddetta *meccanica statistica*. Si tratta della teoria matematica che descrive un insieme statistico di sistemi fisici identici e quindi soggetti alla stessa dinamica hamiltoniana, ma descritti da punti rappresentativi differenti istante per istante a causa di differenti condizioni iniziali. Un tale insieme di sistemi fisici può descrivere la situazione nella quale noi non conosciamo con precisione lo stato del sistema ad ogni singolo istante. Tale approccio è anche usato per dare una descrizione microscopica alla termodinamica dei sistemi all'equilibrio, quando si assume che lo stato macroscopico del sistema all'equilibrio corrisponda ad una descrizione mediata su intervalli di tempo lunghi dello stato microscopico del sistema, e che tale operazione di media temporale sia equivalente all'assegnazione, istante per istante, di una distribuzione di stati microscopici (punti rappresentativi) invece che un unico punto rappresentativo (ipotesi ergodica).

Nella meccanica statistica si assegna una densità di probabilità $\rho = \rho(t, q, p) \geq 0$ (funzione di classe C^1 almeno) nello spaziotempo delle fasi il cui integrale all'istante t , sull'insieme misurabile $D_t \subset \mathbb{F}_t$, integrale valutato *rispetto alla misura canonica* μ , definisce la probabilità $P_t(D_t)$ che il punto rappresentativo del sistema fisico si trovi in D_t al tempo t :

$$P_t(D_t) := \int_{D_t} \rho(t, q, p) d\mu_t(t, q, p). \quad (11.18)$$

La richiesta naturale che si deve imporre sulla funzione ρ è che, individuato all'istante t_0 un insieme misurabile $D_{t_0} \subset \mathbb{F}_{t_0}$ di punti rappresentativi con probabilità $P_{t_0}(D_{t_0})$, la probabilità $P_t(D_t)$, per ogni istante $t \neq t_0$, calcolata su D_t ottenuto da D_{t_0} attraverso il flusso di fase, soddisfi:

$$P_t(D_t) = P_{t_0}(D_{t_0}). \quad (11.19)$$

In particolare, se $D_t = \mathbb{F}_t$ tale probabilità deve valere sempre 1.

La richiesta (11.19) può essere trascritta equivalentemente come:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho(t, q, p) d\mu_t(t, q, p) = 0.$$

Questa equazione, restringendosi a lavorare per tempi ed insiemi D_t a chiusura compatta, comperti da coordinate canoniche, può scriversi equivalentemente:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_{t_0}} \rho(t, q(t, q_0, p_0), p(t, q_0, p_0)) |\det J_t| d\mu_t(t_0, q_0, p_0) = 0,$$

dove $q(t, q_0, p_0), p(t, q_0, p_0)$ sono la posizione nello spaziotempo delle fasi al tempo t del punto rappresentativo che evolve soddisfacendo le equazioni di Hamilton, partendo dalla condizione iniziale (q_0, p_0) al tempo t_0 . Tenendo conto che $|\det J_t|$ è costante, l'identità di sopra si trascrive equivalentemente passando la derivata sotto il segno di integrale:

$$\int_{D_{t_0}} \frac{d}{dt} (\rho(t, q(t, q_0, p_0), p(t, q_0, p_0))) |\det J_t| d\mu_t(t_0, q_0, p_0) = 0,$$

Per l'arbitrarietà di D_{t_0} (che possiamo scegliere essere una palla coordinata sufficientemente piccola) e usando la continuità della funzione integranda, la richiesta è equivalente a²:

$$\frac{d}{dt}\rho(t, q(t, q_0, p_0), p(t, q_0, p_0)) = 0.$$

Questa equazione dice che, lungo ogni linea di universo che soddisfa le equazioni di Hamilton, il valore di ρ deve rimanere costante (ma può dipendere dalla linea di universo). Questo fatto, da solo, assicura che se al tempo iniziale t_0 , $\rho \geq 0$ ovunque su \mathbb{F}_{t_0} , allora ρ soddisferà tale condizione per tutti i tempi. In forma esplicita ed in coordinate canoniche, l'equazione di evoluzione scritta sopra prende la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \rho}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial q^k} \frac{dq^k}{dt} \right) \quad \text{in ogni punto dello spazio delle fasi.}$$

Facendo infine uso delle equazioni di Hamilton troviamo infine la celebre **equazione di Liouville**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \rho}{\partial p_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} - \frac{\partial \rho}{\partial q^k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \right) \quad \text{in ogni punto dello spazio delle fasi.} \quad (11.20)$$

Si può verificare, procedendo in senso contrario (ed usando una partizione dell'unità), che la validità dell'equazione di Liouville è anche sufficiente affinché valga la (11.19).

11.2.2 Il teorema “del ritorno” (o “di ricorrenza”) di Poincaré .

Consideriamo il caso di un sistema dinamico descritto nello spaziotempo delle fasi $F(\mathbb{V}^{n+1})$ che possa decomporsi canonicamente nel prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{F}$ dando luogo ad un flusso di fase completo, nel senso che valgano le seguenti tre richieste.

(R1) Sia possibile ricoprire $F(\mathbb{V}^{n+1})$ con un atlante di sistemi di coordinate canonici in cui la coordinata temporale vari su tutto \mathbb{R} ed in modo tale che le trasformazioni canoniche tra i sistemi di coordinate dell'atlante siano completamente canoniche.

(R2) Le funzioni hamiltoniane del sistema (pensate come funzioni di classe C^2) siano indipendenti dal tempo in ciascuna di tali carte locali. (In questa situazione la funzione hamiltoniana si estende ad un campo scalare indipendente dal tempo su tutto lo spaziotempo delle fasi. Le equazioni di Hamilton risultano essere in questa situazione, un sistema di equazioni differenziali autonomo sulla varietà spazio delle fasi $M := \mathbb{F}$ nel senso discusso nella sezione 3.5).

(R3) Le soluzioni delle equazioni di Hamilton siano complete.

²Se, per una funzione continua $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subset \mathbb{R}^n$ aperto, vale $\int_A g(x) d^n x = 0$ per ogni insieme misurabile $A \subset D$ allora deve essere $g(x) = 0$ ovunque su D . Se fosse $g(x_0) > 0$ in x_0 , la funzione dovrebbe verificare $0 < \epsilon_0 < g(x_0) - \epsilon < g(x) < g(x_0) + \epsilon$ in un intorno aperto A_{x_0} di x_0 . In tale intorno avremmo: $\int_{A_{x_0}} g(x) d^n x \geq \epsilon_0 \int_{A_{x_0}} d^n x > 0$ che contraddice le ipotesi. Se fosse $g(x_0) < 0$, usando $-g$ si arriverebbe allo stesso assurdo.

Come chiarito nella sezione 3.5.3, in questo modo viene a definirsi un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi di \mathbb{F} , detto ancora **flusso di fase**, $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ con $\phi_t : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$, definito dalla richiesta che $\mathbb{R} \ni t \mapsto \phi_t(\mathbf{x})$ sia l'unica soluzione delle equazioni di Hamilton con condizione iniziale $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{F}$ al tempo $t = 0$. Sappiamo dalla sezione precedente che i diffeomorfismi ϕ_t preservano il volume canonico dei sottoinsiemi misurabili di \mathbb{F} . Vale allora il famoso *teorema "del ritorno" o "di ricorrenza" di Poincaré*.

Teorema 11.3. (“Teorema del ritorno”, Poincaré.) *Si consideri un sistema fisico descritto in formulazione di Hamilton e che soddisfi le richieste (R1), (R2) e (R3) e $\mathcal{R} \subset \mathbb{F}$ verifichi le seguenti ipotesi:*

(i) $\phi_t(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$;

(ii) \mathcal{R} sia misurabile secondo la misura (di Borel) canonica μ dello spazio delle fasi ed abbia misura finita: $\mu(\mathcal{R}) < +\infty$.

In questo caso, per ogni $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}$, intorno aperto arbitrariamente piccolo di ogni punto di \mathbb{F} , valgono i seguenti fatti.

(a) L'insieme \mathcal{G} “ritorna infinite volte” in \mathcal{G} stesso. Più precisamente, esiste una successione di tempi $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots \rightarrow +\infty$ per cui $\mathcal{G} \cap \phi_{\tau_n}(\mathcal{G}) \neq \emptyset$ dove $\mu(\mathcal{G} \cap \phi_{\tau_n}(\mathcal{G})) > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(b) I punti di \mathcal{G} che “non ritornano mai più” in \mathcal{G} formano un sottoinsieme di misura nulla:

$$\mu(\{p \in \mathcal{G} \mid \phi_t(p) \notin \mathcal{G} \quad t > 0\}) = 0. \quad \diamond$$

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema premettendo un lemma.

Lemma 11.1. *Se $A \subset \mathcal{R}$ è misurabile con $\mu(A) > 0$ e $t > 0$ è una costante fissata arbitrariamente, consideriamo gli insiemi:*

$$A_n := \phi_{nt}(A) := (\phi_t)^n(A) \quad \text{per } n \in \mathbb{N}.$$

Allora, per qualche $k_t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, deve valere $A \cap A_{k_t} \neq \emptyset$ ed inoltre $\mu(A \cap A_{k_t}) > 0$.

Dimostrazione del Lemma. Gli insiemi A_m sono misurabili perchè controimmagine di insiemi misurabili secondo funzioni continue (che sono misurabili essendo la misura μ di Borel). Definiamo, per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, gli insiemi $B_n := A_n \setminus (\cup_{m \neq n} A_m)$, in modo che $B_m \cap B_n = \emptyset$ se $n \neq m$. Assumiamo ora, per assurdo, che $\mu(A_n \cap A_m) = 0$ per ogni coppia m, n con $n \neq m$ e verifichiamo che ciò porta ad una contraddizione. In queste ipotesi $\mu(B_n) = \mu(A_n)$, dato che $\mu(A_n \cap A_m) = 0$ implica $\mu(A_n \cap (\cup_{m \neq n} A_m)) = 0$ e quindi:

$$\begin{aligned} \mu(A_n) &= \mu(A_n \setminus (\cup_{m \neq n} A_m)) + \mu(A_n \cap (\cup_{m \neq n} A_m)) = \mu(A_n \setminus (\cup_{m \neq n} A_m)) = \mu(A_n \setminus (\cup_{m \neq n} A_m)) \\ &= \mu(B_n). \end{aligned}$$

Infine, dato che $B_m \cap B_n = \emptyset$ se $n \neq m$:

$$\mu\left(\bigcup_m B_n\right) = \sum_m \mu(B_m) = \sum_m \mu(A_m) = \sum_m \mu((\phi_t)^n(A)) = \sum_m \mu(A) = +\infty.$$

Questo è impossibile visto che $\bigcup_m B_n \subset \mathcal{R}$ e quindi:

$$\mu\left(\bigcup_m B_n\right) \subset \mu(\mathcal{R}) < +\infty.$$

Allora deve accadere che $\mu(A_n \cap A_m) > 0$ per qualche m, n con $m \neq n$. Se n è il minimo tra m e n , applicando $(\phi_{nt})^{-1}$ e tenendo conto che tale trasformazione preserva il volume, abbiamo che

$$0 < \mu(A_n \cap A_m) = \mu((\phi_{nt})^{-1}(A_n \cap A_m)) = \mu((\phi_{nt})^{-1}(A_n) \cap (\phi_{nt})^{-1}(A_m)) = \mu(A \cap (\phi_{nt})^{-1}(A_m)).$$

Definendo $k_t := m - n > 0$, abbiamo che $A_{k_t} = \phi_{k_t t}(A) = \phi_{nt}^{-1}(A_m)$ dove $k_t := m - n > 0$. Abbiamo quindi trovato che $\mu(A \cap A_{k_t}) > 0$. \square

Il lemma precedente prova la proposizione (a) scegliendo $A = \mathcal{G}$. La successione $\tau_1 < \tau_1 < \dots$ si ottiene applicando il lemma per tempi $t_1 < t_2 < t_3, \dots \rightarrow +\infty$ scelti di volta in volta in modo tale che $t_2 > k_{t_1} t_1$, $t_3 > k_{t_2} t_2$ e via di seguito, e definendo infine $\tau_1 := k_{t_1} t_1$, $\tau_2 := k_{t_2} t_2$ e in generale $\tau_n := k_{t_n} t_n$. Per costruzione $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots \rightarrow +\infty$.

Passiamo alla proposizione (b). Consideriamo quindi il sottoinsieme $E \subset \mathcal{G}$ dei punti $p \in \mathcal{G}$ che non ritornano in \mathcal{G} sotto evoluzione discreta: $\phi_{nt}(p) \notin \mathcal{G}$ per ogni $n = 1, 2, \dots$ per qualche $t > 0$ fissato. L'insieme E è misurabile dato che può essere scritto come intersezione numerabile di insiemi misurabili:

$$E = \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} (\phi_{nt})^{-1}(\mathcal{R} \setminus \mathcal{G}).$$

Se fosse $\mu(E) > 0$, applicando il lemma precedente per $A = E$ avremmo che $\mathcal{G} \cap \phi_{kt}(E) \supset E \cap \phi_{kt}(E) \neq \emptyset$ per qualche $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e questo è impossibile per definizione di E . Quindi deve essere $\mu(E) = 0$. L'insieme E_0 dei punti di \mathcal{G} che non ritornano mai più in \mathcal{G} :

$$E_0 := \{p \in \mathcal{G} \mid \phi_t(p) \notin \mathcal{G} \quad t > 0\}$$

soddisfa banalmente $E_0 \subset E$. Dato che la misura μ è completa per costruzione, deve essere E_0 misurabile e quindi $\mu(E) = \mu(E_0) = 0$ \square

Esempi 11.1.

1. Sistemi hamiltoniani che soddisfano le ipotesi del teorema di Poincaré sono abbastanza comuni. Prendiamo un sistema fisico sottoposto a forze indipendenti dal tempo in un riferimento inerziale che ammetta descrizione di Lagrange e quindi di Hamilton. Queste ipotesi, lavorando in coordinate solidali con il riferimento inerziale implicano la validità delle richieste (R1) e (R2). Supponiamo inoltre che il sistema fisico ammetta un integrale primo $H : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$, tipicamente

l'energia, le cui superfici di livello nello spazio delle fasi, ottenute fissando un valore generico dell'integrale primo

$$\Sigma_h := \{\mathbf{x} \in \mathbb{F} \mid H(\mathbf{x}) = h\}$$

siano insiemi compatti. Sotto queste ipotesi, dato che ogni soluzione delle equazioni di Hamilton deve rimanere confinata all'interno dell'insieme compatto Σ_h (dove h è il valore che assume l'integrale primo H all'istante iniziale), ogni soluzione massimale sarà completa in virtù della proposizione 3.10. In questo caso anche (R3) è soddisfatta.

Se infine accade che il volume della regione

$$\mathcal{R} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{F} \mid h_1 < H(\mathbf{x}) < h_2\}$$

ha misura finita – è a tal fine sufficiente che la chiusura di \mathcal{R} sia compatta – allora sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Poincaré, visto che $\phi_t(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ nelle nostre ipotesi: se $p \in \mathcal{R}$, $H(p) = h_p \in (h_1, h_2)$ e, dato che H è integrale primo $H(\phi_t(\mathcal{R})) = h_p \in (h_1, h_2)$ per cui $\phi_t(p) \in \mathcal{R}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

2. La situazione descritta nel precedente esempio si concretizza prendendo un sistema fisico di N particelle con hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} + \mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$$

dove l'energia potenziale \mathcal{U} di classe C^1 è limitata dal basso – cioè per ogni $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ vale $\mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \geq C$ per qualche costante $C \in \mathbb{R}$ – e tale che gli insiemi dei punti $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ con $\mathcal{U}((\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)) \leq h$ siano compatti $K_u \subset \mathbb{R}^{3N}$ per ogni h fissato in un intervallo di valori. (Quest'ultima condizione è per esempio assicurata se \mathcal{U} è una somma di energie potenziali per la singola particelle descrittive buche di potenziale). In questo caso, se M è la più grande delle masse m_i per cui $\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i^2 / (2M) \leq \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i^2 / (2m_i)$, i valori assunti da $\sqrt{\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i^2}$ non possono superare $\sqrt{2M(h - C)}$, e pertanto anche il vettore $(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ è contenuto nella palla chiusa $B_h \subset \mathbb{R}^{3N}$ centrata nell'origine e di raggio $\sqrt{2M(h - C)}$. In definitiva la superficie chiusa $\Sigma_h \subset \mathbb{R}^{6N}$ individuata da

$$\Sigma_h := \{(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \in \mathbb{R}^{6N} \mid \mathcal{H}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = h\}$$

è confinata nel compatto $K_h \times B_h \subset \mathbb{R}^{6N}$ ed è pertanto compatta.

Se infine, al variare di h in (h_1, h_2) c'è un compatto K che include tutti i compatti K_h , l'insieme

$$\mathcal{R} := \{(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \in \mathbb{R}^{6N} \mid \mathcal{H}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \in (h_1, h_2)\}$$

ha volume finito essendo incluso nel compatto $K \times B_{h_2}$ ed è invariante sotto il flusso dinamico per costruzione.

Un esempio unidimensionale della situazione descritta è una particella sottoposta ad una forza la cui energia potenziale, nell'intorno di un punto di equilibrio descrive una buca di potenziale

limitata dal basso, come, se $x = 0$ è il punto di equilibrio, $\mathcal{U}(x) = ax^{2n} + p(x)$, dove $n = 1, 2, \dots$, $a > 0$ e p è un polinomio di grado al più $2n + 1$. L'esempio più semplice è dato dalla buca di potenziale dell'oscillatore armonico.

3. Una particella sottoposta al potenziale coulombiano attrattivo invece può non soddisfare le ipotesi, in quanto i valori assumibili dall'impulso possono essere arbitrariamente alti a spese dell'energia potenziale che può essere arbitrariamente piccola nei negativi, pur rimanendo l'energia totale costante. Le superfici ad energia costante nello spazio delle fasi possono non essere limitate e dunque non compatte. Tuttavia se si considera anche l'integrale primo del momento angolare, si vede che è possibile definire, per valori arbitrari dell'energia e valori *non nulli* del momento angolare³, insiemi compatti contenenti le soluzioni del moto, la cui unione forma un insieme \mathcal{R} invariante con misura canonica finita.

Osservazioni 11.4. Un caso fisicamente interessante nel quale si applica il teorema del ritorno è quello di un gas di particelle confinato in una buca di potenziale limitata dal basso (una scatola contenente il gas può essere pensata come una buca di potenziale limitatata dal basso) che non interagiscono tra di loro (gas ideale). In questo caso, partendo da ogni stato iniziale – in particolare quello in cui tutte le particelle si trovano in metà scatola – ed aspettando un tempo sufficientemente lungo, il sistema tornerà vicino a tale stato. È chiaro che questa situazione è in contrasto con il secondo principio della termodinamica. Tuttavia si riescono a stimare i tempi “di ritorno” per sistemi fisici come quello descritto e si scopre che hanno ordini di grandezza comparabili con quelli dell'età del sistema solare [Arnold92]. In base a tale risultato si può ritenere la termodinamica dell'equilibrio una descrizione approssimata valida su scale temporali relativamente brevi. È importante, infine menzionare il fatto che esiste una versione quantistica del teorema del ritorno, valida per sistemi hamiltoniani con “spettro discreto” dell'energia (P. Bocchieri e A. Loinger, Phys. Rev. 107, 337 - 338 (1957)). Per un gas ideale quantistico confinato in una scatola, ma anche per una o più particelle che interagiscono con forze coulombiane attrattive, lo spettro dell'energia è realmente discreto (nel caso di potenziale d'interazione coulombiano attrattivo ciò accade per energie negative); pertanto continuano a valere, anche in ambito quantistico, le implicazioni del teorema di ricorrenza nei confronti della validità della termodinamica dell'equilibrio.

11.3 Simmetrie e leggi di conservazione in meccanica di Hamilton.

Introdurremo ora un utile strumento teorico e pratico dato dalle cosiddette *parentesi di Poisson*. Si tratta di funzionali bilineari che agiscono su funzioni definite nello spaziotempo delle fasi.

³Nella trattazione in coordinate radiali, quando il momento angolare è non nullo, la teoria è descritta da un'energia potenziale effettiva che tiene conto del cosiddetto “potenziale centrifugo” repulsivo in aggiunta all'energia potenziale coulombiana. A causa di questo termine l'energia potenziale effettiva è limitata dal basso quando il momento angolare è non nullo.

L'importanza di tale strumento matematico è, da un lato che esso consente di studiare agevolmente il legame tra simmetrie e quantità conservate in formulazione di Hamilton, dall'altro che diversi risultati della meccanica hamiltoniana se scritti in termini di parentesi di Poisson hanno un corrispondente quantistico quando si sostituiscono alle parentesi di Poisson i commutatori quantistici (si tratta del cosiddetto *principio di corrispondenza di Dirac*).

In questa sezione useremo in particolare il formalismo delle parentesi di Poisson per riformulare, nel linguaggio hamiltoniano, il legame tra simmetrie e leggi di conservazione già introdotto in formulazione di Lagrange attraverso il teorema di Nöther.

11.3.1 Parentesi di Poisson.

Consideriamo una funzione (campo scalare) $f : F(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 . Restringiamoci ora a lavorare in un sistema locale di coordinate canoniche $(t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n) \equiv (t, \mathbf{x})$. Alla funzione f possiamo associare il campo vettoriale X_f su $F(\mathbb{V}^{n+1})$ definito localmente da

$$X_f := \sum_{i,j=1}^{2n} S^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q^k} \right). \quad (11.21)$$

Questo campo definito localmente ha in realtà una natura globale, nel senso che l'espressione sopra scritta vale in ogni sistema locale di coordinate canoniche e pertanto, dato che tali sistemi di coordinate locali formano un atlante, individua univocamente un campo vettoriale su $F(\mathbb{V}^{n+1})$ che indicheremo ancora con X_f . X_f è pertanto definito come campo vettoriale su $F(\mathbb{V}^{n+1})$ che si riduce all'espressione (11.21) in ogni sistema locale di coordinate canoniche. Per dimostrare che l'espressione (11.21) è invariante cambiando coordinate locali canoniche, supponiamo che (t', \mathbf{x}') siano le coordinate di un secondo sistema di coordinate canoniche con dominio sullo spazio delle fasi che interseca quello delle precedenti. In tale intersezione possiamo scrivere che:

$$\sum_{i,j=1}^{2n} S^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i,j,k,r=1}^{2n} S^{ij} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x'^k} \frac{\partial}{\partial x'^r} = \sum_{k,r=1}^{2n} (JSJ^t)^{kr} \frac{\partial f}{\partial x'^k} \frac{\partial}{\partial x'^r} = \sum_{k,r=1}^{2n} S^{kr} \frac{\partial f}{\partial x'^k} \frac{\partial}{\partial x'^r},$$

dove abbiamo usato la definizione di trasformazione canonica e quindi il fatto che la matrice jacobiana J (e la sua trasposta) della trasformazione di coordinate non temporali è un elemento del gruppo $Sp(n, \mathbb{R})$ e pertanto $JSJ^t = S$.

Consideriamo ora due funzioni $f, g : F(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 . Ha senso costruire un terzo campo scalare definito localmente, in coordinate canoniche da:

$$\{f, g\} := X_f(g) = -X_g(f) := \sum_{i,j=1}^{2n} S^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q^k} \right). \quad (11.22)$$

Tale campo scalare sarà in realtà ben definito *su tutto lo spaziotempo delle fasi* per la stessa ragione per la quale il campo X_f è ben definito su tutto lo spaziotempo delle fasi.

Definizione 11.2. Si considerino $f, g : F(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 . Il **campo vettoriale associato** a f è il campo vettoriale su $F(\mathbb{V}^{n+1})$, X_f , definito in coordinate locali canoniche da (11.21). La **parentesi di Poisson di f e g** è il campo scalare $\{f, g\}$ su $F(\mathbb{V}^{n+1})$ definito in coordinate locali canoniche da (11.22). \diamond

Osservazioni 11.5.

(1) A titolo di esempio si verifica immediatamente che se (t, q, p) sono coordinate canoniche allora valgono le condizioni:

$$\{q^i, q^j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \quad \text{e} \quad \{q^i, p_j\} = \delta_j^i \quad \text{per ogni } i, j = 1, \dots, n.$$

Classi di funzioni f^i, g_j , con $i, j = 1, \dots, n$, definite sullo spaziotempo delle fasi, o solo localmente in qualche sistema di coordinate canoniche, che soddisfano tutte le identità scritte sopra sono dette essere **canonicamente coniugate**. Questa condizione (che rivestirà un ruolo importante in meccanica quantistica dato che è legata al *principio di indeterminazione di Heisenberg*) è in realtà una condizione *sufficiente* per assicurare che le funzioni definiscano un sistema di coordinate canoniche come proviamo sotto.

(2) È importante notare che $X_f = X_{f+h}$ se e solo se $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una *qualsiasi* funzione del solo tempo e pertanto il campo vettoriale X_f *non* porta le stesse informazioni del campo scalare f .

Proposizione 11.2. *Si considerino due sistemi di coordinate locali su $F(\mathbb{V}^{n+1})$, (t, q, p) e (t', q', p') definite su un dominio comune in cui $t' = t + c$ è il tempo assoluto e le rimanenti coordinate definiscono sistemi di coordinate (per ogni t e t' fissati, sulle fibre di $F(\mathbb{V}^{n+1})$). Si supponga infine che (t, q, p) sia un sistema locale di coordinate canoniche. I seguenti fatti sono equivalenti.*

- (a) *Le coordinate locali (t', q', p') sono canoniche;*
- (b) *per ogni scelta di $f, g : F(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 risulta:*

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q'^k} \frac{\partial g}{\partial p'_k} - \frac{\partial f}{\partial p'_k} \frac{\partial g}{\partial q'^k} \right);$$

- (c) *Valgono le condizioni:*

$$\{q'^i, q'^j\} = \{p'_i, p'_j\} = 0 \quad \text{e} \quad \{q'^i, p'_j\} = \delta_j^i, \quad \text{per ogni } i, j = 1, \dots, n. \quad (11.23)$$

Dimostrazione. Il fatto che (a) implichi (b) è immediato dal fatto che il campo X_f ha la stessa struttura in tutti i sistemi di coordinate canoniche come dimostrato precedentemente. Il fatto che (b) implichi (c) si prova per computo diretto come già osservato sotto la definizione 11.2 esprimendo le parentesi di Poisson direttamente nelle coordinate canoniche primate. Proviamo per concludere che (c) implica (a). Le condizioni (11.23) si possono riscrivere tutte insieme:

$$\sum_{k,h=1}^{2n} S^{kh} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^h} = S^{ij}.$$

In forma compatta:

$$J^t S J = S.$$

Questo significa che la trasformazione di coordinate è canonica e dunque le coordinate (t', q', p') sono canoniche. \square

La seguente proposizione illustra alcune proprietà più avanzate delle parentesi di Poisson.

Proposizione 11.3. *Le parentesi di Poisson godono delle seguenti proprietà.*

(1) $f, g \mapsto \{f, g\}$ è un'applicazione bilineare e antisimmetrica che associa campi scalari di classe $C^k(F(\mathbb{V}^{n+1}))$ ($k > 0$) ad un campo scalare di classe $C^{k-1}(F(\mathbb{V}^{n+1}))$.

(2) Vale la **regola di Leibniz**:

$$\{f \cdot g, h\} = f \cdot \{g, h\} + g \cdot \{f, h\}$$

dove \cdot indica il prodotto punto per punto ed f, g, h sono campi scalari di classe C^1 su $F(\mathbb{V}^{n+1})$.

(3) Vale la **regola di Jacobi**, se f, g, h sono campi scalari di classe C^2 su $F(\mathbb{V}^{n+1})$:

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} = 0.$$

(4) Se $[\cdot, \cdot]$ indica la parentesi di Lie di campi vettoriali su $F(\mathbb{V}^{n+1})$ e f, g sono campi scalari di classe C^2 su $F(\mathbb{V}^{n+1})$:

$$[X_f, X_g] = X_{h+\{f, g\}}$$

dove $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una qualsiasi funzione del solo tempo.

\diamond

Dimostrazione. Le proprietà (1) e (2) sono di dimostrazione ovvia. Dimostriamo la proprietà (3). Vale:

$$\{\{f, g\}, h\} = \sum_{ijk} S^{kr} S^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} \frac{\partial h}{\partial x^r} + \sum_{ijk} S^{kr} S^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial^2 g}{\partial x^k \partial x^j} \frac{\partial h}{\partial x^r}.$$

Gli altri due addendi a primo membro di $\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} = 0$ sono ottenuti dall'espressione precedente permutando in essa f, g, h . È sufficiente mostrare che, nella somma $\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\}$, i termini che contengono le derivate seconde di f si annullano reciprocamente, la stessa cosa accadrà per simmetria per i termini che contengono le derivate seconde in g ed in h . Il primo termine con le derivate seconde di f è quello che appare sopra nello sviluppo di $\{\{f, g\}, h\}$. Ne compare solo un altro nello sviluppo di $\{\{h, f\}, g\}$ che si ottiene dal secondo addendo nello sviluppo di $\{\{f, g\}, h\}$ con la permutazione $f, g, h \rightarrow h, f, g$. In definitiva bisogna verificare che:

$$\sum_{ijk} S^{kr} S^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} \frac{\partial h}{\partial x^r} + \sum_{ijk} S^{kr} S^{ij} \frac{\partial h}{\partial x^i} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^j} \frac{\partial g}{\partial x^r} = 0. \quad (11.24)$$

Il secondo addendo a primo membro di (11.24), cambiando i nomi agli indici ($k \rightarrow j$ e quindi $i \rightarrow r$), può essere riscritto come:

$$\sum_{ijk} S^{kj} S^{ri} \frac{\partial h}{\partial x^r} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} = \sum_{ijk} S^{kj} S^{ri} \frac{\partial h}{\partial x^r} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial g}{\partial x^j},$$

dove, nell'ultimo passaggio abbiamo usato il teorema di Schwarz (per questo abbiamo richiesto le funzioni di classe C^2 e non solo differenziabili fino al secondo ordine). Scambiando ancora i nomi di i e k arriviamo a dire che il secondo addendo a primo membro di (11.24):

$$\sum_{ijk} S^{ij} S^{rk} \frac{\partial h}{\partial x^r} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} = - \sum_{ijk} S^{ij} S^{kr} \frac{\partial h}{\partial x^r} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j},$$

dove, nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'antisimmetria della matrice S . Abbiamo ottenuto che:

$$\sum_{ijk} S^{kr} S^{ij} \frac{\partial h}{\partial x^i} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^j} \frac{\partial g}{\partial x^r} = - \sum_{ijk} S^{ij} S^{kr} \frac{\partial h}{\partial x^r} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}.$$

Sostituendo a primo membro in (11.24) si ha immediatamente che (11.24) è verificata. Per concludere dimostriamo la proprietà (4). Se h è un campo scalare su $F(\mathbb{V}^{n+1})$ di classe C^2 almeno, si ha:

$$\begin{aligned} [X_f, X_g]h &= X_f X_g h - X_g X_f h = X_f \{g, h\} - X_g \{f, h\} = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} \\ &= -\{\{g, h\}, f\} - \{\{h, f\}, g\} = \{\{f, g\}, h\} = X_{\{f, g\}}h. \end{aligned}$$

L'arbitrarietà di h implica che:

$$[X_f, X_g] = X_{\{f, g\}}.$$

L'osservazione (2) in osservazioni 11.5 conclude la dimostrazione \square

11.3.2 Gruppi locali ad un parametro di trasformazioni canoniche attive.

Mostriamo ora come sia possibile associare ad ogni campo scalare $f : F(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ un gruppo ad un parametro di trasformazioni canoniche *attive*. Attivo significa che le trasformazioni non si devono intendere come trasformazioni di coordinate, ma come trasformazioni che spostano il punto rappresentativo del sistema fisico. Consideriamo a tal fine $f \in C^2(F(\mathbb{V}^{n+1}))$ ed il campo associato X_f . Vogliamo trovare le curve integrali di tale campo e con esse costruire il gruppo locale ad un parametro di diffeomorfismi associato a X_f . Si tratta quindi, in ogni sistema locale di coordinate canoniche (t, \mathbf{x}) , di risolvere l'equazione differenziale del prim'ordine nell'incognita data dalla curva $(t, \mathbf{x}) = (t(u), \mathbf{x}(u))$:

$$X_f(t(u), \mathbf{x}(u)) = \frac{dx^k}{du} \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{dt}{du} \frac{\partial}{\partial t},$$

ció, esplicitamente:

$$\sum_{k=1}^n S^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_{(t(u), \mathbf{x}(u))} \frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{dx^k}{du} \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{dt}{du} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Notiamo prima di tutto che la funzione $t = t(u)$ deve essere costante. Pertanto l'equazione differenziale iniziale, *istante per istante*, si riduce al sistema:

$$S^t \nabla_{(t, \mathbf{x}(u))} f = \frac{d\mathbf{x}}{du}. \quad (11.25)$$

Le curve soluzioni $(t, \mathbf{x}) = (t(u), \mathbf{x}(u))$ che si ottengono nello spazio delle fasi sono tali da rimanere ciascuna nella stessa fibra individuata all'istante iniziale. In altre parole, il gruppo locale di diffeomorfismi ad un parametro $\Phi^{(X_f)}$ associato al campo X_f *preserva le fibre* dello spaziotempo delle fasi. Fissiamo un istante t una volta per tutte e consideriamo il gruppo locale ad un parametro $\phi^{(t, X_f)}$ associato su \mathbb{F}_t all'equazione differenziale autonoma (si noti che t non è il parametro che descrive le curve!). Per definizione

$$u \mapsto \phi_u^{(t, X_f)}(\mathbf{x}) =: \mathbf{x}'$$

è l'unica soluzione locale dell'equazione (11.25) che esce dal punto \mathbf{x} per $u = 0$. Vogliamo mostrare che per ogni valore di u la trasformazione $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$ definita localmente (in dipendenza dal valore assunto da u), è *canonica*, nel senso che la sua matrice jacobiana appartiene a $Sp(n, \mathbb{R})$. Definiamo, per t fissato, la matrice Jacobiana J , dipendente da \mathbf{x} e da u , di coefficienti:

$$J^i_k := \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}.$$

Consideriamo poi l'unica soluzione $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(u)$ di (11.25) che congiunge \mathbf{x} , preso a $u = 0$ a \mathbf{x}'_1 preso a $u = u_1$. In questo modo $\mathbf{x}' = \phi_{u_1}^{(t, X_f)}(\mathbf{x})$. Vogliamo calcolare, lungo questa curva la derivata in u di

$$u \mapsto (J^t S J)_{\mathbf{x}'(u)},$$

e mostrare che è nulla. Questo fatto implica che $J^t S J$ è costante lungo la curva e quindi la trasformazione $\mathbf{x}' = \phi_{u_1}^{(t, X_f)}(\mathbf{x})$ ha matrice jacobiana che soddisfa $J^t S J = S$ dato che ciò accade per $u = 0$. Notiamo che

$$\frac{d}{du} (J^t S J) = \left(\frac{dJ^t}{du} S J \right) + J^t S \frac{dJ}{du}. \quad (11.26)$$

Tenendo conto che

$$\frac{d}{du} (J_{\mathbf{x}'(u)}^t)^i_k = \frac{d}{du} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \Big|_{\mathbf{x}'(u)} = \frac{\partial^2 x'^i}{\partial u \partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{dx'^i}{du} = \frac{\partial X_f^i}{\partial x^k},$$

esplicitando in componenti, il secondo membro di (11.26) è:

$$\sum_{i,k=1}^n \frac{\partial X_f^i}{\partial x^j} S_{ik} \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} + \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} S_{ik} \frac{\partial X_f^k}{\partial x^l} = \sum_{i,k,p=1}^n S_{ip} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^p} S_{ik} \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} + \sum_{i,k,s=1}^n \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} S_{ik} S_{ks} \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^s}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k,p=1}^n \delta_{kp} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x'^p} \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} - \sum_{i,s=1}^n \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \delta_{is} \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x'^s} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} - \sum_{s=1}^n \frac{\partial x'^s}{\partial x^j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x'^s} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^j} = 0.
\end{aligned}$$

Dato che per $u = 0$ si ha $J = I$ e pertanto $J^t S J = S$, concludiamo che, per ogni u deve valere $J^t S J = S$ come già detto all'inizio. In particolare ciò accade per $u = u_1$. Concludiamo che la trasformazione

$$(t, \mathbf{x}) \mapsto (t', \mathbf{x}') = \left(t, \phi_u^{(t, X_f)}(\mathbf{x}) \right),$$

è canonica ovunque è definita. Abbiamo provato la seguente proposizione.

Proposizione 11.4. *Il gruppo locale ad un parametro di diffeomorfismi $\Phi^{(X_f)}$ generato dal campo vettoriale X_f associato ad ogni campo scalare $f \in C^2(F(\mathbb{V}^{n+1}))$ è costituito da trasformazioni canoniche attive. Più precisamente, se l'aperto $A \subset F(\mathbb{V}^{n+1})$ è dotato di coordinate canoniche (t, \mathbf{x}) e $\Phi_u^{(X_f)}(A) \subset A$ è ben definita per un certo u , allora l'applicazione $(t, \mathbf{x}) \mapsto (t', \mathbf{x}')$ che corrisponde in coordinate all'azione di $\Phi_u^{(X_f)}$ è tale che $t' = t$ e la matrice jacobiana delle coordinate non temporali appartiene a $Sp(n, \mathbb{R})$. \diamond*

Esempi 11.2. Consideriamo una particella di massa m , che si muove in un piano, individuata da coordinate polari (r, θ) . Consideriamo la funzione $f(r, \theta, p_r, p_\theta) := p_\theta$ ed il gruppo ad un parametro di trasformazioni canoniche ad essa associato. Tale gruppo si ottiene integrando l'equazione differenziale, se $\mathbf{x} := (r, \theta, p_r, p_\theta)$:

$$S^t \nabla_{\mathbf{x}} f = \frac{d\mathbf{x}}{du}.$$

Il calcolo diretto mostra che tale equazione si riduce semplicemente a:

$$\frac{dr}{du} = 0, \quad \frac{d\theta}{du} = -1, \quad \frac{dp_r}{du} = 0, \quad \frac{dp_\theta}{du} = 0.$$

In definitiva il gruppo $\phi^{X_{p_\theta}}$ agisce come:

$$\phi_u^{(X_{p_\theta})}(r, \theta, p_r, p_\theta) = (r, \theta - u, p_r, p_\theta) =: (r', \theta', p'_r, p'_\theta), \quad (11.27)$$

e quindi, nello spazio delle configurazioni, corrisponde a rotazioni di un angolo $-u$ del punto attorno all'origine.

Se interpretiamo *passivamente* la trasformazione canonica indotta da f possiamo chiederci quale sia l'hamiltoniana $\mathcal{H}'(t', \mathbf{x}')$ associata alle coordinate (t', \mathbf{x}') . Si osservi che tuttavia, dato che la trasformazione di coordinate è attiva, la nuova funzione hamiltoniana \mathcal{H}' si deve più correttamente pensare come la funzione hamiltoniana di un *nuovo* sistema fisico, quello che si è ottenuto dal precedente in seguito alla trasformazione attiva generata dalla funzione f . Il

punto importante è che questo nuovo sistema ammette ancora una descrizione di Hamilton. Si osservi infine che non è in generale vero che l'hamiltoniana \mathcal{H}' espressa nelle variabili (t', \mathbf{x}') abbia la stessa forma dell'hamiltoniana \mathcal{H} espressa nelle variabili (t, \mathbf{x}) . In questo senso il nuovo sistema fisico sarà *differente* da quello iniziale.

Quello che faremo ora è determinare \mathcal{H}' a meno di infinitesimi in u del secondo ordine. La sua forma sarà utile nello stabilire le connessioni tra simmetrie di un sistema di Hamilton e grandezze conservate.

Proposizione 11.5. *Se, nelle stesse ipotesi della proposizione precedente, si interpreta la trasformazione $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$ in senso passivo ed è assegnata una funzione di Hamilton $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t, \mathbf{x})$ di classe C^2 , la funzione hamiltoniana $\mathcal{H}' = \mathcal{H}'(t', \mathbf{x}')$ da attribuire alle nuove coordinate può sempre essere scelta in modo tale che:*

$$\mathcal{H}'(t', \mathbf{x}'(t, \mathbf{x})) = \mathcal{H}(t, \mathbf{x}) - u \frac{\partial f}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + u O_{(t, \mathbf{x})}(u), \quad (11.28)$$

dove $O_{(t, \mathbf{x})}(u) \rightarrow 0$ per $u \rightarrow 0$. \diamond

Dimostrazione. Porremo $t = t'$ ovunque nel seguito dato che la trasformazione canonica considerata non altera la coordinata temporale. Dal Teorema (11.1) sappiamo che vale:

$$\mathcal{H}'(t, \mathbf{x}') = \mathcal{H}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{x}')) + \mathcal{K}(t, \mathbf{x}'),$$

dove la funzione \mathcal{K} è determinata, a meno di funzioni della sola variabile t additive, dalla richiesta

$$\frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial t} = S \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{K}(t, \mathbf{x}'),$$

cioè

$$\nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{K}(t, \mathbf{x}') = -S \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial t},$$

Sviluppiamo con Taylor nella variabile u la funzione $\partial \mathbf{x}' / \partial t$, dove $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(u, t, \mathbf{x})$. Si osservi che per $u = 0$, vale $\mathbf{x}'(0, t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ e pertanto la derivata parziale rispetto a t si annulla. Avremo allora:

$$\frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial t} = u \left. \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial t} \right|_{u=0} + u O_{(t, \mathbf{x})}(u),$$

dove $O_{(t, \mathbf{x})}(u) \rightarrow 0$ per $u \rightarrow 0$. In altre parole, scambiando l'ordine delle derivate ed usando la definizione di X_f :

$$\frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial t} = u \frac{\partial}{\partial t} S^t \nabla_{\mathbf{x}} f + u O_{(t, \mathbf{x})}(u).$$

Applicando $-S$ ad entrambi i membri, ricordando che $SS^t = I$ e notando che $SO_{(t, \mathbf{x})}(u)$ è ancora infinitesimo per $u \rightarrow 0$ (nel seguito rinominiamo pertanto $-SO$ semplicemente O), si trova che deve essere:

$$\nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{K}(t, \mathbf{x}') = -u \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\mathbf{x}} f(t, \mathbf{x}) + u O_{(t, \mathbf{x})}(u).$$

Nel secondo membro possiamo sostituire $\nabla_{\mathbf{x}}f(t, \mathbf{x})$ con $\nabla_{\mathbf{x}'}f(t, \mathbf{x}')$ commettendo un errore di ordine superiore al primo in u come è facile verificare⁴. In definitiva abbiamo trovato che:

$$\nabla_{\mathbf{x}'}\mathcal{K}(t, \mathbf{x}') = -\nabla_{\mathbf{x}'}u\frac{\partial f(t, \mathbf{x}')}{\partial t} + uO_{(t, \mathbf{x})}(u).$$

A meno di infinitesimi del secondo ordine in u siamo liberi di scegliere:

$$\mathcal{K}(t, \mathbf{x}) = -u\frac{\partial f(t, \mathbf{x})}{\partial t}.$$

□

Definizione 11.3. Nelle ipotesi della proposizione precedente, l'hamiltoniana \mathcal{H} si dirà essere **invariante in forma al prim'ordine** sotto il gruppo locale ad un parametro di trasformazioni canoniche generate dalla funzione f quando:

$$\mathcal{H}'(t', \mathbf{x}') = \mathcal{H}(t', \mathbf{x}') + uO_{(t', \mathbf{x}')} (u), \quad (11.29)$$

dove $O_{(t', \mathbf{x}')} (u) \rightarrow 0$ se $u \rightarrow 0$. ◇.

Osservazioni 11.6. Il significato della definizione dovrebbe essere fisicamente ovvio: se l'hamiltoniana è invariante in forma il sistema fisico associato all'hamiltoniana \mathcal{H}' che si ottiene sottoponendo il sistema fisico iniziale, associato all'hamiltoniana \mathcal{H} , ha la stessa forma (nelle nuove coordinate) della precedente hamiltoniana. La trasformazione canonica attiva che abbiamo usato è in questo senso una **simmetria hamiltoniana** del sistema fisico. Vedremo nella prossima sezione che in questa situazione abbiamo nuovamente uno strettissimo legame tra presenza di simmetria ed esistenza di quantità fisiche conservate (integrali primi).

11.3.3 Simmetrie e leggi di conservazione.

Consideriamo una funzione $f : F(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ quando sullo spazio delle fasi è stato assegnato un campo vettoriale dinamico Z individuato da funzioni Hamiltoniane $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t, q, p)$ in ogni sistema di coordinate dell'atlante canonico. La condizione che f sia un integrale primo per il sistema hamiltoniano \mathfrak{S} la cui dinamica è descritta da Z , in coordinate canoniche si scrive:

$$\frac{d}{dt}f(t, \mathbf{x}(t)) = 0, \quad (11.30)$$

dove $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ è una qualsiasi soluzione delle equazioni di Hamilton:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = S\nabla\mathcal{H}(t\mathbf{x}(t)).$$

⁴Sviluppando con Taylor per $u = 0$, abbiamo che $u\nabla_{\mathbf{x}'}f(t, \mathbf{x}') = u(\nabla_{\mathbf{x}}f(t, \mathbf{x}) + uH(t, \mathbf{x})) = u\nabla_{\mathbf{x}}f(t, \mathbf{x}) + uO(u)$. Accade la stessa cosa rimpiazzando $\nabla_{\mathbf{x}}$ con $\nabla_{\mathbf{x}'}$.

Sviluppando il secondo membro di (11.30), la stessa condizione si può riscrivere:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{(t, \mathbf{x}(t))} + \left. \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \nabla f \right|_{(t, \mathbf{x}(t))} = 0,$$

cioé, usando le equazioni di Hamilton:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{(t, \mathbf{x}(t))} + \sum_{i,j=1}^{2n} S^{ij} \left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_{(t, \mathbf{x}(t))} = 0.$$

Abbiamo trovato che f è un integrale primo se e solo se, su ogni soluzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ delle equazioni di Hamilton vale:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\} \right] \Big|_{(t, \mathbf{x}(t))} = 0.$$

D'altra parte, assumendo che l'hamiltoniana sia una funzione di classe C^2 e pertanto valendo il teorema di esistenza (ed unicità) delle soluzioni delle equazioni di Hamilton, possiamo concludere che per ogni evento (t, \mathbf{x}) nello spazio delle fasi, c'è sicuramente una soluzione che ha quell'evento come condizione iniziale. Questo significa che affinché f sia integrale primo è necessario e sufficiente che *ovunque* sullo spaziotempo delle fasi (in ogni sistema locale di coordinate canoniche) valga l'identità:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\} = 0.$$

Osservazioni 11.7. In tale identità non compaiono più le soluzioni delle equazioni del moto e pertanto, in virtù di tale identità, non è più necessario risolvere il problema del moto per stabilire se una funzione è un integrale primo.

Esprimiamo questo risultato formalmente aggiungendo un ulteriore importante risultato.

Teorema 11.4. *Si consideri un sistema fisico hamiltoniano \mathfrak{S} descritto sullo spazio delle fasi da un campo vettoriale dinamico Z individuato da funzioni Hamiltoniane $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t, q, p)$ di classe C^2 in ogni sistema di coordinate dell'atlante canonico. Valgono i seguenti fatti.*

(a) *Una funzione $f : F(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 è integrale primo per il sistema hamiltoniano \mathfrak{S} se e solo se vale la condizione, ovunque su $F(\mathbb{V}^{n+1})$:*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\} = 0. \quad (11.31)$$

(b) *Se f è di classe C^2 e $g : F(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ è un ulteriore integrale primo di classe C^2 , allora il campo scalare su $F(\mathbb{V}^{n+1})$ dato dalla parentesi di Poisson $\{f, g\}$ è un ulteriore integrale primo. \diamond*

Dimostrazione. La prima proposizione è stata provata sopra. Per quanto riguarda la seconda osserviamo che:

$$\frac{\partial \{f, g\}}{\partial t} + \{\{f, g\}, \mathcal{H}\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} - \{\{\mathcal{H}, f\}, g\} - \{\{g, \mathcal{H}\}, f\},$$

dove, nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'identità di Jacobi. Usando l'antisimmetria e la linearità della parentesi di Poisson, possiamo ancora scrivere che:

$$\frac{\partial\{f, g\}}{\partial t} + \{\{f, g\}, \mathcal{H}\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\}, g \right\} - \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} + \{g, \mathcal{H}\} \right\} = 0.$$

Notiamo ora che, essendo f e g integrali primi, deve essere:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \{g, \mathcal{H}\} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\} = 0.$$

Per linearità $\{f, g\}$ soddisfa la condizione (11.31) ed è dunque anch'esso un integrale primo. \square

Osservazioni 11.8.

(1) Il primo enunciato del teorema implica immediatamente che l'hamiltoniana stessa è un integrale primo se nel sistema di coordinate canoniche usato essa non dipende esplicitamente dal tempo, essendo evidentemente $\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\} = 0$ per antisimmetria.

(2) Il numero massimo possibile di integrali primi su $F(\mathbb{V}^{n+1})$ funzionalmente indipendenti è $2n + 1$. Questo segue dal fatto che sistemi di funzioni a valori in \mathbb{R} che siano funzionalmente indipendenti possono essere usati localmente come sistemi di coordinate su $F(\mathbb{V}^{n+1})$ – oppure su sottovarietà – a causa della loro funzionale indipendenza, e del fatto che $F(\mathbb{V}^{n+1})$ ha esattamente $2n + 1$ dimensioni. Questo significa che, calcolando ricorsivamente parentesi di Poisson di integrali primi, ad un certo punto si troveranno gli stessi integrali primi già ottenuti oppure funzioni di essi.

(3) L'equazione di Liouville per la densità di probabilità ρ nello spaziotempo delle fasi può essere scritta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, \mathcal{H}\} = 0.$$

Diamo infine il teorema hamiltoniano che, giocando lo stesso ruolo del teorema di Nöther in meccanica lagrangiana, connette la presenza di simmetrie di un sistema hamiltoniano all'esistenza di integrali primi. Il teorema è in realtà più potente del teorema di Nöther dato che, in questo contesto hamiltoniano abbiamo un ulteriore risultato, assente nella formulazione di Lagrange: l'integrale primo associato ad una simmetria risulta essere proprio la funzione che genera la simmetria nel senso dei gruppi locali ad un parametro di trasformazioni canoniche.

Teorema 11.5. *Sia $f \in C^2(F(\mathbb{V}^{n+1}))$ un campo scalare che genera un gruppo locale ad un parametro di trasformazioni canoniche $\Phi^{(X_f)}$. Sia \mathcal{H} una funzione di Hamilton riferita ad un sistema locale di coordinate canoniche su $F(\mathbb{V}^{n+1})$ il cui dominio è invariante sotto l'azione di $\Phi^{(X_f)}$. I seguenti tre fatti sono equivalenti.*

- (1) f è un integrale primo.
- (2) Vale ovunque nelle coordinate considerate:

$$\{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

(3) La funzione hamiltoniana \mathcal{H} può essere definita in modo tale che risulti essere invariante in forma al prim'ordine sotto l'azione del gruppo locale ad un parametro di diffeomorfismi generato da X_f .

*Se valgono le condizioni (1), (2) e (3), allora vale anche

$$[X_f, Z] = 0 \quad (11.32)$$

sulla carta considerata e pertanto $\Phi^{(X_f)}$ trasforma soluzioni delle equazioni di Hamilton associate a \mathcal{H} in analoghe soluzioni. \diamond

Dimostrazione. L'equivalenza tra (1) e (2) è già stata provata nel teorema precedente. Mostriamo l'equivalenza di tali condizioni con (3). La condizione di invarianza in forma al prim'ordine si scrive (si ricordi che $t = t'$):

$$\mathcal{H}'(t, \mathbf{x}') = \mathcal{H}(t, \mathbf{x}') + uO'_{(t, \mathbf{x}')} (u). \quad (11.33)$$

Tenendo conto che deve anche valere, per la Proposizione 11.5:

$$\mathcal{H}'(t, \mathbf{x}') = \mathcal{H}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{x}')) - u \frac{\partial f}{\partial t} + uO_{(t', \mathbf{x}')} (u), \quad (11.34)$$

dalla precedente formula si trova che:

$$\mathcal{H}(t, \mathbf{x}') = \mathcal{H}(t, \mathbf{x}) - u \frac{\partial f}{\partial t} + uO''_{(t', \mathbf{x}')} (u). \quad (11.35)$$

Dividendo per u e facendo il limite per $u \rightarrow 0$ otteniamo che:

$$\left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} \mathcal{H}(t, \mathbf{x}') + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Esplicitamente:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^k} \frac{dx'^k}{du} \Big|_{u=0} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

ossia

$$\sum_{k,i=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^k} S^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

che può finalmente risciversi nella forma (2):

$$\{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Procedendo al contrario abbiamo che questa identità implica (11.35). Quest'ultima, in virtù di (11.34) implica (11.33) cioè la (1). Abbiamo provato in questo modo che (1),(2) e (3) sono equivalenti.

Per quanto riguarda l'ultima affermazione, si osservi che il vettore dinamico Z può scriversi formalmente:

$$Z = \frac{\partial}{\partial t} - X_{\mathcal{H}} ,$$

pertanto, usando il fatto che $[X_f, \frac{\partial}{\partial t}] = X_{-\frac{\partial}{\partial t}}$ e facendo in particolare uso di (4) della Proposizione 11.3 si trova:

$$[X_f, Z] = \left[X_f, \frac{\partial}{\partial t} - X_{\mathcal{H}} \right] = \left[X_f, \frac{\partial}{\partial t} \right] + [X_f, X_{-\mathcal{H}}] = X_{-\frac{\partial}{\partial t}} + X_{-\{f, \mathcal{H}\}} = -X_{\frac{\partial}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\}} = 0 .$$

Questo conclude la dimostrazione. \square

Esempi 11.3.

1. Consideriamo nuovamente la particella di massa m , che si muove in un piano, individuata da coordinate polari (r, θ) e sottoposta ad una forza conservativa con energia potenziale centrale $\mathcal{U} = \mathcal{U}(r)$. L'hamiltoniana della particella sarà allora:

$$\mathcal{H}(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \mathcal{U}(r) . \quad (11.36)$$

Consideriamo ancora la funzione $f(r, \theta, p_r, p_\theta) := p_\theta$ ed il gruppo ad un parametro di trasformazioni canoniche ad essa associato. Tale gruppo, come visto precedentemente, agisce come:

$$\phi_u^{(X_{p_\theta})}(r, \theta, p_r, p_\theta) = (r, \theta - u, p_r, p_\theta) =: (r', \theta', p'_r, p'_\theta) , \quad (11.37)$$

e quindi, nello spazio delle configurazioni, corrisponde a rotazioni di un angolo $-u$ del punto attorno all'origine. Dato che la trasformazione canonica $\phi_u^{(X_{p_\theta})}$ non dipende dal tempo ed è quindi completamente canonica, possiamo porre $\mathcal{K} \equiv 0$ e l'hamiltoniana $\mathcal{H}'(\mathbf{x}')$ può essere definita come $\mathcal{H}'(\mathbf{x}') = \mathcal{H}(\mathbf{x}(\mathbf{x}'))$ cioè, da (11.37):

$$\mathcal{H}'(r', \theta', p'_r, p'_\theta) = \mathcal{H}(r', \theta' + u, p'_r, p'_\theta) .$$

Abbiamo trovato che:

$$\mathcal{H}'(r', \theta', p'_r, p'_\theta) = \frac{p'^2_r}{2m} + \frac{p'^2_\theta}{2mr'^2} + \mathcal{U}(r') .$$

Per confronto con (11.36) abbiamo che:

$$\mathcal{H}'(r', \theta', p'_r, p'_\theta) = \mathcal{H}(r', \theta', p'_r, p'_\theta)$$

e quindi l'hamiltoniana è invariante in forma (non solo al prim'ordine) sotto l'azione di $\phi^{X_{p_\theta}}$. Di conseguenza la funzione p_θ si conserva sui moti del sistema. Tale grandezza è il momento angolare del punto materiale considerato.

Equivalentemente, il calcolo diretto di $\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\}$ mostra che:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 ,$$

mentre

$$\{f, \mathcal{H}\} = 1 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = 0,$$

dato che \mathcal{H} non dipende esplicitamente dal tempo. Pertanto $\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\} = 0$ e ritroviamo, in base al teorema provato sopra, che f è un integrale primo.

Infine, per l'ultima affermazione del teorema, deve accadere che, se $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ descrive un moto del punto materiale, anche $t \mapsto \phi_u^{X_{p\theta}}(\mathbf{x}(t))$ deve descrivere un moto del sistema fisico per ogni fissato valore dell'angolo u .

2. Consideriamo un sistema di due particelle di masse m_1 e m_2 rispettivamente, descritte in coordinate cartesiane ortonormali di un sistema di riferimento inerziale. Il vettore posizione di ciascuno dei due punti sarà indicato con \mathbf{x}_i dove $i = 1, 2$ etichetta i due punti. I momenti coniugati alle componenti dei due vettori posizione saranno le componenti dell'impulso \mathbf{p}_i di ciascuno dei due punti. Ammettiamo che le due particelle interagiscano con forze conservative individuate dall'energia potenziale $\mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = U(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^2)$, dove U è una funzione di classe C^2 . Nel sistema di riferimento considerato, la funzione hamiltoniana del punto materiale sarà dunque, usando le coordinate canoniche dette:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + \mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2).$$

Fissiamo un versore \mathbf{n} e consideriamo la funzione

$$f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) := \sum_{i=1}^2 m_i \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{n} - t \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n}.$$

Il calcolo diretto mostra che:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\} = - \sum_{i=1}^2 \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n} + \sum_{i=1}^2 \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n} - t \mathbf{n} \cdot \sum_{i=1}^2 \nabla_{\mathbf{x}_i} \mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0,$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che, per costruzione $\nabla_{\mathbf{x}_1} \mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -\nabla_{\mathbf{x}_2} \mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. In base al teorema provato, ne consegue che f è un integrale primo, ma anche che l'hamiltoniana è invariante in forma al prim'ordine sotto il gruppo ad un parametro di trasformazioni canoniche generate da f . La legge di conservazione di f esprime semplicemente il fatto che sui moti del sistema (cioè sulle soluzioni delle equazioni di Hamilton) vale la ben nota identità, che segue dalla conservazione dell'impulso totale e dal terzo principio della dinamica e che afferma che il centro di massa del sistema evolve come un punto materiale di massa pari alla massa totale del sistema ed impulso pari all'impulso totale del sistema:

$$\sum_{i=1}^2 m_i \frac{\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_i(0)}{t} \cdot \mathbf{n} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n}.$$

Cosa possiamo dire del gruppo ad un parametro di trasformazioni canoniche generate da f ? Le equazioni che determinano tale gruppo di trasformazioni sono:

$$\frac{d\mathbf{p}'_i}{du} = \nabla_{\mathbf{x}'_i} f(t, \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) = m\mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{x}'_i}{du} = -\nabla_{\mathbf{p}'_i} f(t, \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) = t\mathbf{n}.$$

Queste possono essere integrate completamente e producono:

$$\mathbf{p}'_i = \mathbf{p}_i + m\mathbf{u}\mathbf{n}, \quad \mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i + t\mathbf{u}\mathbf{n}. \quad (11.38)$$

Deve allora essere chiaro che per ogni fissato u , la trasformazione scritta sopra è una *trasformazione pura di Galileo* (vedi il capitolo 2) nella direzione \mathbf{n} e con velocità $u\mathbf{n}$.

L'invarianza in forma della funzione di Hamilton sotto tale gruppo di trasformazioni, esprime il fatto che i sistemi di riferimento inerziali connessi da tali trasformazioni sono fisicamente equivalenti ai fini dello studio della dinamica.

Usando direttamente la (11.34) con la f studiata, si vede subito che la funzione di hamilton nelle coordinate canoniche primarie può essere scelta come:

$$\mathcal{H}'(t', \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) = \frac{\mathbf{p}'_1{}^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}'_2{}^2}{2m_2} + \mathcal{U}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) + uO_{t', \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2}(u). \quad (11.39)$$

L'invarianza in forma al prim'ordine è allora evidente. Non possiamo dire nulla, lavorando al prim'ordine, sulla funzione infinitesima che appare come ultimo addendo. In realtà, nel caso in esame, si può provare che la funzione infinitesima $O_{t', \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2}$ è identicamente nulla. Infatti considerando la trasformazione canonica *finita* (11.38) si ricava che:

$$\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} = u\mathbf{n}, \quad \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial t} = 0,$$

pertanto, dovendo essere dalla teoria generale (11.12) dove (per (11.13)): $\nabla_{\mathbf{x}'_i} \mathcal{K} = \frac{\partial \mathbf{p}'_i}{\partial t} = 0$ e $\nabla_{\mathbf{p}'_i} \mathcal{K} = -\frac{\partial \mathbf{x}'_i}{\partial t} = u\mathbf{n}$ si ricava che deve essere:

$$\mathcal{K}(t, \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) = g(t) - u\mathbf{n} \cdot \sum_{i=1}^2 \mathbf{p}_i,$$

essendo g una funzione (differenziabile) arbitraria. Scegliendo $g(t) := \frac{u^2(m_1+m_2)}{2}$, l'equazione (11.12) produce con qualche calcolo:

$$\mathcal{H}'(t', \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) = \frac{\mathbf{p}'_1{}^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}'_2{}^2}{2m_2} + \mathcal{U}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2).$$

Si osservi che la funzione g è infinitesima del secondo ordine in u , per tale motivo risultava essere trascurata nella (11.39).

3. Per sistemi di N punti materiali isolati che interagiscono con forze interne conservative, si verifica facilmente, descrivendoli in coordinate cartesiane ortonormali di un riferimento inerziale, che l'hamiltoniana è invariante informale al prim'ordine (ma anche finitamente), sotto l'azione di ognuno dei 9 tipi di sottogruppi ad un parametro indipendenti in cui si decompone tale gruppo, viste come trasformazioni canoniche, escludendo le traslazioni temporali, che non preservano le fibre dello spaziotempo delle fasi e devono essere discusse a parte. In questo modo si vede che,

nel senso chiarito dal teorema precedente, le rotazioni attorno ad un asse sono generate dalla componente del momento angolare totale del sistema rispetto all'asse di rotazione, le traslazioni lungo una direzione sono generate dalla componente dell'impulso totale del sistema rispetto a tale direzione, le trasformazioni pure di Galileo lungo una direzione (\mathbf{n}) sono generate dalla componente del boost totale del sistema rispetto a tale direzione: $\mathbf{n} \cdot \sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{x}_i - t \mathbf{p}_i)$. Tali funzioni generatrici sono a loro volta integrali primi.