

## Capitolo 9

# Simmetrie e leggi di conservazione: teoremi di Nöther e di Jacobi.

In questo capitolo consideriamo altri argomenti più avanzati di Meccanica Lagrangiana che hanno avuto delle fondamentali conseguenze nei successivi sviluppi della fisica matematica e teorica, anche in ambiti molto lontani dalla meccanica classica.

Introdurremo i teoremi che mostrano la relazione tra simmetrie della lagrangiana e le varie quantità conservate (integrali primi): il teorema di Nöther e quello di Jacobi. Nell'ultima sezione riformuleremo il teorema di Nöther in una versione molto generale, usando il linguaggio appropriato della geometria differenziale, che include il teorema di Jacobi come sottocaso.

### 9.1 Il legame tra simmetria e leggi di conservazione: coordinate cicliche.

In questa sezione cominceremo a studiare il legame tra simmetrie di un sistema che ammette lagrangiana ed alcuni dei suoi integrali primi, cioè quantità conservate sui moti del sistema. Ci concentreremo sulla nozione di *coordinata ciclica* e di momento coniugato associato. Esemplicheremo i risultati mostrando come, sotto le debite ipotesi sul sistema fisico in esame, l'invarianza per traslazioni sia connessa alla conservazione dell'impulso, mentre l'invarianza per rotazioni sia connessa alla conservazione del momento angolare.

#### 9.1.1 Coordinate cicliche e conservazione dei momenti coniugati.

Consideriamo un sistema fisico di punti materiali  $\mathfrak{S}$  descritto nello spaziotempo degli atti di moto  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  in termini di una lagrangiana  $\mathcal{L}$ . Questa lagrangiana potrà essere associata ad un riferimento (inerziale o meno), ma per il momento rimaniamo su un piano generale. Supponiamo di avere scelto coordinate locali naturali  $t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$  e che, nello spaziotempo degli

atti di moto nelle dette coordinate risulti, in riferimento ad una fissata coordinata  $q^j$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)}{\partial q^j} = 0, \quad \text{per ogni scelta di } (t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n).$$

Diremo in tal caso che la coordinata  $q^j$  è **ciclica** o **ignorabile**. Si osservi che la condizione di ciclicità rispetto alla coordinata  $q^j$  è del tutto *equivalente* alla *condizione di invarianza* della lagrangiana sotto trasformazioni che alterino solo la coordinata  $q^j$  lasciando immutate le altre:

$$(q^1, \dots, q^{j-1}, q^j, q^{j+1}, \dots, q^n) \mapsto (q^1, \dots, q^{j-1}, q^j + \Delta q^j, q^{j+1}, \dots, q^n).$$

Dire che vale (9.2) è infatti evidentemente equivalente a dire che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^{j-1}, q^j + \Delta q^j, q^{j+1}, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \mathcal{L}(t, q^1, q^{j-1}, q^j, q^{j+1}, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n), \\ \text{per ogni scelta di } (t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n). \end{array} \right.$$

Ora le equazioni di Eulero-Lagrange (7.52) forniscono immediatamente l'identità:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(t, q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^j(t))}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\mathcal{L}(t, q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^j(t))}{\partial q^j}$$

dove  $q^k = q^k(t)$  per  $k = 1, \dots, n$ , è una generica soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange rappresentata nelle coordinate locali dette (e pertanto, su di essa  $\dot{q}^k(t) = dq^k/dt$  per  $k = 1, \dots, n$ ). Nelle nostre ipotesi di ciclicità della coordinata  $q^j$ , la derivata parziale a secondo membro è nulla e pertanto:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(t, q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^j(t))}{\partial \dot{q}^j} = 0.$$

Questa equazione dice che il **momento coniugato** alla coordinata  $q^j$ , cioè la funzione definita nelle coordinate locali su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  considerate:

$$p_j(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) := \frac{\partial \mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)}{\partial \dot{q}^j} \quad (9.1)$$

si conserva nel tempo *su ogni moto del sistema*. Abbiamo quindi provato la seguente utile proposizione.

**Proposizione 9.1.** *Consideriamo un sistema fisico di punti materiali  $\mathfrak{S}$  descritto nello spaziotempo degli atti di moto  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  in termini di una lagrangiana  $\mathcal{L}$ . Supponiamo di avere scelto coordinate locali naturali  $t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$  e che, nelle dette coordinate risulti,*

$$\frac{\partial \mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)}{\partial q^j} = 0, \quad \text{per ogni scelta di } (t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n). \quad (9.2)$$

ovvero, equivalentemente, la lagrangiana  $\mathcal{L}$  sia invariante sotto trasformazioni

$$(q^1, \dots, q^{j-1}, q^j, q^{j+1}, \dots, q^n) \mapsto (q^1, \dots, q^{j-1}, q^j + \Delta q^j, q^{j+1}, \dots, q^n), \quad (9.3)$$

per ogni scelta di  $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  e per  $\Delta q^j$ . In queste ipotesi il momento coniugato a  $q^j$ ,  $p_j$  definito in (9.1) si conserva nel tempo su ogni soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange (cioé su ogni moto del sistema).  $\diamond$

Il significato fisico di  $p_j$  dipende dal caso considerato. Vedremo tra poco due esempi importanti riferiti al caso in cui la lagrangiana ha struttura standard “energia cinetica piú potenziale” rispetto ad un fissato sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{S}$  e le coordinate libere  $q^1, \dots, q^n$  sono scelte in modo da essere solidali con  $\mathcal{S}$ .

Consideriamo un sistema  $\mathfrak{S}$  di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  dotati di massa  $m_1, \dots, m_N$  rispettivamente e sottoposto a vincoli olonomi ideali oltre che a forze date da un potenziale  $\mathcal{V}|_{\mathcal{S}}$  rispetto al riferimento  $\mathcal{S}$ . Ammettiamo che le funzioni di vincolo *non dipendano dal tempo* quando espresse in coordinate cartesiane solidali con  $\mathcal{S}$ . Scegliendo coordinate lagrangiane  $q^1, \dots, q^n$  solidali con  $\mathcal{S}$  si avrà allora una lagrangiana

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \mathcal{T}|_{\mathcal{S}}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) + \mathcal{V}|_{\mathcal{S}}(t, q^1, \dots, q^n).$$

Notare l’assenza della coordinata  $t$  nell’energia cinetica. Dato che le coordinate sono solidali con  $\mathcal{S}$ , se  $\mathbf{x}_i := P_i - O$  è il vettore posizione del punto  $i$ -esimo rispetto all’origine  $O$  di un sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{S}$ , avremo che

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(q^1, \dots, q^n). \quad (9.4)$$

Questo spiega in particolare l’assenza della variabile  $t$  nell’espressione dell’energia cinetica. La coordinata  $t$  sarà assente anche da  $\mathcal{V}$  nel caso in cui le forze attive siano tutte conservative, in modo tale che  $\mathcal{V}|_{\mathcal{S}} = -\mathcal{U}|_{\mathcal{S}}(q^1, \dots, q^n)$ , essendo quest’ultima l’energia potenziale del sistema  $\mathfrak{S}$ . Nel caso in esame l’energia cinetica si potrà esplicitare come:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{S}}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \sum_{h,k=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^h} \dot{q}^k \dot{q}^h.$$

Pertanto, con semplici calcoli otteniamo:

$$p_j = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} \dot{q}^k \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^j} \quad (9.5)$$

ovvero, tenendo conto di (9.4), sui moti del sistema possiamo scrivere che:

$$p_j = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i|_{\mathcal{S}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^j} \quad (9.6)$$

### 9.1.2 Invarianza traslazionale e conservazione dell'impulso.

Consideriamo ancora un sistema  $\mathfrak{S}$  di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  dotati di massa  $m_1, \dots, m_N$  rispettivamente e sottoposto a vincoli olonomi ideali oltre che a forze date da un potenziale  $\mathcal{V}|_{\mathcal{I}}$  rispetto al riferimento  $\mathcal{I}$ . Ammettiamo ancora che le funzioni di vincolo *non dipendano dal tempo* quando espresse in coordinate cartesiane solidali con  $\mathcal{I}$ , per cui scegliendo coordinate lagrangiane  $q^1, \dots, q^n$  *solidali* con  $\mathcal{I}$  si ha la lagrangiana

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{I}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \mathcal{T}|_{\mathcal{I}}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) + \mathcal{V}|_{\mathcal{I}}(t, q^1, \dots, q^n).$$

Possiamo allora applicare le formule (9.5) e (9.6) per il calcolo dei momenti coniugati. Supponiamo ora in particolare che la coordinata  $q^j$  descriva *traslazioni rigide del sistema nella direzione  $\mathbf{n}$* . In altre parole, per ogni  $\Delta q^j \in \mathbb{R}$  deve valere:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i(q^1, \dots, q^{j-1}, q^j + \Delta q^j, q^{j+1}, \dots, q^n) = \mathbf{x}_i(q^1, q^{j-1}, q^j, q^{j+1}, \dots, q^n) + \Delta q^j \mathbf{n}, \\ \text{per ogni } i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (9.7)$$

Notare che *tutti* i punti sono traslati, al variare di  $q^j$ , della *stessa* traslazione  $\Delta q^j \mathbf{n}$ . In questo senso la traslazione è *rigida*. Assumiamo anche che la coordinata  $q^j$  sia ciclica per la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{I}}$ . In questo caso il momento coniugato  $p_j$  assume forma sul moto per (9.6)

$$p_j = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n m_i \mathbf{v}_i|_{\mathcal{I}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^j} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i|_{\mathcal{I}} \cdot \mathbf{n},$$

ovvero

$$p_j = \mathbf{P}|_{\mathcal{I}} \cdot \mathbf{n}. \quad (9.8)$$

Abbiamo di conseguenza la seguente proposizione.

**Proposizione 9.2.** *Si consideri un sistema di punti materiali  $\mathfrak{S}$  soggetto a vincoli olonomi ideali, indipendenti dal tempo nel riferimento  $\mathcal{I}$  nel quale le forze attive sono individuate da una funzione potenziale  $\mathcal{V}|_{\mathcal{I}}$ , e si usino coordinate libere  $q^1, \dots, q^n$  solidali con  $\mathcal{I}$ . Vale quanto segue.*

(a) *Se la coordinata  $q^j$  descrive traslazioni rigide in  $\mathcal{I}$  di  $\mathfrak{S}$  nella direzione  $\mathbf{n}$ , il momento coniugato  $p_j$  coincide con la componente lungo  $\mathbf{n}$  dell'impulso totale (rispetto a  $\mathcal{I}$ ) su ogni moto di  $\mathfrak{S}$  del sistema.*

(b) *Se la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{I}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{I}} + \mathcal{V}|_{\mathcal{I}}$  è invariante sotto traslazioni rigide del sistema nella direzione  $\mathbf{n}$ , cioè  $q^j$  è ciclica, allora l'impulso totale di  $\mathfrak{S}$  (rispetto a  $\mathcal{I}$ ) lungo la direzione  $\mathbf{n}$  si conserva su ogni moto.  $\diamond$*

#### Esempi 9.1.

1. L'esempio più semplice è quello di un sistema  $\mathfrak{S}$  di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$ , con masse  $m_1, \dots, m_n$ , assumendo che  $\mathfrak{S}$  *non* sia sottoposto a vincoli e che le forze (che sono tutte attive)

siano tutte interne e conservative. In tal modo l'energia potenziale dipende solo dalle differenze di posizione tra i punti  $P_i - P_j$  con  $i, j = 1, \dots, N$  e  $i \neq j$ . In questo caso possiamo descrivere  $\mathfrak{S}$  in un riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , usando come coordinate libere le  $3N$  coordinate cartesiane dei punti di  $\mathfrak{S}$  rispetto ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali solidali con  $\mathcal{I}$  di assi  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  e origine  $O$ . Successivamente cambiamo coordinate libere tramite una trasformazione lineare, possiamo fare in modo che le prime 3 coordinate libere  $q^1, q^2, q^3$  descrivano traslazioni rigide del sistema  $\mathfrak{S}$  rispettivamente lungo gli assi delle coordinate  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  solidali con  $\mathcal{I}$ . Le 3 coordinate  $q^1, q^2, q^3$  suddette possono essere fissate come le componenti del vettore centro di massa  $G$  del sistema, le rimanenti coordinate libere possono per esempio essere fissate come le  $n - 3$  componenti degli  $N - 1$  vettori  $P_i - P_1$  con  $1 < i \leq N$ . Un sistema di coordinate alternativo è quello delle cosiddette *coordinate di Jacobi* sulle quali non ci soffermiamo.

Dato che sia l'energia cinetica non è funzione delle coordinate non puntate e l'energia potenziale dipende dalle differenze  $P_i - P_j$ , che sono invarianti sotto traslazioni rigide dell'intero sistema, concludiamo che la lagrangiana è invariante per traslazioni lungo  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Dalla proposizione precedente abbiamo immediatamente che si conservano le tre componenti dell'impulso totale del sistema.

**2.** Consideriamo un sistema  $\mathfrak{S}$  costituito da due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  di masse  $m_1$  e  $m_2$ , vincolati a stare su una retta liscia  $r$ , in quiete in un riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , con  $r$  passante per l'origine  $O$  di un sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{I}$  e con versore tangente  $\mathbf{n}$ . I punti sono interagenti l'uno con l'altro attraverso una coppia di forze conservative di energia potenziale  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\|P_1 - P_2\|)$ . In questo caso, a differenza dell'esempio precedente, sono presenti le reazioni vincolari (ideali) dovute al vincolo (4 equazioni funzionalmente indipendenti) ed il numero dei gradi di libertà del sistema si riduce a 2. Usando come coordinate libere  $q^1 := (s_1 + s_2)/2$  e  $q^2 := (s_1 - s_2)/2$ , dove  $s_i$  è la coordinata di  $P_i$  su  $r$  presa a partire da  $O$  con segno positivo nella direzione  $\mathbf{n}$ , si vede subito che la coordinata  $q^1$  genera traslazioni rigide del sistema. Ciò segue immediatamente dalle relazioni:  $s_1 = q^1 + q^2$  e  $s_2 = q^1 - q^2$ . La lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{I}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{I}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{I}}$  non dipenderà, per costruzione, dalla coordinata  $q^1$  (lo si dimostri!). Concludiamo pertanto che, in base alla proposizione precedente, si conserva l'impulso totale del sistema nella direzione  $\mathbf{n}$ .

### 9.1.3 Invarianza rotazionale e conservazione del momento angolare.

Consideriamo ancora un sistema  $\mathfrak{S}$  di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  dotati di massa  $m_1, \dots, m_N$  rispettivamente e sottoposto a vincoli olonomi ideali oltre che a forze date da un potenziale  $\mathcal{V}|_{\mathcal{I}}$  rispetto al riferimento  $\mathcal{I}$ . Ammettiamo ancora che le funzioni di vincolo *non dipendano dal tempo* quando espresse in coordinate cartesiane solidali con  $\mathcal{I}$ , per cui scegliendo coordinate lagrangiane  $q^1, \dots, q^n$  solidali con  $\mathcal{I}$  si ha la lagrangiana

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{I}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \mathcal{T}|_{\mathcal{I}}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) + \mathcal{V}|_{\mathcal{I}}(t, q^1, \dots, q^n).$$

Possiamo allora applicare le formule (9.5) e (9.6) per il calcolo dei momenti coniugati. Supponiamo ora in particolare che la coordinata  $q^j$  descriva *rotazioni rigide del sistema attorno*

all'asse  $\mathbf{n}$  rispetto al punto  $O'$ . In altre parole, per ogni  $\Delta q^j \in \mathbb{R}$  deve valere:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i(q^1, \dots, q^{j-1}, q^j + \Delta q^j, q^{j+1}, \dots, q^n) = R_{\mathbf{n}, \Delta q^j} \mathbf{x}_i(q^1, q^{j-1}, q^j, q^{j+1}, \dots, q^n), \\ \text{per ogni } i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (9.9)$$

$R_{\mathbf{n}, \Delta q^1} : V^3 \rightarrow V^3$  è l'operatore che ruota il vettore su cui è applicato di un angolo  $\Delta q^1$  positivamente attorno al versore  $\mathbf{n}$ . Notare che *tutti* i vettori posizione  $\mathbf{x}_i = P_i - O$  sono ruotati, al variare di  $q^j$ , della *stessa* rotazione  $R_{\mathbf{n}, \Delta q^1}$ . In questo senso la rotazione è *rigida*. Assumiamo anche che la coordinata  $q^j$  sia ciclica per la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ . In questo caso il momento coniugato  $p_j$  assume forma sul moto per (9.6)

$$p_j = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n m_i \mathbf{v}_i|_{\mathcal{S}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^j} = \sum_{N=1}^N m_i \mathbf{v}_i|_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} \wedge \mathbf{x}_i,$$

dove abbiamo usato il fatto che:

$$\frac{d}{d\theta} R_{\mathbf{n}, \theta} \mathbf{x} = \mathbf{n} \wedge (R_{\mathbf{n}, \theta} \mathbf{x}).$$

Tenendo conto del fatto che  $\mathbf{v}_i|_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} \wedge \mathbf{x}_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i$ , possiamo riscrivere  $p_j$  ottenuto sopra come:

$$p_j = \mathbf{n} \cdot \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i,$$

ovvero

$$p_j = \Gamma_O|_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n}. \quad (9.10)$$

dove  $\Gamma_O|_{\mathcal{S}}$  è il momento angolare totale del sistema  $\mathfrak{S}$  rispetto al polo  $O$  valutato nel riferimento  $\mathcal{S}$ . Abbiamo di conseguenza la seguente proposizione.

**Proposizione 9.3.** *Si consideri un sistema di punti materiali  $\mathfrak{S}$  soggetto a vincoli olonomi ideali, indipendenti dal tempo nel riferimento  $\mathcal{S}$  nel quale le forze attive sono individuate da una funzione potenziale  $\mathcal{V}|_{\mathcal{S}}$ , e si usino coordinate libere  $q^1, \dots, q^n$  solidali con  $\mathcal{S}$ . Vale quanto segue.*

(a) *Se la coordinata  $q^j$  descrive rotazioni rigide in  $\mathcal{S}$  di  $\mathfrak{S}$  attorno all'asse  $\mathbf{n}$  e rispetto al punto  $O$ , il momento coniugato  $p_j$  coincide con la componente lungo  $\mathbf{n}$  del momento angolare totale del sistema  $\mathfrak{S}$  rispetto al polo  $O$  valutato nel riferimento  $\mathcal{S}$ .*

(b) *Se la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{S}} + \mathcal{V}|_{\mathcal{S}}$  è invariante sotto rotazioni rigide del sistema attorno all'asse  $\mathbf{n}$  e rispetto al punto  $O$ , cioè la coordinata  $q^j$  è ciclica allora la componente lungo  $\mathbf{n}$  del momento angolare totale del sistema  $\mathfrak{S}$  rispetto al polo  $O$  valutato nel riferimento  $\mathcal{S}$  si conserva su ogni moto.  $\diamond$*

### Esempi 9.2.

1. L'esempio più semplice è quello di un sistema  $\mathfrak{S}$  di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$ , con masse

$m_1, \dots, m_n$ , assumendo che  $\mathfrak{S}$  non sia sottoposto a vincoli e che le forze (che sono tutte attive) siano tutte interne e conservative. In tal modo l'energia potenziale dipende solo dalle differenze di posizione tra i punti  $P_i - P_j$  con  $i, j = 1, \dots, N$  e  $i \neq j$ . In questo caso possiamo descrivere  $\mathfrak{S}$  in un riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , usando come coordinate libere le  $3N$  coordinate cilindriche  $\varphi_i, r_i, z_i$  di ciascuno degli  $N$  punti di  $\mathfrak{S}$ , rispetto ad un comune sistema di assi ortogonali di origine  $O$  solidali con  $\mathcal{I}$ . Successivamente cambiamo coordinate libere tramite una trasformazione lineare degli angoli dei singoli punti, usando come nuove coordinate,  $q^1$  data dalla coordinata angolare del centro di massa del sistema, le rimanenti coordinate di tipo angolare sono invece le differenze  $\varphi_i - \varphi_1$  per  $1 < \varphi_i \leq N$ . Le rimanenti coordinate libere rimangono le stesse di prima (quelle di tipo  $r_i$  e  $z_i$ ). In questo modo la prima coordinata  $q^1$  descrive rotazioni rigide del sistema  $\mathfrak{S}$  attorno all'asse  $z$ . Dato che sia l'energia cinetica non è funzione delle coordinate non puntate e l'energia potenziale dipende dalle norme delle differenze  $P_i - P_j$ , che sono invarianti sotto rotazioni rigide dell'intero sistema, concludiamo che la lagrangiana è invariante per rotazioni attorno all'asse  $z$  e rispetto all'origine  $O$ . Dalla proposizione precedente abbiamo immediatamente che si conserva la componente lungo l'asse  $z$  del momento angolare totale del sistema riferito al polo  $O$  e valutato nel riferimento  $\mathcal{I}$ . Si osservi che in realtà ciò vale rispetto ad ogni asse ed ogni origine  $O$  (entrambi in quiete in  $\mathcal{I}$ ), in quanto la scelta iniziale di dove posizionare l'asse  $z$  è del tutto arbitraria.

**2.** Consideriamo un sistema  $\mathfrak{S}$  costituito da due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  di masse  $m_1$  e  $m_2$ , vincolati a stare su una circonferenza liscia  $C$ , in quiete in un riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , con  $C$  centrata nell'origine  $O$  di un sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{I}$  e normale all'asse  $z$ . I punti sono interagenti l'uno con l'altro attraverso una coppia di forze conservative di energia potenziale  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\|P_1 - P_2\|)$ . In questo caso, a differenza dell'esempio precedente, sono presenti le reazioni vincolari (ideali) dovute al vincolo (4 equazioni funzionalmente indipendenti) ed il numero dei gradi di libertà del sistema si riduce a 2. Usando come coordinate libere  $q^1 := (\varphi_1 + \varphi_2)/2$  e  $q^2 := (\varphi_1 - \varphi_2)/2$ , dove  $\varphi_i$  è la coordinata angolare di  $P_i$  riferita a coordinate polari piane nel piano  $z = 0$ , si vede subito che la coordinata  $q^1$  genera traslazioni rigide del sistema. Ciò segue immediatamente dalle relazioni:  $\varphi_1 = q^1 + q^2$  e  $\varphi_2 = q^1 - q^2$ . La lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{I}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{I}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{I}}$  non dipenderà, per costruzione, dalla coordinata  $q^1$  (lo si dimostri!). Concludiamo pertanto che, in base alla proposizione precedente, si conserva su ogni moto di  $\mathfrak{S}$  la componente lungo  $\mathbf{e}_z$  del momento angolare totale del sistema  $\mathfrak{S}$  rispetto al polo  $O$  valutato nel riferimento  $\mathcal{I}$ .

## 9.2 Il legame tra simmetrie e leggi di conservazione: il teorema di Emmy Nöther.

In questa sezione formuliamo e dimostriamo il teorema di Emmy Nöther (nel caso di un sistema meccanico) che si può dire essere uno dei più importanti teoremi della fisica matematica e teorica. Il teorema suddetto<sup>1</sup> illustra lo strettissimo legame che esiste tra simmetria di un sistema

<sup>1</sup>La formulazione generale del teorema, valida per sistemi continui inclusi i campi, apparve in "Invariante Variationsprobleme" Nachr.d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse, 235-257 (1918).

lagrangiano sotto un gruppo di trasformazioni e esistenza di grandezze conservate sui moti del sistema. Il teorema può essere formulato nel caso di sistemi fisici del tutto generali, anche sistemi continui e campi (anche in versioni relativistiche), purché descritti in formulazione lagrangiana.

### 9.2.1 Trasformazioni su $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ .

Consideriamo un sistema meccanico  $\mathfrak{S}$  descritto sullo spaziotempo delle configurazioni  $\mathbb{V}^{n+1}$ , fissiamo un sistema di coordinate locali naturali  $t, q^1, \dots, q^n \in (a, b) \times \mathcal{V}$  definite in un aperto di  $\mathbb{V}^{n+1}$ . Ricordiamo che le coordinate  $q^1, \dots, q^n$  sono coordinate locali su ciascuno spazio delle configurazioni  $\mathbb{Q}_t$  ad ogni tempo  $t$ . Consideriamo infine una trasformazione attiva in  $(t_1, t_2) \times \mathcal{U} \subset (a, b) \times \mathcal{V}$ , che definisca un diffeomorfismo tra i punti di coordinate  $(t, q^1, \dots, q^n)$  nei punti di coordinate  $(t', q'^1, \dots, q'^n) \in (t'_1, t'_2) \times \mathcal{U}' \subset (a, b) \times \mathcal{V}$  e che ha la struttura:

$$\begin{cases} t' = t, \\ q'^k = q'^k(t, q^1, \dots, q^n) \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (9.11)$$

In altre parole, per ogni istante  $t$ , i punti di ogni  $\mathbb{Q}_t$  vengono spostati, ma sono mandati biettivamente e bidifferenziabilmente in punti dello stesso spazio delle configurazioni  $\mathbb{Q}_t$  al tempo  $t$ .

Dato che lo spazio delle configurazioni al tempo  $t$  è un sottoinsieme, individuato dai vincoli, dello spazio assoluto al tempo  $t$  (più precisamente del prodotto cartesiano degli spazi assoluti  $\Sigma_t$  al tempo  $t$  dei punti materiali di cui è costituito  $\mathfrak{S}$ ), queste trasformazioni non sono altro che trasformazioni locali differenziabili con inversa differenziabile delle configurazioni di  $\mathfrak{S}$  che: (1) rispettano i vincoli a cui è sottoposto il sistema e che (2) agiscono nello spazio assoluto ad ogni istante, trasformando punti dello spazio assoluto all'istante  $t$  in punti dello spazio assoluto allo stesso istante  $t$ . Quello che queste trasformazioni *non fanno* è mandare punti che esistono nello spazio assoluto  $\Sigma_t$  all'istante  $t$  in un altro spazio assoluto  $\Sigma_{t'}$  con  $t \neq t'$ .

Una trasformazione locale in  $\mathbb{V}^{n+1}$  di questo tipo è detta **preservare le fibre** di  $\mathbb{V}^{n+1}$ . Ricordiamo che le fibre di  $\mathbb{V}^{n+1}$  sono proprio gli spazi  $\mathbb{Q}_t$  per ogni  $t$ .

#### Esempi 9.3.

(1). Se  $\mathfrak{S}$ , è un singolo punto materiale e  $q^1, q^2, q^3$  sono le coordinate cartesiane del punto riferite ad un riferimento  $\mathcal{S}$ , una trasformazione del tipo descritto sopra è quella che, ad ogni istante fissato, ruota la posizione del punto attorno ad un fissato asse passante per un punto fissato (entrambi indipendenti dal tempo) secondo un angolo  $\epsilon$  fissato.

(2). L'esempio precedente si generalizza immediatamente al caso di due punti  $P, Q$  connessi da un'asta rigida di lunghezza fissata descritti con coordinate libere  $q^1, \dots, q^5$ , dove  $q^1, q^2, q^3$  sono le coordinate di  $P$  in un sistema di coordinate cartesiane ortonormali di assi  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  e origine  $O$  solidali con un fissato riferimento  $\mathcal{S}$ , mentre  $q^4, q^5$  sono angoli polari che individuano  $Q$  rispetto ad un sistema di assi ortonormali uscenti da  $P$  paralleli agli assi  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ . Una trasformazione

---

Una traduzione in inglese si può trovare su <http://arxiv.org/pdf/physics/0503066>.

che preserva le fibre di  $\mathbb{V}^{5+1}$  è ora quella che ruota  $P$  e  $Q$  attorno ad un fissato asse  $\mathbf{n}$  passante per  $O$  (indipendenti dal tempo) secondo un angolo  $\epsilon$ , *preservando la distanza reciproca dei due punti*.

Una trasformazione che preserva le fibre si estende immediatamente alle coordinate puntate, cioè dallo spaziotempo delle configurazioni  $\mathbb{V}^{n+1}$  allo spaziotempo degli atti di moto  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ , nel modo che segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = t, \\ q'^k = q'^k(t, q^1, \dots, q^n) \quad \text{per } k = 1, \dots, n, \\ \dot{q}'^k = \frac{\partial q'^k}{\partial t}(t, q^1, \dots, q^n) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial q'^k}{\partial q^j}(t, q^1, \dots, q^n) \dot{q}^j \quad \text{per } k = 1, \dots, n, \end{array} \right. \quad (9.12)$$

dove  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \in (t_1, t_2) \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$ .

Nello scrivere l'ultima riga abbiamo supposto euristicamente che le  $\dot{q}'^k$  fossero le derivate temporali delle  $q'^k$  secondo una curva fissata in  $\mathbb{V}^{n+1}$  e parametrizzata nel tempo. In realtà tale curva non esiste dato che le  $\dot{q}'^k$  sono coordinate *indipendenti* dalle  $q'^k$ . Tuttavia l'interpretazione data è corretta per ogni una curva fissata in  $\mathbb{V}^{n+1}$  e parametrizzata nel tempo, pur di interpretare le  $\dot{q}'^k$  come le derivate temporali delle  $q'^k$ . Questo accade in particolare sulle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange.

La trasformazione (9.12) si dice **indotta** dalla trasformazione che preserva le fibre (9.11).

### 9.2.2 Il teorema di Nöther in forma locale elementare.

Consideriamo un sistema fisico di punti materiali  $\mathfrak{S}$  descritto in  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  e, in riferimento a coordinate locali naturali  $(t, q^1, \dots, q^n) \in (a, b) \times \mathcal{V}$  definite su un aperto di  $\mathbb{V}^{n+1}$ , supponiamo di avere una *classe* di diffeomorfismi locali  $\mathcal{T}$  che preservano le fibre di  $\mathbb{V}^{n+1}$  dipendenti dal parametro  $\epsilon \in (-\alpha, \alpha)$  con  $\alpha > 0$  fissato:

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = t, \\ q'^k = q'^k(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n) \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (9.13)$$

Assumiamo che le funzioni a secondo membro siano differenziabili congiuntamente in tutte le variabili (inclusa  $\epsilon$ ) e che la trasformazione si riduca all'identità per  $\epsilon = 0$ :

$$q'^k(0, t, q^1, \dots, q^n) = q^k \quad \text{per } k = 1, \dots, n, \quad (9.14)$$

ed infine che valga la proprietà, per  $k = 1, \dots, n$ :

$$q'^k(\epsilon', t, q'^1(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n), \dots, q'^n(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n)) = q'^k(\epsilon' + \epsilon, t, q^1, \dots, q^n) \quad (9.15)$$

quando entrambi i membri siano definiti. In questo caso diremo che  $\mathcal{T}$  è un **gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali** su  $\mathbb{V}^{n+1}$  che preservano le fibre (vedi la Sezione 3.5.3).

**Esempi 9.4.** In riferimento all'esempio (2) in esempi 9.3, un esempio si ottiene considerando la classe di trasformazioni che si ottiene al variare dell'angolo  $\epsilon$  in un  $(-\pi, \pi)$ . Notare che per  $\epsilon = 0$  si ha la rotazione nulla e pertanto (9.14) è verificata. Inoltre la l'azione successiva di due rotazioni, la prima di un angolo  $\epsilon$  e la seconda di un angolo  $\epsilon'$ , coincide con l'unica rotazione di un angolo  $\epsilon + \epsilon'$ . Quindi anche (9.15) è valida.

**Definizione 9.1.** (**Sistema lagrangiano invariante sotto un gruppo di trasformazioni.**) Diremo che un sistema di punti materiali  $\mathfrak{S}$  descritto su  $\mathbb{V}^{n+1}$  è **invariante** sotto il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali che preservano le fibre di  $\mathbb{V}^{n+1}$ ,  $\mathcal{T}$ , dato da (9.13), se c'è una lagrangiana  $\mathcal{L} : j^1(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  che descrive la dinamica del sistema  $\mathfrak{S}$  tale che, nel sistema di coordinate naturali usate per definire  $\mathcal{T}$  vale:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}(t', q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0, \quad \text{per ogni } t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n \quad (9.16)$$

dove:

$$\dot{q}^k = \frac{\partial q^k}{\partial t}(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial q^k}{\partial q^j}(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n) \dot{q}^j \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \quad (9.17)$$

In questo caso  $\mathcal{T}$  è detto **gruppo (di trasformazioni di) simmetria** del sistema  $\mathfrak{S}$ .

Diremo invece che  $\mathfrak{S}$  descritto su  $\mathbb{V}^{n+1}$  è **debolmente invariante** sotto  $\mathcal{T}$  se c'è una lagrangiana  $\mathcal{L} : j^1(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  che descrive la dinamica del sistema  $\mathfrak{S}$  per la quale vale

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}(t', q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = G(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n), \quad \text{per ogni } t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n \quad (9.18)$$

essendo  $t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$  il sistema di coordinate locali su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  usato per definire  $\mathcal{T}$ , dove vale (9.17) e dove infine, la funzione  $G$  ha la struttura di "derivata totale":

$$G(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \frac{\partial g}{\partial t}(t, q^1, \dots, q^n) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial q^k}(t, q^1, \dots, q^n) \dot{q}^k \quad (9.19)$$

per  $g = g(t, q^1, \dots, q^n)$  differenziabile definita localmente su  $\mathbb{V}^{n+1}$ .

In questo caso  $\mathcal{T}$  è detto **gruppo (di trasformazioni di) simmetria debole** del sistema  $\mathfrak{S}$ .  $\diamond$

**Osservazione importante.** Un punto importante da notare è il seguente. Si potrebbe pensare che (9.18) sia una richiesta più debole dell'analogha che vale per tutti i valori di  $\epsilon$  e non solo per  $\epsilon = 0$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(t', q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)}{\partial \epsilon} = G(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n), \quad \text{per ogni } \epsilon \text{ e } t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n \quad (9.20)$$

Invece le due richieste sono equivalenti come si prova osservando che, dato che l'atto di moto (al tempo  $t$ )  $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  è arbitrario in (9.18), possiamo sempre sceglierlo come  $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  ottenuto da  $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  per un generico valore di  $\epsilon$ . Derivare in  $\epsilon$  la lagrangiana  $\mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  per  $\epsilon = \epsilon_0$  equivale a derivare  $\mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  in  $\epsilon'$  per  $\epsilon' = 0$  prendendo l'atto di moto (sempre al tempo  $t$ )  $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  ottenuto da  $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  per il valore  $\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon'$ . In questo modo (9.18) implica (9.20). In particolare l'osservazione è valida nel caso in cui  $G \equiv 0$ . La richiesta (9.16) è del tutto equivalente alla richiesta apparentemente molto più forte:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)}{\partial \epsilon} = 0, \quad \text{per ogni } \epsilon \text{ e } t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n. \quad (9.21)$$

Possiamo ora enunciare e provare il *teorema di Nöther*.

**Teorema 9.1. (Teorema di Nöther.)** *Si consideri un sistema di punti materiali  $\mathfrak{S}$  descritto su  $\mathbb{V}^{n+1}$  ed invariante sotto il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali che preservano le fibre di  $\mathbb{V}^{n+1}$ ,  $\mathcal{T}$ , dato da (9.13). Se  $\mathcal{L}$  è la lagrangiana di  $\mathfrak{S}$  che soddisfa (9.16), sui moti del sistema (fino a quando sono confinati nel domino delle coordinate usate per descrivere l'azione locale di  $\mathcal{T}$  su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ ) si conserva nel tempo la funzione:*

$$I_{\mathcal{T}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) := \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial q^k}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} (t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n). \quad (9.22)$$

Se invece  $\mathfrak{S}$  è debolmente invariante sotto  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{L}$  e  $g$  sono le funzioni che soddisfano (9.18) e (9.19), allora sui moti del sistema (fino a quando sono conciliati nel domino delle coordinate usate per descrivere l'azione locale di  $\mathcal{T}$  su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ ) si conserva nel tempo la funzione:

$$I_{\mathcal{T}, g}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) := \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial q^k}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} (t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) - g(t, q^1, \dots, q^n). \quad (9.23)$$

◇

**Dimostrazione.** Se esplicitiamo il primo membro di (9.16) abbiamo che esso vale:

$$\sum_k \frac{\partial \mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0}$$

che, tenendo conto di (9.14), può risciversi come:

$$\sum_k \frac{\partial \mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0}.$$

Ora consideriamo un moto del sistema  $q^k = q^k(t)$ ,  $\dot{q}^k(t) = dq^k/dt(t)$ . Da (9.17) si ha facilmente che, sviluppando separatamente i due membri e confrontandoli:

$$\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \epsilon}(t) \Big|_{\epsilon=0} = \frac{d}{dt} \frac{\partial q^k(\epsilon, t, q^1(t), \dots, q^n(t))}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0}.$$

Inserendo il risultato nell'espressione trovata sopra per  $\frac{\partial}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0} \mathcal{L}(t', q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ , dove ora *assumiamo esplicitamente che le variabili della lagrangiana siano valutate sul moto considerato*, abbiamo che:

$$0 = \frac{\partial}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0} \mathcal{L}(t', q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)}{\partial q^k} \frac{\partial q'^k}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)}{\partial \dot{q}^k} \frac{d}{dt} \frac{\partial q'^k(\epsilon, t, q^1(t), \dots, q^n(t))}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0}.$$

Abbiamo in definitiva trovato che:

$$\sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \frac{\partial q'^k}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \frac{d}{dt} \frac{\partial q'^k}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = 0.$$

Dato che tutto è valutato su una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange, possiamo riscrivere l'identità trovata come:

$$\sum_k \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) \frac{\partial q'^k}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \frac{d}{dt} \frac{\partial q'^k}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = 0,$$

che può essere infine riscritta come:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial q'^k}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \right) = 0,$$

dove il primo membro, prima di eseguire la derivata totale nel tempo, è *valutato su una qualsiasi soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange*. Questa è la tesi nel primo caso. Per quanto riguarda il secondo caso la dimostrazione è essenzialmente la stessa. Lavorando come nel caso precedente, la condizione di invarianza debole (9.18) si riscrive, su ogni fissata soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial q'^k}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \right) = \frac{d}{dt} g(t, q^1(t), \dots, q^n(t)),$$

da cui segue immediatamente la tesi.  $\square$

### Esempi 9.5.

**1.** Il caso di lagrangiana con coordinate cicliche ricade come sottocaso particolare del teorema di Nöther: l'integrale primo di Nöther coincide con il momento coniugato conservato. Infatti se  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  è tale che  $\partial \mathcal{L} / \partial q^j = 0$ , si consideri il gruppo il gruppo locale ad un parametro di trasformazioni che preservano le fibre di  $\mathbb{V}^{n+1}$ ,  $\mathcal{T}$  dato dalle trasformazioni:  $t' = t$ ,  $q'^j = q^j + \epsilon$  e  $q'^k = q^k$  se  $k \neq j$ . Quindi (9.17) fornisce immediatamente:

$$\dot{q}'^k = \dot{q}^k \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \quad (9.24)$$

Banalmente la lagrangiana soddisfa (9.42) sotto l'azione di  $\mathcal{T}$  non dipendendo esplicitamente da  $q^j$ . Di conseguenza soddisfa anche (9.16). L'integrale primo ottenuto dal teorema di Nöther è quindi:

$$I_{\mathcal{T}} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial q'^k}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \delta_{kj} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} = p_j.$$

Conseguentemente, per sistemi invarianti sotto traslazioni rigide ovvero sotto rotazioni rigide con lagrangiana del tipo  $\mathcal{T} + \mathcal{V}$ , gli integrali primi conservati in virtù del teorema di Nöther sono le corrispondenti componenti dell'impulso totale e del momento angolare totale come visto nella sezione precedente negli esempi 9.3 e 9.4.

**2.** Un esempio molto più interessante è il seguente. Consideriamo un sistema  $\mathfrak{S}$  di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$ , con masse  $m_1, \dots, m_n$ , assumendo che  $\mathfrak{S}$  non sia sottoposto a vincoli e che le forze (che sono tutte attive) siano tutte interne e conservative. In tal modo l'energia potenziale dipende solo dalle differenze di posizione tra i punti  $P_i - P_j$  con  $i, j = 1, \dots, N$  e  $i \neq j$ . In questo caso possiamo descrivere  $\mathfrak{S}$  in un riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , usando come coordinate libere le  $3N$  coordinate dei punti  $P_i$  rispetto ad un sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{I}$ , di origine  $O$  e assi  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ . Consideriamo l'azione di un sottogruppo ad un parametro  $\mathcal{T}$  del *sottogruppo delle trasformazioni pure di Galileo* sui punti del sistema: per  $i = 1, \dots, N$ , se  $\mathbf{x}_i := P_i - O$ ,

$$\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i + \epsilon t \mathbf{n}, \quad \text{con } \epsilon \in \mathbb{R}. \quad (9.25)$$

Il versore  $\mathbf{n}$  è fissato una volta per tutte. Si osservi che la trasformazione dipende parametricamente dal tempo. L'azione sulle coordinate puntate è quindi:

$$\dot{\mathbf{x}}_i \rightarrow \dot{\mathbf{x}}'_i = \dot{\mathbf{x}}_i + \epsilon \mathbf{n}, \quad \text{con } \epsilon \in \mathbb{R}. \quad (9.26)$$

Sotto le trasformazioni dette l'energia potenziale rimane invariata dato che dipende dalle differenze di posizione dei punti. L'energia cinetica invece si trasforma come:

$$\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}' = \mathcal{T} + \epsilon \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{n} + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i.$$

Pertanto:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \epsilon \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{n} + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i$$

e quindi:

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = \mathbf{n} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i.$$

Il secondo membro è una derivata totale della funzione:

$$g(t, \mathbf{x}) := \mathbf{n} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i.$$

Abbiamo provato che il sistema è debolmente invariante sotto l'azione di  $\mathcal{T}$ . Per il teorema di Nöther si ha l'integrale primo dipendente esplicitamente dal tempo:

$$I_{\mathcal{T}}(t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N) := \mathbf{n} \cdot t \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{n} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i. \quad (9.27)$$

Su ogni moto, l'integrale primo sopra ottenuto può essere trascritto come:

$$I_{\mathcal{T}}(t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N) := \mathbf{n} \cdot \left( t \mathbf{P}_{|\mathcal{G}} - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \right).$$

L'equazione di conservazione  $dI_{\mathcal{T}}/dt = 0$ , tenendo conto che l'impulso totale  $\mathbf{P}_{|\mathcal{G}}$  si conserva nelle ipotesi fatte, fornisce:

$$\mathbf{n} \cdot \left( \mathbf{P}_{|\mathcal{G}} - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i(t) \right) = 0,$$

che deve valere per ogni direzione  $\mathbf{n}$ , dato che il versore  $\mathbf{n}$  iniziale era del tutto arbitrario. In definitiva abbiamo ottenuto, usando le notazioni della Sezione 4.1:

$$\mathbf{P}_{|\mathcal{G}} = M \mathbf{v}_G|_{\mathcal{G}},$$

Questo è il teorema del centro di massa già trovato nella Sezione 4.1 espresso dall'equazione (4.1).

### 9.2.3 Invarianza dell'integrale primo di Nöther per trasformazione di coordinate.

Vogliamo qui sottolineare come l'integrale primo associato ad un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali  $\mathcal{T}$  non dipenda dalle coordinate naturali usate per rappresentare  $\mathcal{T}$ . Consideriamo il gruppo ad un parametro  $\mathcal{T}$ . Per descriverlo consideriamo una carta locale  $(U, \psi)$  su  $\mathbb{V}^{n+1}$  con  $\psi : U \ni p \mapsto (t, q^1, \dots, q^n)$ , dove  $U \subset \mathbb{V}^{n+1}$  è un aperto. In queste coordinate il gruppo  $\mathcal{T}$  è descritto dalle trasformazioni attive, dipendenti dal parametro  $\epsilon \in (-\delta, \delta)$ :  $T_\epsilon : (t, q^1, \dots, q^n) \mapsto (t', q'^1, \dots, q'^n)$  espresse in coordinate di  $(U, \psi)$  come:

$$\begin{cases} t' = t, \\ q'^k = q'^k(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n) \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (9.28)$$

Facciamo un cambiamento di coordinate passando alla carta locale  $(V, \psi)$  con  $\phi : V \ni q \mapsto (\hat{t}, \hat{q}^1, \dots, \hat{q}^n)$  con  $V \subset \mathbb{V}^{n+1}$  un altro aperto tale che  $V \cap U \neq \emptyset$ . La legge di trasformazione di coordinate, essendo i due sistemi di coordinate adattati alle fibre di  $\mathbb{V}^{n+1}$ , avrà al solito la forma:

$\hat{t} = t + c$  e  $\hat{q}^k = \hat{q}^k(t, q^1, \dots, q^n)$  per  $k = 1, \dots, n$ . Il gruppo  $\mathcal{T}$  può essere espresso su  $V \cap U$  nelle nuove coordinate, attraverso la classe di trasformazioni date in coordinate  $\hat{t}, \hat{q}^1, \dots, \hat{q}^n$  da:

$$\hat{T}_\epsilon := \psi \circ (\phi^{-1} \circ T_\epsilon \circ \phi) \circ \psi^{-1}$$

corrispondenti, in coordinate, a

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{t}' = \hat{t}, \\ \hat{q}'^k = \hat{q}'^k(\epsilon, \hat{t}, q^1(\epsilon, t(\hat{t}, \hat{q}^1, \dots, \hat{q}^n), q^1(\hat{t}, \hat{q}^1, \dots, \hat{q}^n), \dots, q^n(\hat{t}, \hat{q}^1, \dots, \hat{q}^n)), \dots, \\ \dots q^n(\epsilon, t(\hat{t}, \hat{q}^1, \dots, \hat{q}^n), q^1(\hat{t}, \hat{q}^1, \dots, \hat{q}^n), \dots, q^n(\hat{t}, \hat{q}^1, \dots, \hat{q}^n))) \\ \text{per } k = 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (9.29)$$

Assumiamo ora che la il sistema fisico descritto dalla lagrangiana  $\mathcal{L}$  sia debolmente invariante sotto  $\mathcal{T}$ :

$$\left. \frac{\mathcal{L}(t', q'^1, \dots, q'^m, \dot{q}'^1, \dots, \dot{q}'^m)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = G(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n), \quad (9.30)$$

dove  $G$  è la solita “derivata totale” di  $g$ .  $G$  e  $\mathcal{L}$  sono pensate come funzione scalari su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ . È chiaro che la condizione (9.30) non dipende dalle coordinate usate: passando alle coordinate  $\hat{t}, \hat{q}^1, \dots, \hat{q}^n$ , essa continua ad essere soddisfatta come si verifica immediatamente per computo diretto. Nello stesso modo si trova subito da (9.29) che (lasciamo il calcolo per esercizio):

$$I_{\mathcal{T}, g} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial q'^k}{\partial \epsilon} \bigg|_{\epsilon=0} - g(t, q^1, \dots, q^n) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \hat{q}'^k}{\partial \epsilon} \bigg|_{\epsilon=0} - g(\hat{t}, \hat{q}^1, \dots, \hat{q}^n). \quad (9.31)$$

#### 9.2.4 Le trasformazioni di simmetria (debole) di un sistema lagrangiano trasformano soluzioni delle equazioni di E.-L. in soluzioni delle stesse.

In questa sezione vogliamo mostrare l’aspetto duale della nozione di invarianza di un sistema fisico sotto un gruppo di trasformazioni. Mostreremo che se un sistema fisico è *debolmente* invariante (e quindi in particolare se è invariante) sotto un gruppo ad un parametro  $\mathcal{T}$ , allora l’azione del gruppo  $\mathcal{T}$  trasforma soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange in soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange riferite alla *stessa* lagrangiana.

**Teorema 9.2.** *Si consideri un sistema di punti materiali  $\mathfrak{S}$  descritto su  $\mathbb{V}^{n+1}$  e debolmente invariante sotto il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali  $\mathcal{T}$ , dato da (9.13), che preservano le fibre di  $\mathbb{V}^{n+1}$ , e siano  $\mathcal{L}$  e  $g$  le funzioni che soddisfano (9.18) e (9.19).*

*Si consideri una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange riferite a  $\mathcal{L}$ :*

$$q^k = q^k(t), \quad \dot{q}^k = \dot{q}^k(t), \quad \text{per } t \in I.$$

Si consideri infine, la curva che si ottiene facendo agire  $\mathcal{T}$  su  $q^k = q^k(t)$ ,  $\dot{q}^k = \dot{q}^k(t)$  per  $t \in I$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} q'^k(t) = q'^k(\epsilon_1, t, q^1(t), \dots, q^n(t)) \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \\ \dot{q}'^k(t) = \frac{\partial q'^k}{\partial t}(\epsilon_1, t, q^1(t), \dots, q^n(t)) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial q'^k}{\partial q^j}(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n) \dot{q}^j \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (9.32)$$

avendo scelto il valore  $\epsilon = \epsilon_1$  per il parametro di  $\mathcal{T}$ . La curva, definita localmente su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ ,  $q'^k = q'^k(t)$ ,  $\dot{q}'^k = \dot{q}'^k(t)$  per  $t \in I$  è ancora una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange riferite alla stessa  $\mathcal{L}$ , purché  $\epsilon_1 \in \mathbb{R}$  sia sufficientemente piccolo (in modo tale che le curve  $q'^k = q'^k(t)$ ,  $\dot{q}'^k = \dot{q}'^k(t)$ , per  $t \in I$ , per  $t \in I$  siano incluse nel dominio della carta locale usata per definire  $\mathcal{T}$  per ogni  $\epsilon \in [0, \epsilon_1]$  se  $\epsilon_1 > 0$  oppure  $\epsilon \in [\epsilon_1, 0]$  se  $\epsilon_1 < 0$ ).  $\diamond$

### Dimostrazione.

Definiamo per  $|\epsilon| \leq |\epsilon_1|$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_\epsilon^k(t) = q'^k(\epsilon, t, q^1(t), \dots, q^n(t)) \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \\ \dot{q}_\epsilon^k(t) = \frac{\partial q'^k}{\partial t}(\epsilon, t, q^1(t), \dots, q^n(t)) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial q'^k}{\partial q^j}(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n) \dot{q}^j \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (9.33)$$

Per comodità di lettura ammettiamo che il numero dei gradi di libertà sia  $n = 1$ , la generalizzazione al caso  $n > 1$  è immediata. Con le definizioni poste, tenendo conto che (9.18) implica (9.20) ed integrando quest'ultima, abbiamo che:

$$\mathcal{L}(t, q'(t), \dot{q}'(t)) = \mathcal{L}(t, q(t), \dot{q}(t)) + \int_0^{\epsilon_1} G(t, q_\epsilon(t), \dot{q}_\epsilon(t)) d\epsilon. \quad (9.34)$$

Applichiamo ora ad ambo i membri l'operatore differenziale:

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial}{\partial q} \right] \Big|_{(t, q(t), \dot{q}(t))}. \quad (9.35)$$

Il primo addendo a secondo membro di (9.34) produrrà un risultato nullo in virtù del fatto che la curva  $q = q(t)$ ,  $\dot{q} = \dot{q}(t)$  risolve le equazioni di Eulero-Lagrange. Il secondo addendo, può essere studiato passando le derivate sotto il simbolo di integrale (possiamo procedere in tal modo perché le funzioni sono differenziabili con continuità in tutti gli argomenti e  $[-\epsilon_1, \epsilon_1]$  è compatto). Il risultato che si ottiene da esso è:

$$\int_0^{\epsilon_1} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial}{\partial q} \right] \Big|_{(t, q(t), \dot{q}(t))} G(t, q_\epsilon(t), \dot{q}_\epsilon(t)) d\epsilon.$$

L'applicazione dell'operatore (9.35) al primo membro di (9.34) fornisce invece:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'} \frac{\partial \dot{q}'}{\partial \dot{q}} \right) \Big|_{(t, q(t), \dot{q}(t))} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} \frac{\partial \dot{q}'}{\partial q} \Big|_{(t, q(t), \dot{q}(t))} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'} \frac{\partial \dot{q}'}{\partial q} \Big|_{(t, q(t), \dot{q}(t))}.$$

Sviluppando le varie derivate tenendo conto di (9.33) si trova facilmente il risultato finale :

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right] \Big|_{(t, q'(t), \dot{q}'(t))} \frac{\partial q'}{\partial q} \Big|_{(t, q(t), \dot{q}(t))} = \int_0^{\epsilon_1} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial G}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial G}{\partial q} \right] \Big|_{(t, q_\epsilon(t), \dot{q}_\epsilon(t))} \frac{\partial q_\epsilon}{\partial q} \Big|_{(t, q(t), \dot{q}(t))} d\epsilon.$$

La funzione di  $t$  che appare nell'integrando è identicamente nulla in virtù del fatto che  $g(t, q, \dot{q})$  ha una struttura di "derivata totale". Concludiamo che, ad ogni istante  $t \in I$ :

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right] \Big|_{(t, q'(t), \dot{q}'(t))} \frac{\partial q'}{\partial q} \Big|_{(t, q(t), \dot{q}(t))} = 0.$$

Dato che la trasformazione che manda le  $q$  nelle  $q'$  è differenziabile invertibile con inversa differenziabile, la matrice jacobiana deve essere ovunque invertibile. In definitiva possiamo omettere il secondo fattore a primo membro moltiplicando entrambi i membri per la matrice jacobiana inversa, ottenendo alla fine:

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right] \Big|_{(t, q'(t), \dot{q}'(t))} = 0,$$

per ogni valore di  $t \in I$ . Questo è quanto volevamo provare.  $\square$

### 9.3 L'integrale primo di Jacobi, invarianza sotto "traslazioni temporali" e conservazione dell'energia meccanica.

In questa sezione ci occupiamo di un integrale primo ben noto molto tempo prima del teorema di Nöther. Si tratta dell'*integrale primo di Jacobi*. Enunciamo subito il teorema corrispondente.

**Teorema 9.3. (Teorema di Jacobi.)** *Sia  $\mathfrak{S}$  un sistema di  $N$  punti materiali sottoposto a  $c = 3N - n \geq 0$  vincoli olonomi ideali con lagrangiana  $\mathcal{L}$ . Se in riferimento ad un sistema di coordinate naturali  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  definite sull'aperto  $U$  nello spaziotempo degli atti di moto  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  vale l'identità :*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0, \quad \text{ovunque su } U, \quad (9.36)$$

allora valgono i seguenti fatti.

(a) *La funzione definita su  $U$ , detta hamiltoniana del sistema,*

$$\mathcal{H}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) := \sum_{k=1}^n \dot{q}^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} - \mathcal{L}, \quad (9.37)$$

*si conserva sui moti del sistema (nella porzione di essi contenuta in  $U$ ) e si chiama in tal caso integrale primo di Jacobi.*

(b) Se (i) le forze attive su  $\mathfrak{S}$  sono conservative nel riferimento  $\mathcal{I}$ , (ii) nello stesso riferimento  $\mathcal{I}$  i vincoli non dipendono esplicitamente dal tempo, (iii) le coordinate libere  $(t, q^1, \dots, q^n)$  sono solidali con  $\mathcal{I}$  ed infine:  $\mathcal{L} = \mathcal{T}|_{\mathcal{I}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{I}}$ , allora  $\mathcal{H}$  coincide con l'energia meccanica totale di  $\mathfrak{S}$  valutata in  $\mathcal{I}$ :

$$\mathcal{H}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) := \mathcal{T}|_{\mathcal{I}}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) + \mathcal{U}|_{\mathcal{I}}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n). \quad (9.38)$$

◇

**Dimostrazione.** (a) Sia  $t \mapsto (t, q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t))$  una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange. Direttamente dalla definizione di  $\mathcal{H}$  abbiamo che:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \mathcal{H}(t, q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t)) \\ &= \sum_k \frac{d\dot{q}^k}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} + \sum_k \dot{q}^k \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t, q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t)). \end{aligned}$$

Usando le equazioni di Eulero-Lagrange possiamo riscrivere l'identità di sopra come:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \mathcal{H}(t, q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t)) \\ &= \sum_k \frac{d\dot{q}^k}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} + \sum_k \dot{q}^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t, q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t)). \end{aligned}$$

Aggiungendo e togliendo  $\partial \mathcal{L} / \partial t$  a secondo membro si ottiene infine:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H} = \sum_k \frac{d\dot{q}^k}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} + \sum_k \dot{q}^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \frac{d}{dt} \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

D'altra parte, dato che  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t))$  deve anche essere:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t, q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t)) = \sum_k \frac{d\dot{q}^k}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} + \sum_k \dot{q}^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Inserendo questa identità nell'espressione trovata sopra otteniamo infine che, su ogni soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange vale l'identità notevole:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(t, q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t)) = - \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}(t, q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t)).$$

Dato che vale (9.36) si ha infine:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(t, q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t)) = - \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}(t, q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t)) = 0,$$

e pertanto su ogni soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange  $\mathcal{H}(t, q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t))$  è una costante al variare del tempo.

(b) Nelle ipotesi fatte, usando il contenuto della sezione 7.2.2, abbiamo che:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{S}}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \sum_{h,k=1}^n a_{hk}(q^1, \dots, q^n) \dot{q}^h \dot{q}^k$$

dove

$$a_{hk}(q^1, \dots, q^n) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^h} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k},$$

dove infine  $\mathbf{x}_i = P_i(q^1, \dots, q^n) - O$  è il vettore posizione in  $\mathcal{S}$  del punto materiale  $i$ -esimo ( $O$  è l'origine di un sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{S}$ ). In questo caso troviamo:

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}(t, q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t)) = \sum_{h,k=1}^n a_{hk}(q^1, \dots, q^n) \dot{q}^h \dot{q}^k - \mathcal{U}(q^1, \dots, q^n).$$

Il calcolo diretto usando (9.37) produce:

$$\mathcal{H}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \sum_{h,k=1}^n a_{hk}(q^1, \dots, q^n) \dot{q}^h \dot{q}^k + \mathcal{U}|_{\mathcal{S}}(q^1, \dots, q^n).$$

ossia

$$\mathcal{H}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \mathcal{T}|_{\mathcal{S}} + \mathcal{U}|_{\mathcal{S}}.$$

Questo conclude la dimostrazione.  $\square$

### Osservazioni 9.1.

(1) In realtà la dimostrazione del teorema di Jacobi prova più in generale che, su ogni soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange sussiste l'identità:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Cosa succede se il sistema è sottoposto anche a forze  $\mathbf{F}_i$  che non ammettono potenziale e che quindi producono componenti lagrangiane  $\mathcal{Q}_k$ ? Valgono in tal caso i seguenti fatti.

(a) Con un ovvio riadattamento della dimostrazione della prima parte teorema di Jacobi, si trova subito che se  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{S}} + \mathcal{V}|_{\mathcal{S}}$  è la lagrangiana *che tiene conto delle sole forze che ammettono potenziale in  $\mathcal{S}$* , allora, su ogni soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange, vale l'identità:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{dq^k}{dt} \mathcal{Q}_k, \quad \text{quando vale } \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{S}}}{\partial t} = 0 \text{ su } U.$$

(b) Quando le coordinate lagrangiane  $q^1, \dots, q^n$  sono solidali con il riferimento  $\mathcal{I}$  si prova facilmente che (provarlo per esercizio):

$$\sum_{k=1}^n \frac{dq^k}{dt} \mathcal{Q}_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_{P_i}|_{\mathcal{I}}$$

(indipendentemente dalla richiesta  $\frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{I}}}{\partial t} = 0$  su  $U$ ). Il secondo membro è la potenza totale nel riferimento  $\mathcal{I}$ , dissipata dalle forze che non ammettono potenziale.

(c) Se le coordinate lagrangiane sono solidali con  $\mathcal{I}$  e, insieme alle forze conservative ne esistono anche di non conservative,  $\mathcal{H}$  coincide comunque con l'energia meccanica totale  $\mathcal{E}|_{\mathcal{I}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{I}} + \mathcal{U}|_{\mathcal{I}}$ , dove l'energia potenziale tiene conto delle sole forze non conservative (di nuovo tutto questo indipendentemente dalla richiesta  $\frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{I}}}{\partial t} = 0$ ).

(2) Sembrerebbe che il teorema di Jacobi sia logicamente slegato dal teorema di Nöther, in particolare perché le trasformazioni coinvolte nel teorema di Jacobi sono trasformazioni che muovono le coordinate temporali (vedi l'osservazione seguente) e pertanto non preservano le fibre di  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ . In realtà ciò è dovuto al fatto che abbiamo enunciato il teorema di Nöther in una versione troppo elementare per includere il teorema di Jacobi. Nella prossima sezione mostreremo che il teorema di Jacobi è un sottocaso di una forma più generale del teorema di Nöther.

(3) La condizione (9.36):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0, \quad \text{ovunque su } U,$$

si può interpretare come *invarianza del sistema fisico sotto traslazioni temporali*. In altre parole (9.36) sancisce che il sistema fisico ammette una lagrangiana che verifica:

$$\mathcal{L}(t + \tau, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n), \quad \text{per ogni } \tau.$$

In questo senso, se siamo nelle ipotesi dell'enunciato (b), il teorema di Jacobi dice che l'energia meccanica si conserva quando la lagrangiana è invariante sotto traslazioni temporali. Si deve avere ben chiaro però che la condizione (9.36) dipende *strettamente* dalla scelta delle coordinate libere usate  $(t, q^1, \dots, q^n)$ . La condizione (9.36) riferita alle nuove coordinate libere  $(t', q'^1, \dots, q'^n)$ , cioè: (supponendo per semplicità  $n = 1$ )

$$\frac{\partial \mathcal{L}(t' + c, q(t', q'), \dot{q}(t', q', \dot{q}'))}{\partial t'} = 0,$$

può essere falsa a causa della possibile dipendenza esplicita da  $t'$  nella relazione che lega le nuove coordinate alle vecchie:

$$t = t' + c, \quad q^k = q^k(t', q'^1, \dots, q'^n).$$

Nello stesso modo, l'hamiltoniana  $\mathcal{H}$  dipende strettamente dalle coordinate libere usate: al contrario di  $\mathcal{L}$ , *non* è un campo scalare su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ . Inoltre  $\mathcal{H}$  in generale *non* è definito globalmente su + tutto lo spaziotempo degli atti di moto, ma solo su ogni aperto  $U$  dotato di

coordinate naturali adattate alle fibre.

(4) Supponiamo che  $\mathcal{L}$ , data da  $\mathcal{T}|_{\mathcal{S}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{S}}$ , non dipenda esplicitamente dal tempo come richiesto in (9.36), ma le coordinate libere usate non siano adattate a  $\mathcal{S}$ . In tal caso l'integrale primo di Jacobi esiste comunque, ma non ha il significato di energia meccanica totale in  $\mathcal{S}$ . Può in effetti coincidere con l'energia meccanica totale in un altro sistema di riferimento. Un esempio concreto di questa situazione è descritto nell'esercizio 7.1.3.

## 9.4 Commenti finali sul teorema di Nöther.

### 9.4.1 Invarianza sotto il gruppo di Galileo in meccanica lagrangiana.

Possiamo ora enunciare il postulato di invarianza della teoria rispetto al gruppo di Galileo riferendoci al contenuto della sezione 2.4.1 e riadattandolo alla descrizione fisica in termini di Lagrangiane. La richiesta è semplice: *in un fissato sistema di riferimento inerziale, ogni sistema di punti materiali interagenti, non sottoposto a vincoli, isolato all'esterno e che ammette descrizione in termini di lagrangiana, deve essere tale che la sua lagrangiana oppure una equivalente ad essa (nel senso che produca le stesse equazioni di Eulero-Lagrange) sia invariante o debolmente invariante sotto l'azione dei sottogruppi ad un parametro del gruppo di Galileo: traslazioni rispetto ad una fissata (arbitrariamente) direzione, rotazioni attorno ad un fissato (arbitrariamente) asse di rotazione, traslazioni temporali, trasformazioni pure di Galileo in una fissata (arbitrariamente) direzione.*

In altre parole abbiamo imposto che nella classe dei riferimenti inerziali la descrizione della meccanica sia tale da verificare, nel linguaggio della meccanica lagrangiana: l'*omogeneità dello spazio*, l'*isotropia dello spazio*, l'*omogeneità del tempo* e l'*invarianza galileiana pura*. In base al teorema di Nöther (che include quello di Jacobi nella formulazione avanzata che daremo nella prossima sezione), ad ognuna di queste proprietà di simmetria corrisponde una grandezza fisica conservata. Riassumendo tutti i risultati ottenuti in questo capitolo per sistemi isolati descritti nel riferimento inerziale  $\mathcal{S}$  e che ammettono lagrangiana della forma  $\mathcal{T}|_{\mathcal{S}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{S}}$ , con  $\mathcal{U}$  energia potenziale, abbiamo che:

- (i) *l'omogeneità spaziale implica la conservazione dell'impulso totale del sistema,*
- (ii) *l'isotropia spaziale implica la conservazione del momento angolare totale del sistema,*
- (iii) *l'omogeneità temporale implica la conservazione dell'energia meccanica totale del sistema.*
- (iv) *l'invarianza galileiana pura fornisce una grandezza conservata tale che la relazione di conservazione si interpreta come il teorema del centro di massa (vedi l'esempio 2 in esempi 9.5).*

### 9.4.2 Formulazione lagrangiana e teorema di Nöther oltre la meccanica classica.

Per concludere la discussione riassuntiva della sezione precedente, ci sarebbe da discutere cosa accade per sistemi che ammettono lagrangiana di forma diversa da  $\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$ . Ma simili discussioni sarebbero accademiche dato che il mondo fisico *non* è invariante sotto il gruppo di Galileo, ma lo è invece (almeno lontano da forti campi gravitazionali) rispetto al gruppo di Poincarè. La discussione richiederebbe un'estensione del formalismo lagrangiano e del teorema di Nöther, alle teorie relativistiche includendo la teoria dei campi. Diciamo solo che tale estensione esiste, è molto naturale ed ha provato essere di grandissima potenza nelle formulazioni della fisica moderna (specialmente nella teoria delle interazioni fondamentali e delle particelle elementari), dove il legame simmetrie-leggi di conservazione ha giocato e gioca un ruolo fondamentale.

A titolo di esempio si pensi già in elettrodinamica quanto sia difficile definire l'impulso del campo elettromagnetico (oppure il suo momento angolare). L'estensione del formalismo lagrangiano e del teorema di Nöther alla teoria dei campi consente di *definire* l'impulso del campo elettromagnetico come quella grandezza che si conserva come conseguenza dell'omogeneità spaziale (invarianza sotto traslazioni spaziali della lagrangiana del campo elettromagnetico). Alla prova dei fatti si vede che questa è la definizione *fisicamente* corretta anche perchè, in particolare, consente di implementare il principio di conservazione dell'impulso: con la definizione data si dimostra che per un sistema isolato, composto di particelle e campi elettromagnetici che interagiscono tra di essi, l'impulso totale di si conserva nel tempo.

## 9.5 \*Formulazione generale e globale del Teorema di Nöther.

Il teorema 3.11 permette di associare univocamente un campo vettoriale ad ogni gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali che preservano le fibre di  $\mathbb{V}^{n+1}$ ,  $\mathcal{T}$  dato in (9.13). Infatti, se consideriamo, al tempo fissato  $t$ , il campo vettoriale definito localmente su  $\mathbb{Q}_t$  definito nelle coordinate  $q^1, \dots, q^n$  da

$$X_0(t, q^1, \dots, q^n) := \sum_{k=1}^n \frac{\partial q^k(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n)}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \frac{\partial}{\partial q^k} \Big|_{(t, q^1, \dots, q^n)} + 0 \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(t, q^1, \dots, q^n)}$$

risulta facilmente usando (9.14) e (9.15) che, per un fissato punto  $q^1, \dots, q^n$ , se consideriamo la curva  $\epsilon \mapsto (t'(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n), q^1(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n), \dots, q^n(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n)) \in \mathbb{V}^{n+1}$  vale

$$\frac{dt'}{d\epsilon} = 0, \quad \frac{dq^k}{d\epsilon} = X^k(q^1(\epsilon, q^1, \dots, q^n), \dots, q^n(\epsilon, q^1, \dots, q^n)).$$

In altre parole il gruppo ad un parametro  $\mathcal{T}$  è dato dalle curve integrali del campo  $X_0$  definito sopra: il campo  $X_0$  è il generatore del gruppo. Il punto individuato dalle coordinate

$$(t'(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n), q^1(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n), \dots, q^n(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n))$$

è il punto che si trova, per il valore del parametro  $\epsilon$ , sull'unica curva integrale in  $\mathbb{V}^{n+1}$  del campo  $X$  che parte da  $(t, q^1, \dots, q^n)$  per  $\epsilon = 0$ .

Con un pò di pazienza si può verificare che l'insieme delle trasformazioni su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ , indotte da  $\mathcal{T}$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = t, \\ q'^k = q'^k(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n) \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \\ \dot{q}'^k = \frac{\partial q'^k}{\partial t}(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial q'^k}{\partial q^j}(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n) \dot{q}^j \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (9.39)$$

soddisfano ancora le analoghe delle proprietà (9.14) e (9.15) per  $\epsilon \in (-a, a)$ . Pertanto l'azione del gruppo  $\mathcal{T}$  estesa localmente ad  $\mathbb{A}_t$  tramite le (9.39) si ottiene ancora dalle curve integrali del campo, definito localmente su  $\mathbb{A}_t$ :

$$\begin{aligned} X(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) &:= \sum_{k=1}^n \frac{\partial q'^k(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n)}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \frac{\partial}{\partial q^k} \Big|_{(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)} \\ &+ 0 \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \dot{q}'^k(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} \Big|_{(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)}. \end{aligned} \quad (9.40)$$

Le equazioni (9.39) definiscono ancora un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali agente su un aperto di  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ , il cui generatore è il campo  $X$  definito in (9.40). La condizione di invarianza (9.16) può allora essere scritta equivalentemente, pensando il campo  $X$  come operatore differenziale sui campi scalari definiti su  $\mathbb{A}_t$ :

$$X(\mathcal{L}) = 0. \quad (9.41)$$

**Osservazioni 9.2.** La (9.41) significa che su ogni  $\mathbb{A}_t$  e lungo ogni linea integrale di  $\widetilde{X}$ ,  $(c, d) \ni \epsilon \mapsto \gamma(\epsilon) \in \mathbb{A}_t$ , vale

$$\frac{d}{d\epsilon} \mathcal{L}(t, \gamma(\epsilon)) = 0, \quad \text{per ogni } \epsilon \in (c, d)$$

e pertanto la lagrangiana assume valore costante (che dipenderà dalla linea integrale). Integrando la (9.41) lungo la linea integrale che parte da  $q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$  e termina in  $q'^1, \dots, q'^n, \dot{q}'^1, \dots, \dot{q}'^n$  si ottiene la condizione apparentemente molto più forte di (9.16) (che equivale alla (9.41)):

$$\mathcal{L}(t', q'^1, \dots, q'^n, \dot{q}'^1, \dots, \dot{q}'^n) = \mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \quad (9.42)$$

per ogni scelta di  $\epsilon \in (-a, a)$  e  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  nel sistema di coordinate locali su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  usato per definire  $\mathcal{T}$ . In realtà, come appena verificato, le due condizioni (9.16) e (9.42) sono *del tutto equivalenti*.

Nel seguito enunceremo una forma generalizzata del teorema di Nöther usando questa identificazione dei gruppi ad un parametro di diffeomorfismi locali e campi vettoriali: invece di parlare di gruppi ad un parametro di trasformazioni parleremo semplicemente di campi vettoriali. L'ipotesi principale del teorema di Nöther, cioè la condizione di invarianza della lagrangiana sotto un gruppo di trasformazioni sarà scritta in termini di campi vettoriali come in (9.41). Quello che ci si guadagna in questo modo, dato che i campi vettoriali sono definibili globalmente su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  senza troppe complicazioni tecniche, è che l'enunciato e la validità del teorema risultano completamente indipendenti dalla scelta delle coordinate e risultano essere validi globalmente.

Passiamo a trascrivere, con gli stessi benefici, anche la tesi del teorema di Nöther nel linguaggio dei campi vettoriali sullo spaziotempo degli atti di moto. Ricordiamo a tal fine che le stesse soluzioni massimali delle equazioni di Eulero-Lagrange sono definite globalmente su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  e non sono altro che le linee integrali del campo (7.56), definito globalmente, e in coordinate locali naturali dato da:

$$Z(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \dot{q}^k \frac{\partial}{\partial q^k} + \sum_{k=1}^n z^k(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}.$$

Utilizzando il vettore  $Z$  abbiamo la seguente proposizione:

**Proposizione 9.4.** *Si consideri un sistema fisico descritto su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  da equazioni di Eulero-Lagrange associate al campo vettoriale dinamico  $Z$  su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ . Assumiamo che  $Z$  sia di classe  $C^1$ . La condizione che una funzione  $f : j^1(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ , di classe  $C^1$ , sia un integrale primo è equivalente alla condizione:*

$$Z(f) = 0, \quad \text{ovunque su } j^1(\mathbb{V}^{n+1}). \quad (9.43)$$

◇

**Dimostrazione.** Le equazioni di Eulero-Lagrange si scrivono in forma globale, tenendo conto della definizione di  $Z$ :

$$\dot{\gamma}(t) = Z(\gamma(t)),$$

dove  $I \ni t \mapsto \gamma(t) \in j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  è una curva sullo spaziotempo degli atti di moto. Di conseguenza (9.43) implica che:

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 0, \quad \text{per ogni valore di } t \in I$$

per ogni soluzione  $\gamma$  delle equazioni di Eulero-Lagrange e quindi che  $f$  è un integrale primo. Viceversa, se  $f$  è un integrale primo vale

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 0, \quad \text{per ogni valore di } t \in I$$

per ogni soluzione  $\gamma : I \rightarrow j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  delle equazioni di Eulero-Lagrange. Ma allora, per definizione di  $Z$  abbiamo in particolare che, se  $t_0 \in I$ :

$$Z_{\gamma(t_0)}(f) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} f(\gamma(t)) = 0.$$

In altri termini vale:

$$Z_p(f) = 0$$

per ogni punto  $p \in j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  che ammette una soluzione  $\gamma$  delle equazioni di Eulero-Lagrange definita nell'intorno di  $t_0$  e con  $\gamma(t_0) = p$ . Per il teorema di esistenza, essendo il campo  $Z$  di classe  $C^1$  almeno, ogni punto  $p \in j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  soddisfa tale richiesta.  $\square$

Nella tesi del teorema di Nöther la conservazione dell'integrale primo  $I$  sulle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange, sarà dunque enunciata semplicemente con  $Z(I) = 0$  ovunque sullo spaziotempo degli atti di moto.

### 9.5.1 Il teorema di Nöther nella forma generale.

Vogliamo ora enunciare il teorema di Nöther nel linguaggio dei campi vettoriali. Il campo  $X$  sarà globalmente definito su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  ed è pensato come generatore di un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali che lasciano invariata la lagrangiana di un sistema fisico (almeno in senso debole). In coordinate naturali adattate alle fibre di  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  ogni campo  $X$  si può decomporre come:

$$X = X^t \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^n X_0^k \frac{\partial}{\partial q^k} + \sum_{k=1}^n X^k \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}, \quad (9.44)$$

dove  $X^t, X_0^k$  e  $X^k$  sono funzioni differenziabili di  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ . Nelle ipotesi del teorema di Nöther in forma elementare si assumeva che, pensando  $Z$  come operatore differenziale sulle funzioni differenziabili definite su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ ,

$$X^k = Z(X_0^k), \quad k = 1, \dots, n.$$

Infatti, questa condizione è sicuramente verificata dal generatore di ogni gruppo locale della forma (9.40):

$$\begin{aligned} Z \left( \frac{\partial q'^k(\epsilon, t, q^1, \dots, q^k)}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial q'^k(\epsilon, t, q^1, \dots, q^k)}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + \sum_k \dot{q}^k \frac{\partial q'^k(\epsilon, t, q^1, \dots, q^k)}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{\partial \dot{q}'^k(\epsilon, t, q^1, \dots, q^k)}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0}, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto conto dell'ultima equazione in (9.39). Questa ipotesi sembra essenziale dal punto di vista fisico: ricorda in qualche modo al gruppo di trasformazioni come il mondo delle velocità (delle coordinate  $\dot{q}^k$ ) e quello delle posizioni (le coordinate  $q^k$ ) sono imparentati. Nel seguito assumeremo ancora questa ipotesi anche se assumeremo, molto più generalmente di quanto fatto nel teorema di Nöther in forma elementare, che le funzioni  $X_0^k$  possano dipendere anche dalle coordinate  $\dot{q}^k$ . I gruppi ad un parametro che ne conseguono sono

tali che la loro azione nello spaziotempo delle configurazioni dipende non solo dalle configurazioni stesse, ma anche dalle velocità che il sistema assume nelle varie configurazioni. Si dice in questo caso che si considerano **simmetrie dinamiche** (quelle cioè in cui  $X_0^k$  è funzione di tutte le coordinate  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ ) piuttosto che **simmetrie geometriche** (quelle cioè in cui  $X_0^k$  è funzione delle sole coordinate  $(t, q^1, \dots, q^n)$ ).

La richiesta  $X^k = Z(X_0^k)$ , se la si assume valida, come è naturale, in ogni sistema di coordinate naturali su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ , comporta dei vincoli non banali nel caso generale in cui ogni  $X_0^k$  è funzione di tutte le coordinate  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ . Vale infatti la seguente proposizione.

**Proposizione 9.5.** *Se un campo  $X$  su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  di classe  $C^1$  soddisfa la condizione*

$$X^k = Z(X_0^k), \quad \text{per } k = 1, \dots, n \text{ in ogni sistema di coordinate naturali su } j^1(\mathbb{V}^{n+1}), \quad (9.45)$$

*rispetto ad un campo vettoriale dinamico  $Z : j^1(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  (indotto da qualche lagrangiana), allora è verificata la condizione*

$$Z(\langle X, dT \rangle) = 0. \quad (9.46)$$

*Se vale (9.46) e vale (9.45) in un atlante di coordinate naturali locali di  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ , allora (9.45) vale in ogni sistema di coordinate locali naturali di  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ .  $\diamond$*

**Dimostrazione.** (9.46) si scrive localmente  $Z(X^t) = 0$  in ogni sistema di coordinate naturali. Dato che le componenti  $X^t$  si trasformano scalarmente cambiando carta locale naturale:

$$X^{t'} = \frac{\partial t'}{\partial t} X^t = X^t,$$

per provare che vale la prima parte della tesi è sufficiente mostrare che c'è un sistema di coordinate naturali nell'intorno di ogni punto in cui  $Z(X^t) = 0$ . Supponiamo che (9.45) valga in ogni sistema di coordinate locali naturali adattati alle fibre di  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ . Se  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  e  $(t', q'^1, \dots, q'^n, \dot{q}'^1, \dots, \dot{q}'^n)$  sono siffatti sistemi di coordinate definiti su uno stesso aperto  $U \subset j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ , tenendo conto delle (7.39), (7.40) e (7.41), avremo le relazioni per  $j = 1, \dots, n$ :

$$X'^j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \dot{q}'^j}{\partial \dot{q}^k} X^k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \dot{q}'^j}{\partial q^k} X_0^k + \frac{\partial \dot{q}'^j}{\partial t} X^t, \quad (9.47)$$

$$X_0'^j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial q'^j}{\partial q^k} X_0^k + \frac{\partial q'^j}{\partial t} X^t, \quad (9.48)$$

$$X'^{t'} = X^t.$$

Dato che (9.45) vale in entrambi i sistemi di coordinate, dobbiamo concludere che:

$$Z\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial q'^j}{\partial q^k} X_0^k + \frac{\partial q'^j}{\partial t} X^t\right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \dot{q}'^j}{\partial \dot{q}^k} Z(X_0^k) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \dot{q}'^j}{\partial q^k} X_0^k + \frac{\partial \dot{q}'^j}{\partial t} X^t. \quad (9.49)$$

Tenendo conto della relazione (7.41) otteniamo:

$$\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial q^j}{\partial q^k},$$

per cui possiamo riscrivere l'identità di sopra come:

$$Z \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial q'^j}{\partial q^k} X_0^k + \frac{\partial q'^j}{\partial t} X^t \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial q'^j}{\partial q^k} Z(X_0^k) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^k} X_0^k + \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial t} X^t,$$

che si esplicita in:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n Z \left( \frac{\partial q'^j}{\partial q^k} \right) X_0^k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial q'^j}{\partial q^k} Z(X_0^k) + \sum_{k=1}^n Z \left( \frac{\partial q'^j}{\partial t} \right) X^t + \frac{\partial q'^j}{\partial t} Z(X^t) \\ = \sum_{k=1}^n \frac{\partial q'^j}{\partial q^k} Z(X_0^k) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^k} X_0^k + \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial t} X^t. \end{aligned} \quad (9.50)$$

Dato che:

$$Z \left( \frac{\partial q'^j}{\partial q^k} \right) = \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^k} \quad \text{e} \quad Z \left( \frac{\partial q'^j}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial t},$$

(9.50) si riduce a:

$$0 = \frac{\partial q'^j}{\partial t} Z(X^t) \quad \text{per ogni coppia di sistemi di coordinate locali naturali su } j^1(\mathbb{V}^{n+1}). \quad (9.51)$$

Mostriamo che la validità di questa identità implica la tesi. Nell'intorno di ogni punto  $p \in j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ , fissato il sistema di coordinate naturali  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  con origine corrispondente a  $p$ , possiamo fissare le nuove coordinate  $(t', q'^1, \dots, q'^n, \dot{q}'^1, \dots, \dot{q}'^n)$  in modo tale che  $q'^j = q^j$  se  $j > 1$  e  $q'^1 = q^1 + ct$ , dove  $c \neq 0$  (queste nuove coordinate sono ammissibili nell'intorno di  $p$  in quanto la matrice jacobiana della trasformazione di coordinate ha determinante non nullo in  $p$ ). L'identità (9.51) imposta in  $p$  implica allora che:

$$0 = cZ(X^t)|_p,$$

per cui  $Z(X^t)|_p = 0$ . Questo risultato vale per ogni  $p \in j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  in un sistema di coordinate naturali definite nell'intorno di  $p$  come volevamo provare.

La seconda parte della tesi è ora ovvia: se vale (9.46) e in un atlante di coordinate naturali (non primate) valgono le relazioni (9.45), in ogni sistema locale di coordinate naturali (primate) deve valere (9.49). Usando (9.45) per le coordinate (non primate) dell'atlante, concludiamo da (9.47) e (9.48) che

$$Z(X_0'^j) = X'^j,$$

cioè la validità di (9.45) in ogni sistema di coordinate locali naturali.  $\square$

**Osservazioni 9.3.**

(1) Nelle applicazioni è bene tener presente che la condizione (9.46), si scrive in coordinate locali naturali ed in relazione alla decomposizione (9.44):

$$Z(X^t) = 0. \quad (9.52)$$

(2) Campi vettoriali  $X$  su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  che soddisfino la condizione (9.45) si ottengono rialzando a  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  per mezzo del campo  $Z$  ogni campo vettoriale  $\tilde{X}$  su  $\mathbb{V}^{n+1}$  che soddisfi (9.45) purché siano soddisfatte opportune ipotesi. In coordinate locali naturali adattate alle fibre, se

$$\tilde{X} = \tilde{X}^t \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{X}^k \frac{\partial}{\partial q^k},$$

dove  $X^k = X^k(t, q^1, \dots, q^n)$ , il suo rialzamento a  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ ,  $X$ , è definito come:

$$X = \tilde{X}^t \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{X}^k \frac{\partial}{\partial q^k} + Z(\tilde{X}^k) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}.$$

Questa definizione non dipende dalle coordinate locali usate e quindi definisce un campo globalmente su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  quando, come sappiamo dalla proposizione precedente,  $Z(\tilde{X}^t) = 0$ . Quest'ultima condizione si riduce in questo caso, dato che  $\tilde{X}^t$  può dipendere solo da  $t$  e dalle  $q^k$ , ma non dalle coordinate puntate, alla richiesta:

$$\frac{\partial \tilde{X}^t}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \tilde{X}^t}{\partial q^k} \dot{q}^k = 0,$$

che deve valere ovunque. Da questa condizione si ricava subito che le derivate parziali di  $\tilde{X}^t$  rispetto a  $t$  ed alle  $q^k$  devono essere ovunque nulle e pertanto l'unica possibilità è quella di  $\tilde{X}^t = \text{costante}$ .

Concludiamo che, per un campo  $X$  su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  che soddisfi (9.45),  $\langle X, dT \rangle$  può non essere costante solo quando  $X$  non è il rialzamento di un campo preesistente su  $\mathbb{V}^{n+1}$ . In particolare le simmetrie geometriche sono tali che  $\langle X, dT \rangle$  sia costante.

(3) Le due condizioni (9.45) e (9.46) sono equivalenti alle seguenti, lasciamo la prova per esercizio al lettore:

$$Z(\langle X, dT \rangle) = 0, \quad (9.53)$$

$$\langle \mathcal{L}_Z(X), \omega_k \rangle = 0, \quad \text{per ogni forma di contatto } \omega_k. \quad (9.54)$$

Dove abbiamo usato la derivata di Lie  $\mathcal{L}_Z$  rispetto a  $Z$  (vedi l'appendice A). Le forme di contatto, definite in (9.59), sono riferite ad un sistema di coordinate locali naturali, per ogni forma di contatto  $\omega_k$  significa che bisogna variare anche i sistemi di coordinate locali.

la condizione  $\langle X, dT \rangle = 0$  in (9.40) (dove  $T : j^1(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  è il tempo assoluto) dice che il gruppo ad un parametro generato da  $X$  preserva le fibre di  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ . Si osservi infatti che tale

condizione si esplicita semplicemente in  $X^t = 0$  ovunque in ogni sistema di coordinate locali naturali adattate alle fibre per cui il significato di preservazione delle fibre da parte del gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali generati da  $X$  è del tutto evidente.

Questa condizione è lasciata cadere nell'enunciato del teorema di Nöther in forma globale e generale che diamo di seguito.

**Teorema 9.4.** (Teorema di Nöther in forma generale e globale.) *Si consideri un sistema fisico descritto su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  dalla lagrangiana  $\mathcal{L}$ . Sia  $X$  dato è un campo vettoriale differenziabile su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  che soddisfa la proprietà (9.45):*

$$X^k = Z(X_0^k), \quad \text{per } k = 1, \dots, n \text{ in ogni sistema di coordinate naturali su } j^1(\mathbb{V}^{n+1}), \quad (9.55)$$

essendo  $Z$  il campo vettoriale dinamico su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  associato a  $\mathcal{L}$ . Se vale la condizione di **invarianza debole** di  $\mathcal{L}$  sotto l'azione del campo  $X$ :

$$X(\mathcal{L}) = Z(f), \quad (9.56)$$

dove  $f : j^1(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione differenziabile, allora si ha l'integrale primo di Nöther  $I_{X,f} : j^1(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  definito globalmente da:

$$I_{X,f} := \langle X, \Omega_{\mathcal{L}} \rangle - f, \quad (9.57)$$

dove abbiamo introdotto la **forma di Poincaré-Cartan**,  $\Omega_{\mathcal{L}}$ , individuata in coordinate locali naturali adattate alle fibre di  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ , da:

$$\Omega_{\mathcal{L}} := \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \omega_k + \mathcal{L} dT, \quad (9.58)$$

essendo  $\omega_k$  le **forme di contatto** associate alle coordinate locali naturali usate:

$$\omega_k := dq^k - \dot{q}^k dt. \quad (9.59)$$

◇

**Dimostrazione.** Il fatto che  $I_{X,f}$  (definito localmente dal secondo membro di (9.57)) risulti essere un campo scalare ben definito su tutto  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  segue subito dal fatto che la 1-forma di Poincaré-Cartan è globalmente definita e che  $f$  è un campo scalare. Quest'ultimo fatto si prova per via diretta verificando che cambiando coordinate nell'atlante delle carte locali naturali adattate alle fibre, le componenti del secondo membro di (9.58) si trasformano come le componenti di vettore covariante. Lasciamo la verifica di ciò al lettore. Nella verifica si deve tenere conto del fatto che  $\mathcal{L}$  è un campo scalare su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ .

Lavoriamo in una carta locale  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  e verifichiamo che  $Z(I_{X,f}) = 0$  in tale carta. Questo è sufficiente a provare la tesi dato che i sistemi di coordinate naturali formano un atlante di  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ . Abbiamo che:

$$Z(I_{X,f}) = Z \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} (X_0^k - X^t \dot{q}^k) + X^t \mathcal{L} - f \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n Z\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} X_0^k\right) - Z(f) - \sum_{k=1}^n X^t Z\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k\right) + X^t Z(\mathcal{L}) = \\
&\sum_{k=1}^n Z\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k}\right) X_0^k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} Z(X_0^k) - Z(f) - \sum_{k=1}^n X^t Z\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k}\right) \dot{q}^k - \sum_{k=1}^n X^t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} Z(\dot{q}^k) + X^t Z(\mathcal{L})
\end{aligned}$$

dove, in base alla proposizione 9.5, abbiamo usato il fatto che  $Z(X^t) = 0$  e anche  $Z(h \cdot g) = h \cdot Z(g) + g \cdot Z(h)$  per ogni coppia di funzioni differenziabili  $f, g : j^1(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ , se  $\cdot$  indica il prodotto punto per punto. Usando le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$Z\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k}$$

e la condizione (9.46) troviamo allora che:

$$Z(I_{X,f}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} X_0^k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} X^k - Z(f) - X^t \left( \sum_{k=1}^n \dot{q}^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} + \sum_{k=1}^n z^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} - Z(\mathcal{L}) \right),$$

dove:

$$Z = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_k \dot{q}^k \frac{\partial}{\partial q^k} + \sum_k z^k \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}.$$

Dato che:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} X_0^k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} X^k = X(\mathcal{L}) - X^t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

e

$$\sum_{k=1}^n \dot{q}^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} + \sum_{k=1}^n z^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} = Z(\mathcal{L}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t},$$

l'espressione trovata sopra per  $Z(I_{X,f})$  si può riscrivere come:

$$Z(I_{X,f}) = X(\mathcal{L}) - Z(\mathcal{L}) - X^t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + X^t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t},$$

che è nulla per ipotesi.  $\square$

#### Osservazioni 9.4.

(1) Questa versione del teorema di Nöther è più sofisticata della versione data nel teorema 9.1 perché qui l'integrale primo è definito globalmente, ma è anche più generale dato che la funzione  $f$  che appare nella condizione di simmetria debole (9.56) può, localmente, dipendere dalle coordinate  $\dot{q}^k$  a differenza del caso elementare trattato nel teorema 9.1. Infine la condizione (9.45), automaticamente soddisfatta nelle nostre ipotesi, generalizza ed include la richiesta di preservazione delle fibre del gruppo ad un parametro generato da  $X$ . Questa richiesta si scrive esplicitamente  $\langle X, dT \rangle = 0$  che è un sottocaso banale della (9.45). Nel caso generale quindi, il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali generati dal campo vettoriale  $X$  non preserva

la fibra, ma muove anche nel tempo i punti dello spaziotempo degli atti di moto.

(2) Abbandonando la richiesta  $\langle X, dT \rangle = 0$ , cioè che il gruppo ad un parametro generato da  $X$  preservi le fibre di  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ , non c'è più la garanzia che l'azione di tale gruppo su una sezione di  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  (cioè su una curva in tale spazio che può essere rappresentata in funzione del tempo e quindi pensata come un moto del sistema per qualche vettore dinamico  $Z$ , non necessariamente quello indotto da  $\mathcal{L}$ ) venga trasformata in una sezione (e quindi in un possibile moto del sistema). Dal punto di vista fisico alcune simmetrie della lagrangiana  $\mathcal{L}$  potrebbero non avere quindi significato fisico, anche se sarebbero comunque associate, tramite il teorema di Nöther, ad un integrale primo. In realtà, per ogni simmetria di  $\mathcal{L}$  (anche debole) indotta da un campo vettoriale  $X$  su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  che rispetta le ipotesi del teorema 9.4, c'è sempre una seconda simmetria  $\tilde{X}$  che rispetta le ipotesi del teorema 9.4 inducendo lo stesso integrale primo di  $X$ , ma che in più soddisfa anche  $\langle \tilde{X}, dT \rangle = 0$  e pertanto il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali generato da  $\tilde{X}$  trasforma sezioni di  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  in sezioni di  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ . La dimostrazione è data nella seguente proposizione.

**Proposizione 9.6.** *In riferimento al teorema di Nöther 9.4, sia  $X$  un campo vettoriale su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  che soddisfa (9.55) e (9.56). Il campo vettoriale su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ :*

$$\tilde{X} := X - \langle X, dT \rangle Z,$$

*soddisfa ancora (9.55) e (9.56), con  $f$  rimpiazzata da  $\tilde{f} := f - \langle X, dT \rangle \mathcal{L}$ , soddisfa la condizione di preservazione delle fibre:  $\langle \tilde{X}, dT \rangle = 0$  ovunque su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  e produce lo stesso integrale primo prodotto da  $X$ .  $\diamond$*

**Dimostrazione.** La proprietà  $\langle \tilde{X}, dT \rangle = 0$  è ovvia per costruzione, mentre vale

$$\tilde{X}(\mathcal{L}) = X(\mathcal{L}) - \langle X, dT \rangle Z(\mathcal{L}) = Z(f) - Z(\langle X, dT \rangle \mathcal{L}) = Z(f - \langle X, dT \rangle \mathcal{L}),$$

dove abbiamo usato il fatto che  $Z(\langle X, dT \rangle) = 0$  come dimostrato nella proposizione 9.5. Tenendo conto dello stesso fatto ed anche della struttura del vettore  $Z$  segue che  $\langle X, dT \rangle Z$  soddisfa l'ipotesi (9.45). Per linearità, tale ipotesi sarà soddisfatta anche da  $\tilde{X}$ . Infine, tenendo conto del fatto che  $\langle Z, \omega_k \rangle = 0$  si ha:

$$\langle X, \Omega_{\mathcal{L}} \rangle - f = \langle \tilde{X}, \Omega_{\mathcal{L}} \rangle - \tilde{f} + \langle X, dT \rangle \mathcal{L} = \langle \tilde{X}, \Omega_{\mathcal{L}} \rangle - \tilde{f}.$$

Questo conclude la dimostrazione.  $\square$

### 9.5.2 Il vettore di Runge-Lenz dal teorema di Nöther.

Illustriamo qui un caso interessante di *simmetria dinamica* e di corrispondente integrale primo dovuto al teorema di Nöther nella forma generale data sopra. Consideriamo un sistema inerziale  $\mathcal{I}$  e in esso un punto materiale  $P$  di massa  $m$  e vettore posizione  $\mathbf{x} = P - O$  riferito a  $\mathcal{I}$ ,

sottoposto alla forza centrale coulombiana con centro dato dall'origine  $O$  di coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{S}$ . Avremo dunque un'energia potenziale:

$$\mathcal{U}(\mathbf{x}) = -\frac{mg}{\|\mathbf{x}\|},$$

dove  $g \neq 0$  è una costante. La lagrangiana del sistema, usando le componenti di  $\mathbf{x}$  come coordinate libere, sarà allora data da:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{mg}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Le equazioni del moto risultano essere banalmente:

$$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{mg}{\|\mathbf{x}\|^3}x^i, \quad \text{per } i=1,2,3.$$

Dato che questa lagrangiana è evidentemente invariante per rotazioni attorno ad ogni asse  $\mathbf{n}$  uscente da  $O$ , in base al teorema di Nöther (vedi esempio 9.5.1) si conserverà nel tempo il momento angolare  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}} = \mathbf{x}(t) \wedge m\mathbf{v}(t)$ . Di conseguenza, se  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}} \neq \mathbf{0}$ , il moto avverrà sul piano passante per  $O$  e perpendicolare a  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}}$ . Assumendo  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}} \neq \mathbf{0}$ , ruotiamo gli assi in modo che l'asse  $\mathbf{e}_3$  sia diretto lungo  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}}$ . La lagrangiana sopra scritta ristretta al piano  $z = 0$  diventa:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{mg}{\|\mathbf{x}\|}.$$

dove però ora  $\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2$  e le equazioni del moto sono di conseguenza:

$$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{mg}{\|\mathbf{x}\|^3}x^i, \quad \text{per } i=1,2.$$

In altre parole la lagrangiana ristretta al piano  $x^3 = 0$  produce i moti della lagrangiana iniziale che sono confinati al piano  $x^3 = 0$ . In coordinate polari piane, sul piano  $x^3 = 0$  la nuova lagrangiana può essere riscritta equivalentemente come:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2) + \frac{mg}{r}. \quad (9.60)$$

Useremo d'ora in poi la lagrangiana ridotta (9.60) limitandoci a studiare i moti del punto  $P$  confinati al piano  $z = 0$  (con momento angolare iniziale non nullo). Questa lagrangiana non sembra avere simmetrie evidenti che possano produrre ulteriori integrali primi oltre a quello già ottenuto (usando la lagrangiana completa) ed oltre l'integrale primo di Jacobi (l'energia meccanica del sistema). Vogliamo provare che in realtà esiste una *simmetria dinamica* che produce un nuovo integrale primo detto *vettore di Runge-Lenz*. Tale vettore è ben noto nella dinamica classica ma la sua esistenza non può essere facilmente spiegata in base a principi generali nelle formulazioni

elementari della meccanica.

Consideriamo il campo vettoriale  $\mathbf{X}$  su  $j^1(\mathbb{V}^{3+1})$  che ha la struttura, per un fissato  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\mathbf{X} = r^2 \dot{\varphi} \sin(\varphi + \alpha) \frac{\partial}{\partial r} + r \dot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha) \frac{\partial}{\partial \varphi} + Z(X_0^r) \frac{\partial}{\partial \dot{r}} + Z(X_0^\varphi) \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}, \quad (9.61)$$

dove abbiamo usato le notazioni della sezione precedente:

$$X_0^r := r^2 \dot{\varphi} \sin(\varphi + \alpha), \quad \text{e} \quad X_0^\varphi := r \dot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha),$$

e dove il vettore dinamico  $Z$  associato alla lagrangiana risulta essere, dopo un facile calcolo:

$$Z = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{r} \frac{\partial}{\partial r} + \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( r \dot{\varphi}^2 - \frac{mg}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{r}} - \frac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \quad (9.62)$$

Il calcolo esplicito mostra che:

$$\mathbf{X}(\mathcal{L}) = Z(mg \cos(\varphi + \alpha)). \quad (9.63)$$

Siamo dunque nelle ipotesi del teorema 9.4, e più precisamente nel caso con  $\langle \mathbf{X}, dT \rangle = 0$ , per cui ci sarà un integrale primo  $I_{\mathbf{X}}$  associato alla simmetria debole indotta da  $\mathbf{X}$ . Si osservi che il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali generato da  $\mathbf{X}$  non è del tipo trattato nelle versioni elementari del teorema di Nöther (teorema 9.1), dato che le componenti  $X_0^r$  e  $X_0^\varphi$  dipendono *anche* dalle coordinate puntate: siamo dunque alla prese con una genuina simmetria dinamica. Il calcolo esplicito fornisce:

$$I = (\sin \alpha) [m\dot{r}\dot{\varphi}r^2 \cos \varphi - (mr^3\dot{\varphi}^2 - mg) \sin \varphi] + (\cos \alpha) [m\dot{r}\dot{\varphi}r^2 \sin \varphi + (mr^3\dot{\varphi}^2 - mg) \cos \varphi].$$

Si osservi che abbiamo un integrale primo per ogni  $\alpha \in [0, 2\pi]$ . La classe completa degli integrali primi si ottiene dalle combinazioni lineari dei due integrali primi per  $\alpha = 0$  e  $\alpha = \pi/2$  rispettivamente. In particolare il seguente vettore, detto *vettore di Runge-Lenz* porta le stesse informazioni della classe degli integrali primi suddetti:

$$\mathbf{K} := [m\dot{r}\dot{\varphi}r^2 \sin \varphi + (mr^3\dot{\varphi}^2 - mg) \cos \varphi] \mathbf{e}_1 + [-m\dot{r}\dot{\varphi}r^2 \cos \varphi + (mr^3\dot{\varphi}^2 - mg) \sin \varphi] \mathbf{e}_2.$$

Se ora teniamo conto del fatto che nelle nostre ipotesi:  $m\dot{\varphi}r^2 \mathbf{e}_3 = \mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}}$ , si verifica facilmente che:

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{p}|_{\mathcal{S}} \wedge \mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}}}{m} - mg \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|},$$

dove  $\mathbf{p}|_{\mathcal{S}} = m\mathbf{v}|_{\mathcal{S}}$  è l'impulso (diverso istante per istante) del punto materiale. Il vettore  $\mathbf{K}$  è una costante del moto in quanto le sue componenti sono tali (sono integrali primi). Nel caso in cui i moti della particella siano chiusi e quindi ellissi (in questo caso la forza coulombiana deve essere attrattiva e quindi  $g > 0$ ), quando il punto materiale attraversa l'asse maggiore dell'ellisse accade che  $\mathbf{p}|_{\mathcal{S}} \wedge \mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}}$  e  $\mathbf{x}$  sono entrambi diretti lungo tale asse. Dato che  $\mathbf{K}$  è costante nel tempo, esso sarà dunque diretto lungo l'asse maggiore dell'ellisse ad ogni istante. Nel caso il moto avvenga su una circonferenza, si verifica facilmente che  $\mathbf{K} = 0$ .

### 9.5.3 L'integrale primo di Jacobi come conseguenza del teorema di Nöther.

L'esistenza dell'integrale primo di Jacobi non è sicuramente conseguenza del teorema di Nöther nella forma elementare data nel teorema 9.1, in quanto non è essere associato ad un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali che preservano le fibre di  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ . Mostriamo ora è possibile dedurre l'esistenza dell'integrale primo di Jacobi dal teorema di Nöther nella versione generale data nel teorema 9.4. Mettiamoci nelle stesse ipotesi del teorema di Jacobi 9.3 e sia  $Z$  il vettore dinamico associato alla lagrangiana  $\mathcal{L}$ . Consideriamo il sistema di coordinate naturali  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  definite sull'aperto  $U$  nello spaziotempo degli atti di moto  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  su cui valgono le ipotesi del teorema di Jacobi rispetto al il campo vettoriale su  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ :

$$X := \frac{\partial}{\partial t}.$$

Questo campo vettoriale soddisfa per costruzione le ipotesi del teorema 9.4 (in particolare con  $\langle X, dT \rangle = 1$  costantemente). Inoltre nelle ipotesi del teorema di Jacobi:

$$X(\mathcal{L}) = 0,$$

per cui la funzione  $f$  che appare nella tesi del teorema 9.4 è nulla. Sappiamo allora che deve esserci un integrale primo  $\mathcal{H}_X := -I_{X,0}$  che, *nelle coordinate considerate* ha la forma:

$$\mathcal{H}_X := \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} (\dot{q}^k - X_0^k) - \mathcal{L} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k - \mathcal{L},$$

dato che nelle coordinate considerate vale  $X_0^k = 0$  identicamente. Abbiamo ritrovato l'integrale primo di Jacobi  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_X$ . Si deve osservare che il campo  $\frac{\partial}{\partial t}$  è definito solo in un aperto di  $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ , per cui l'integrale primo trovato ha validità solo locale. Tuttavia la procedura si può generalizzare globalmente se il campo  $X$  è definito globalmente.