

Valter Moretti

Teoria Spettrale e Meccanica Quantistica

con un'introduzione alla Formulazione
Algebraica delle Teorie Quantistiche

Ottobre 2012

Springer

Dedicato a tutti i giovani e brillanti colleghi, matematici e fisici, che sono stati costretti ad emigrare dall'Italia verso Paesi più civili dove poter dare il loro contributo, piccolo o grande, alla Ricerca Scientifica.

Prefazione

Dovevo avere otto o nove anni e mio padre, di formazione letteraria, ma interdisciplinariamente colto e curioso, mi raccontò: “Un grandissimo scienziato, Albert Einstein, ha scoperto che per un oggetto pesante non è possibile superare una velocità massima, quella della luce”. Io rimasi incredulo e cercai di controbattere: “Ma no, non è vero, se corro quasi a quella velocità e poi accelero un po’, la supero sicuramente quella velocità, no?” Ma mio padre fu irremovibile: “No, è impossibile fare quello che dici, è un fatto noto della fisica”. Dopo un po’ io aggiunsi: “Quel signore, Einstein, ha fatto tante prove...come si dice, tanti esperimenti?” Ma la risposta che mi arrivò fu del tutto inattesa: “No, nemmeno uno credo, ha invece usato la matematica!”

Cosa c’entravano i numeri e le figure geometriche con l’esistenza di una velocità limite? Come si poteva sostenere una cosa tanto apparentemente assurda, ma vera (mi fidavo di quanto mi raccontava mio padre) come l’esistenza di una velocità limite, usando solo la matematica? Come poteva la matematica avere tanto potere sul mondo materiale? E poi la fisica? Che roba era e che relazione aveva con la matematica? Era una delle cose più incredibilmente intriganti che avessi mai ascoltato fino a quel momento...dovevo saperne di più.

Questo libro è una versione corretta ed ampliata di un precedente testo (sempre pubblicato da Springer-Verlag), pubblicato in lingua italiana. Una parte di entrambi i testi è stata in realtà scritta, in forma preliminare, quando ero studente del *corso di laurea in Fisica* all’Università degli Studi di Genova. Il corso obbligatorio di *Istituzioni di Fisica Teorica*, al terzo anno, era il secondo scoglio quasi insormontabile per molti studenti (il primo era il famigerato corso di *Fisica II* che includeva la termodinamica insieme all’elettrodinamica classica).

La Meccanica Quantistica, insegnata in quel corso, necessitava un modo di pensare nuovo e difficile e lo sforzo era davvero notevole per noi volenterosi studenti: ci si muoveva per molti mesi in un contesto nebbioso ed insicuro, senza capire cosa fosse davvero importante nelle nozioni fisiche che – con molta difficoltà – cercavamo di imparare insieme ad un formalismo del tutto nuovo: quello della teoria degli operatori lineari su spazi di Hilbert. In realtà, all’epoca, non comprendevamo ancora che

stavamo lavorando con tale teoria matematica, e per molti dei miei colleghi la cosa sarebbe stata, forse a ragione, del tutto irrilevante; i vettori *bra* di Dirac erano vettori *bra* di Dirac e basta! E non gli elementi del duale topologico dello spazio di Hilbert. La nozione di *spazio di Hilbert* e di *spazio duale topologico* non aveva ancora diritto di cittadinanza nella classe degli strumenti matematici della quasi totalità dei miei colleghi, anche se sarebbe entrata a breve dal corso di *Metodi Matematici della Fisica*, tenuto dal Prof. G. Cassinelli. La matematica, la formalizzazione matematica della fisica, era sempre stato il mio cavallo di battaglia per superare tutte le difficoltà insite nello studio della fisica, tanto che alla fine (ma dopo avere preso anche un dottorato in fisica teorica) sono istituzionalmente diventato un matematico. Armato delle mie nozioni di matematica – imparate in un percorso extracurriculare che coltivavo parallelamente agli studi di fisica da sempre – e preparandomi ad impararne nuove per l’occasione, cercai di formalizzare anche le nozioni nelle quale mi stavo imbattendo, in questo nuovo ed interessantissimo corso di fisica. In parallelo portavo avanti una analogo progetto riguardante la formalizzazione matematica della teoria della Relatività Generale, non sapendo ancora che lo sforzo dedicato alla Meccanica Quantistica sarebbe stato incommensurabilmente superiore.

La formulazione del teorema spettrale più o meno come è presentata nei capitoli 8 e 9 di questo libro è la stessa con la quale arrivai a sostenere l’esame del corso di Istituzioni di Fisica Teorica che fu, di conseguenza, un po’ un discorso tra sordi.

Successivamente i miei interessi si spostarono verso la *teoria quantistica dei campi*, argomento di cui mi occupo ancora oggi, nel contesto un po’ più generale della teoria quantistica dei campi *su spaziotempo curvo*. Tuttavia il mio interesse per la formulazione elementare della MQ non è andato scemando negli anni e, di tanto in tanto, ho continuato ad aggiungere qualche altra parte all’opera iniziata da studente.

L’occasione di insegnare queste cose in vari corsi per matematici e per fisici, nelle lauree specialistiche e nei dottorati, infliggendo ai miei poveri studenti i risultati dei miei sforzi di sintesi, si è rivelata fondamentale per per migliorare l’opera, trascrivendo il testo in LaTeX, ma anche correggendolo in vari punti, accogliendo le numerose osservazioni che mi sono giunte da varie persone.

Vorrei a tal proposito ringraziare vari colleghi, diversi amici di discussione sui *news-groups: it.scienza.fisica, it.scienza.matematica e free.it.scienza.fisica* e molti studenti, alcuni dei quali diventati oggi miei colleghi, che hanno contribuito a migliorare le diverse versioni preliminari di questo trattato, direttamente o indirettamente nel corso di vari anni: S. Albeverio, P. Armani, G. Bramanti, S. Bonaccorsi, A. Cassa, B. Cocciaro, G. Collini, M. Dalla Brida, S. Doplicher, L. Di Persio, E. Fabri, C. Fontanari, A. Franceschetti, R. Ghiloni, A. Giacomini, V. Marini, S. Mazzucchi, E. Pagani, E. Pelizzari, G. Tessaro, M. Toller, L. Tubaro, D. Pastorello, A. Pugliese, F. Serra Cassano, G. Ziglio, S. Zerbini. Sono debitore, per vari motivi legati anche a questo libro, al mio compianto collega Alberto Tognoli. Ringrazio in particolare R. Aramini, D. Cadamuro e C. Dappiaggi che mi hanno segnalato errori di vario genere in varie versioni del libro, dopo averlo letto accuratamente.

Sono grato ai miei amici e collaboratori R. Brunetti, C. Dappiaggi e N. Pinamonti per varie discussioni tecniche nel corso degli anni, diversi suggerimenti su molti degli argomenti trattati e per avermi segnalato importanti riferimenti bibliografici.

Infine desidero ringraziare E. Gregorio per il suo puntuale e preziosissimo aiuto tecnico con il LaTeX.

Nel passaggio dalla versione ridotta in lingua italiana a quella, ampliata, in lingua inglese sono stati corretti un numero enorme (quasi con la cardinalità del continuo!) di errori di stampa ed errori di vario genere. Sono in particolare grato a E. Annigoni, M. Caffini, G. Collini, R. Ghiloni, A. Iacopetti, M. Oppio e D. Pastorello per questo. È stato inoltre introdotto ulteriore materiale, sia di carattere fisico che matematico ed è stato aggiunto un nuovo capitolo finale, riguardante la cosiddetta *formulazione algebrica*.

In particolare, nel capitolo 4 è stato dimostrato il teorema di Mercer per gli operatori di Hilbert-Schmidt positivi. La discussione sui primi due assiomi della Meccanica Quantistica, nel capitolo 7, è stata ampliata introducendo la caratterizzazione algebrica degli stati quantistici in termini di funzionali positivi di norma unitaria sulla C^* -algebra degli operatori compatti. Nel capitolo 8 sono stati introdotti i risultati generali sulle C^* -algebre e gli *-omomorfismi tra di esse. La formulazione di diversi teoremi riguardanti il calcolo funzionale ed il teorema spettrale sono stati conseguentemente parzialmente modificate nei capitoli 8 e 9. Nel capitolo 10 (capitolo 9 della precedente edizione) è stata introdotta una rapida trattazione delle equazioni differenziali astratte negli spazi di Hilbert. È stato aggiunto un importante esempio al teorema di Bargmann nel capitolo 12 (ex capitolo 11). Sempre nel capitolo 12, dopo avere presentato la nozione di misura di Haar, è stato introdotto ed in parte provato il teorema di Peter-Weyl riguardante le rappresentazioni unitarie dei gruppi topologici compatti. Il teorema è stato quindi applicato alla teoria del momento angolare. Nella stessa sede è stata discussa in dettaglio la regola di superselezione del momento angolare. La discussione sulle POVM nel capitolo 13 (ex capitolo 12) è stata arricchita con ulteriore materiale ed è stata inserita una breve introduzione di alcune idee fondamentali della teoria dello scattering non relativistico. La discussione sulle disuguaglianze di Bell è stata notevolmente allargata presentandone la versione dovuta a Wigner. Alla fine del primo capitolo sono ora richiamate alcune nozioni di topologia generale e di teoria della misura astratta. Lo sforzo complessivo è stato quello di costruire un trattato il più possibile autoconsistente. Sono conscio del fatto che rimangono comunque evidenti limitazioni nel contenuto. Per ironia della sorte, dato che la mia attività di ricerca concerne le teorie relativistiche – tutta la trattazione si sviluppa ad un livello non relativistico e la trattazione quantistica della simmetria di Poincaré rimane del tutto trascurata.

Ringrazio i colleghi F. Serra Cassano, R. Ghiloni, G. Greco, A. Perotti e L. Vanzo per alcune utili discussioni tecniche riguardanti questa seconda versione del libro.

Ottobre 2012

Valter Moretti
Dipartimento di Matematica
Facoltà di Scienze MFN,
Università di Trento

Indice

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduzione e richiami matematici | 1 |
| 1.1 | Sul libro | 1 |
| 1.1.1 | Scopi e struttura del libro | 1 |
| 1.1.2 | Prerequisiti | 4 |
| 1.1.3 | Convenzioni generali valide per tutto il libro | 4 |
| 1.2 | Sulla Meccanica Quantistica | 5 |
| 1.2.1 | La MQ come teoria matematica | 5 |
| 1.2.2 | La MQ nel panorama della Fisica attuale | 7 |
| 1.3 | Richiami di topologia generale | 10 |
| 1.3.1 | Aperti, chiusi e nozioni topologiche elementari | 10 |
| 1.3.2 | Convergenza e continuità | 13 |
| 1.3.3 | Compattezza | 14 |
| 1.3.4 | Connessione | 16 |
| 1.4 | Richiami di teoria della misura | 16 |
| 1.4.1 | Spazi con misura | 17 |
| 1.4.2 | Misure positive σ -additive | 19 |
| 1.4.3 | Integrazione di funzioni misurabili | 23 |
| 1.4.4 | Teorema di Riesz per misure di Borel positive | 27 |
| 1.4.5 | Derivate di misure | 28 |
| 1.4.6 | Misura di Lebesgue su \mathbb{R}^n | 29 |
| 1.4.7 | Misura prodotto | 33 |
| 1.4.8 | Misure complesse (e misure con segno) | 34 |
| 1.4.9 | Derivazione sotto il segno di integrale | 35 |
| 2 | Spazi normati e spazi di Banach, esempi ed applicazioni | 37 |
| 2.1 | Spazi ed algebre normate e di Banach | 38 |
| 2.1.1 | Spazi normati e loro proprietà topologiche elementari | 38 |
| 2.1.2 | Spazi di Banach | 42 |
| 2.1.3 | Un esempio: lo spazio di Banach $C(K; \mathbb{K}^n)$, il teorema del Dini ed il teorema di Arzelà-Ascoli | 45 |
| 2.1.4 | Algebre normate, algebre di Banach ed esempi vari | 49 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 2.2 | Operatori, spazi di operatori, norme di operatori | 58 |
| 2.3 | I teoremi fondamentali negli spazi di Banach | 66 |
| 2.3.1 | Il teorema di Hahn-Banach e le sue conseguenze elementari | 66 |
| 2.3.2 | Il teorema di Banach-Steinhaus o principio della limitatezza uniforme | 70 |
| 2.3.3 | Topologie deboli. Completezza *-debole di X' | 72 |
| 2.3.4 | Breve digressione: teorema di Krein-Milman, spazi localmente convessi metrizzabili e spazi di Fréchet | 77 |
| 2.3.5 | Teorema di Baire e sue conseguenze: teorema dell'applicazione aperta e dell'inverso continuo | 81 |
| 2.3.6 | Teorema del grafico chiuso | 84 |
| 2.4 | Proiettori | 87 |
| 2.5 | Norme equivalenti | 88 |
| 2.6 | Il teorema del punto fisso ed applicazioni | 91 |
| 2.6.1 | Il teorema del punto fisso di Banach-Caccioppoli | 91 |
| 2.6.2 | Applicazione del teorema del punto fisso: il teorema di esistenza ed unicità locale per sistemi di equazioni differenziali | 96 |
| | Esercizi | 100 |
| 3 | Spazi di Hilbert ed operatori limitati | 107 |
| 3.1 | Nozioni elementari, teorema di Riesz e riflessività | 108 |
| 3.1.1 | Spazi con prodotto scalare e spazi di Hilbert | 108 |
| 3.1.2 | Il teorema di Riesz e le sue conseguenze | 113 |
| 3.2 | Basi hilbertiane | 117 |
| 3.3 | Nozione di aggiunto hermitiano e applicazioni | 132 |
| 3.3.1 | L'operazione di coniugazione hermitiana o aggiunta | 132 |
| 3.3.2 | *-algebre e C^* -algebre | 135 |
| 3.3.3 | Operatori normali, autoaggiunti, isometrici, unitari, operatori positivi | 140 |
| 3.4 | Proiettori ortogonali e isometrie parziali | 144 |
| 3.5 | Radici quadrate di operatori positivi e decomposizione polare di operatori limitati | 149 |
| 3.6 | La trasformata di Fourier-Plancherel | 158 |
| | Esercizi | 169 |
| 4 | Classi di operatori compatti in spazi di Hilbert e loro proprietà fondamentali | 179 |
| 4.1 | Operatori compatti in spazi normati e di Banach | 180 |
| 4.1.1 | Compatti in spazi normati (infinitodimensionali) | 180 |
| 4.1.2 | Operatori compatti in spazi normati | 182 |
| 4.2 | Operatori compatti in spazi di Hilbert | 186 |
| 4.2.1 | Proprietà generali ed esempi | 187 |
| 4.2.2 | Decomposizione spettrale di operatori compatti in spazi di Hilbert | 190 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4.3 | Operatori di Hilbert-Schmidt | 196 |
| 4.3.1 | Proprietà generali ed esempi | 197 |
| 4.3.2 | Nuclei integrali e teorema di Mercer | 205 |
| 4.4 | Operatori di classe traccia (o nucleari) | 209 |
| 4.4.1 | Proprietà generali | 209 |
| 4.4.2 | Nozione di traccia | 213 |
| 4.5 | Introduzione alla teoria di Fredholm delle equazioni integrali | 217 |
| | Esercizi | 224 |
| 5 | Operatori non limitati con domini densi in spazi di Hilbert | 231 |
| 5.1 | Operatori non limitati con dominio non massimale | 231 |
| 5.1.1 | Operatori non limitati con dominio non massimale in spazi normati | 232 |
| 5.1.2 | Operatori chiusi e chiudibili | 233 |
| 5.1.3 | Il caso degli spazi di Hilbert: struttura di $H \oplus H$ e operatore τ | 234 |
| 5.1.4 | Proprietà generali dell'operatore aggiunto hermitiano | 235 |
| 5.2 | Operatori hermitiani, simmetrici, autoaggiunti ed essenzialmente autoaggiunti | 237 |
| 5.3 | Alcune importanti applicazioni: operatore posizione e operatore impulso | 242 |
| 5.3.1 | L'operatore posizione | 242 |
| 5.3.2 | L'operatore impulso | 243 |
| 5.4 | Criteri di esistenza ed unicità per le estensioni autoaggiunte | 248 |
| 5.4.1 | La trasformata di Cayley e gli indici di difetto | 248 |
| 5.4.2 | Il criterio di Von Neumann | 252 |
| 5.4.3 | Il criterio di Nelson | 253 |
| | Esercizi | 259 |
| 6 | Cenni di fenomenologia dei sistemi quantistici e di Meccanica Ondulatoria | 263 |
| 6.1 | Generalità sui sistemi quantistici | 263 |
| 6.2 | Alcune proprietà particellari delle onde elettromagnetiche | 265 |
| 6.2.1 | Effetto Fotoelettrico | 265 |
| 6.2.2 | Effetto Compton | 266 |
| 6.3 | Cenni di Meccanica ondulatoria | 268 |
| 6.3.1 | Onde di de Broglie | 269 |
| 6.3.2 | Funzione d'onda di Schrödinger e interpretazione probabilistica di Born | 270 |
| 6.4 | Principio di indeterminazione di Heisenberg | 272 |
| 6.5 | Le grandezze compatibili ed incompatibili | 273 |
| 7 | I primi 4 assiomi della MQ: proposizioni, stati quantistici e osservabili | 275 |
| 7.1 | Le idee che stanno alla base dell'interpretazione standard della fenomenologia quantistica | 276 |
| 7.2 | Sistemi classici: proposizioni elementari e stati | 278 |

| | | |
|----------|---|-----|
| 7.2.1 | Stati come misure di probabilità | 278 |
| 7.2.2 | Proposizioni come insiemi e stati come misure su di essi . . . | 281 |
| 7.2.3 | Interpretazione insiemistica dei connettivi logici | 282 |
| 7.2.4 | Proposizioni “infinite” e grandezze fisiche | 282 |
| 7.2.5 | Astrazione: elementi di teoria dei reticoli | 285 |
| 7.2.6 | Il reticolo distributivo delle proposizioni elementari dei sistemi classici | 287 |
| 7.3 | Le proposizioni relative a sistemi quantistici come proiettori ortogonali | 288 |
| 7.3.1 | Il reticolo non distributivo dei proiettori ortogonali su uno spazio di Hilbert | 289 |
| 7.3.2 | Ricostruire lo spazio di Hilbert dalla struttura di reticolo . . . | 297 |
| 7.3.3 | Le algebre di von Neumann e la classificazione dei fattori . . | 299 |
| 7.4 | Le proposizioni e gli stati relativi a sistemi quantistici | 300 |
| 7.4.1 | Assiomi A1 e A2 : proposizioni, stati di sistemi quantistici ed il teorema di Gleason | 300 |
| 7.4.2 | Il teorema di Kochen-Specker | 308 |
| 7.4.3 | Stati puri, stati misti, ampiezze di transizione | 310 |
| 7.4.4 | Assioma A3 : stati successivi ai processi di misura e preparazione degli stati | 315 |
| 7.4.5 | Regole di superselezione e settori coerenti | 317 |
| 7.4.6 | Caratterizzazione algebrica della nozione di stato come teorema di Riesz <i>non commutativo</i> | 321 |
| 7.5 | Le osservabili come Misure a Valori di Proiezione su \mathbb{R} | 325 |
| 7.5.1 | Assioma A4 : la nozione di osservabile | 325 |
| 7.5.2 | Operatori autoaggiunti associati ad osservabili: motivazioni fisiche ed esempi elementari | 329 |
| 7.5.3 | Misure di probabilità associate a coppie stato - osservabile . . | 334 |
| | Esercizi | 336 |
| 8 | Teoria Spettrale I: generalità, C^*-algebre astratte e operatori in $\mathfrak{B}(H)$ | 339 |
| 8.1 | Nozione di spettro, risolvente e operatore risolvente | 340 |
| 8.1.1 | Nozioni fondamentali nel caso operatoriale in spazi normati | 341 |
| 8.1.2 | Spettri di classi di operatori normali in spazi di Hilbert | 345 |
| 8.1.3 | C^* -algebre astratte: teorema di Gelfand-Mazur, raggio spettrale, formula di Gelfand, teorema di Gelfand-Naimark . | 347 |
| 8.2 | Calcolo funzionale: rappresentazioni di C^* -algebre commutative di funzioni limitate | 353 |
| 8.2.1 | C^* -algebre astratte: calcolo funzionale con funzioni continue ed elementi autoaggiunti | 354 |
| 8.2.2 | Alcune proprietà notevoli degli *-omomorfismi di C^* -algebre, degli spettri e degli elementi positivi | 357 |
| 8.2.3 | Algebre di Banach commutative e la trasformata di Gelfand | 361 |
| 8.2.4 | C^* -algebre astratte: calcolo funzionale con funzioni continue ed elementi normali | 367 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 8.2.5 | C^* -algebre di operatori in $\mathfrak{B}(H)$: calcolo funzionale con funzioni misurabili limitate | 370 |
| 8.3 | Misure a valori di proiezione (PVM) | 378 |
| 8.3.1 | Misure spettrali dette anche a valori di proiezione (PVM)... | 378 |
| 8.3.2 | Integrale di funzioni misurabili limitate rispetto ad una PVM | 381 |
| 8.3.3 | Proprietà degli operatori ottenuti integrando funzioni limitate rispetto a PVM | 387 |
| 8.4 | Teorema spettrale per operatori normali in $\mathfrak{B}(H)$ | 394 |
| 8.4.1 | Teorema di decomposizione spettrale per operatori normali in $\mathfrak{B}(H)$ | 395 |
| 8.4.2 | Teorema di rappresentazione spettrale per operatori normali in $\mathfrak{B}(H)$ | 399 |
| 8.5 | Il teorema di Fuglede e le sue conseguenze | 408 |
| 8.5.1 | Il teorema di Fuglede | 408 |
| 8.5.2 | Alcune conseguenze del teorema di Fuglede | 410 |
| | Esercizi | 411 |
| 9 | Teoria Spettrale II: operatori non limitati in spazi di Hilbert | 417 |
| 9.1 | Teorema spettrale per operatori autoaggiunti non limitati | 418 |
| 9.1.1 | Integrazione di funzioni non limitate rispetto a misure spettrali | 418 |
| 9.1.2 | Algebra di von Neumann di un operatore normale limitato .. | 432 |
| 9.1.3 | Teorema di decomposizione spettrale per operatori autoaggiunti non limitati | 433 |
| 9.1.4 | Un esempio a spettro puntuale: l'hamiltoniano dell'oscillatore armonico | 442 |
| 9.1.5 | Un esempio a spettro continuo: gli operatori posizione ed impulso | 446 |
| 9.1.6 | Teorema di rappresentazione spettrale per operatori autoaggiunti non limitati | 448 |
| 9.1.7 | Misure spettrali congiunte | 449 |
| 9.2 | Esponenziale di operatori non limitati: vettori analitici | 451 |
| 9.3 | Gruppi unitari ad un parametro fortemente continui | 456 |
| 9.3.1 | Gruppi unitari ad un parametro fortemente continui, teorema di von Neumann | 456 |
| 9.3.2 | Gruppi unitari ad un parametro generati da operatori autoaggiunti e Teorema di Stone | 460 |
| 9.3.3 | Commutatività di operatori e misure spettrali | 468 |
| | Esercizi | 472 |
| 10 | Teoria Spettrale III: applicazioni | 475 |
| 10.1 | Equazioni differenziali astratte in spazi di Hilbert | 475 |
| 10.1.1 | L'equazione di Schrödinger astratta (con sorgente) | 478 |
| 10.1.2 | L'equazione di Klein-Gordon/D'Alembert astratta (con sorgente e termine dissipativo) | 484 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 10.1.3 | L'equazione del calore astratta | 493 |
| 10.2 | Prodotto tensoriale hilbertiano | 496 |
| 10.2.1 | Prodotto tensoriale di spazi di Hilbert e proprietà spettrali .. | 497 |
| 10.2.2 | Prodotto tensoriale di operatori (generalmente non limitati) e loro proprietà spettrali | 503 |
| 10.2.3 | Un esempio: il momento angolare orbitale | 506 |
| 10.3 | Teorema di decomposizione polare per operatori non limitati | 510 |
| 10.3.1 | Proprietà degli operatori A^*A , radici quadrate di operatori autoaggiunti positivi non limitati | 510 |
| 10.3.2 | Teorema di decomposizione polare per operatori chiusi e densamente definiti | 515 |
| 10.4 | I teoremi di Kato-Rellich e di Kato | 517 |
| 10.4.1 | Il teorema di Kato-Rellich | 517 |
| 10.4.2 | Un esempio: l'operatore $-\Delta + V$ ed il teorema di Kato | 519 |
| | Esercizi | 526 |
| 11 | Formulazione matematica della MQ non relativistica | 529 |
| 11.1 | Riepilogo e commenti sugli assiomi A1 , A2 , A3 , A4 e sulle regole di superselezione | 529 |
| 11.2 | Assioma A5 : sistemi elementari non relativistici | 537 |
| 11.2.1 | le Relazioni di Commutazione Canonica (CCR) | 539 |
| 11.2.2 | Il Principio di Indeterminazione di Heisenberg come teorema | 540 |
| 11.3 | Le relazioni di Weyl, il teorema di Stone-von Neumann ed il teorema di Mackey | 541 |
| 11.3.1 | Famiglie irriducibili di operatori e lemma di Schur | 542 |
| 11.3.2 | Le relazioni di Weyl dalle CCR | 544 |
| 11.3.3 | Il teorema di Stone-von Neumann ed il teorema di Mackey . | 552 |
| 11.3.4 | La *-algebra di Weyl | 555 |
| 11.3.5 | Dimostrazione dei teoremi di Stone-von Neumann e di Mackey | 560 |
| 11.3.6 | Ancora sul "principio di Heisenberg": indebolimento delle ipotesi ed estensione agli stati misti | 566 |
| 11.3.7 | Riformulazione del teorema di Stone-von Neumann tramite il gruppo di Heisenberg | 568 |
| 11.3.8 | Il principio di corrispondenza di Dirac ed il Calcolo di Weyl | 570 |
| | Esercizi | 574 |
| 12 | Introduzione alle Simmetrie Quantistiche | 577 |
| 12.1 | Nozione e caratterizzazione delle simmetrie quantistiche | 578 |
| 12.1.1 | Qualche esempio | 579 |
| 12.1.2 | Simmetrie in presenza di regole di superselezione | 581 |
| 12.1.3 | Simmetrie nel senso di Kadison | 582 |
| 12.1.4 | Simmetrie nel senso di Wigner | 584 |
| 12.1.5 | Teoremi di Wigner e di Kadison | 586 |
| 12.1.6 | Azione duale delle simmetrie sulle osservabili | 598 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 12.2 | Introduzione ai gruppi di simmetria | 603 |
| 12.2.1 | Rappresentazioni proiettive, unitarie proiettive | 603 |
| 12.2.2 | Unitarietà o antiunitarietà delle rappresentazioni unitarie proiettive | 609 |
| 12.2.3 | Estensioni centrali e gruppo quantistico associato ad un gruppo di simmetria | 610 |
| 12.2.4 | Gruppi di simmetria topologici | 613 |
| 12.2.5 | Rappresentazioni unitarie proiettive fortemente continue | 618 |
| 12.2.6 | Il caso notevole del gruppo topologico \mathbb{R} | 621 |
| 12.2.7 | Richiami sui gruppi ed algebre di Lie | 627 |
| 12.2.8 | Gruppi di simmetria di Lie, teoremi di Bargmann, Gårding, Nelson, FS ³ | 636 |
| 12.2.9 | Il teorema di Peter-Weyl | 648 |
| 12.3 | Qualche esempio | 655 |
| 12.3.1 | Il gruppo di simmetria $SO(3)$ e lo spin | 655 |
| 12.3.2 | La regola di superselezione del momento angolare | 659 |
| 12.3.3 | Il gruppo di Galileo e le sue rappresentazioni unitarie proiettive | 660 |
| 12.3.4 | La regola di Bargmann di superselezione della massa | 668 |
| | Esercizi | 671 |
| 13 | Alcuni argomenti più avanzati di Meccanica Quantistica | 677 |
| 13.1 | La dinamica quantistica e le sue simmetrie | 678 |
| 13.1.1 | Assioma A6 : l'evoluzione temporale | 678 |
| 13.1.2 | Simmetrie dinamiche | 681 |
| 13.1.3 | L'equazione di Schrödinger e gli stati stazionari | 684 |
| 13.1.4 | L'azione del gruppo di Galileo in <i>rappresentazione posizione</i> | 693 |
| 13.1.5 | Alcune idee elementari alla base della descrizione dei processi di diffusione o scattering | 695 |
| 13.1.6 | L'evolutore temporale in assenza di omogeneità temporale e la serie di Dyson | 703 |
| 13.1.7 | Inversione del tempo antiunitaria | 707 |
| 13.2 | L'osservabile tempo ed il teorema di Pauli. Un accenno alle POVM | 709 |
| 13.2.1 | Il Teorema di Pauli | 710 |
| 13.2.2 | Osservabili generalizzate come POVM | 711 |
| 13.3 | Relazione tra simmetrie dinamiche e costanti del moto | 713 |
| 13.3.1 | La rappresentazione di Heisenberg e le costanti del moto | 713 |
| 13.3.2 | Un accenno al <i>teorema di Ehrenfest</i> ed ai problemi matematici ad esso connessi | 719 |
| 13.3.3 | Costanti del moto associate a gruppi di Lie di simmetria ed il caso del gruppo di Galileo | 721 |
| 13.4 | Sistemi composti e loro proprietà | 726 |
| 13.4.1 | Assioma A7 : sistemi composti | 726 |
| 13.4.2 | Stati entangled ed il cosiddetto "paradosso EPR" | 728 |
| 13.4.3 | Le disuguaglianze di Bell e la loro violazione sperimentale | 731 |

| | | |
|-----------|--|-----|
| 13.4.4 | Impossibilità di trasmettere informazione tramite le correlazioni EPR. | 734 |
| 13.4.5 | Il fenomeno della decoerenza come emergenza del mondo macroscopico | 737 |
| 13.4.6 | Assioma A8 : sistemi di sottosistemi identici | 738 |
| 13.4.7 | Bosoni e Fermioni | 741 |
| | Esercizi | 743 |
| 14 | Introduzione alla Formulazione Algebrica delle Teorie Quantistiche . | 745 |
| 14.1 | Introduzione alla Formulazione Algebrica delle teorie quantistiche . | 745 |
| 14.1.1 | La formulazione algebrica ed il teorema GNS | 746 |
| 14.1.2 | Stati puri e rappresentazioni irriducibili | 753 |
| 14.1.3 | Formulazione in spazi di Hilbert vs formulazione algebrica . | 756 |
| 14.1.4 | Regole di superselezione ed il teorema di Fell | 759 |
| 14.1.5 | Dimostrazione del teorema di Gelfand-Naimark, nozione di Rappresentazione Universale e rappresentazioni quasioivalenti | 762 |
| 14.2 | Un esempio di C^* -algebra di osservabili: la C^* -algebra di Weyl ... | 766 |
| 14.2.1 | Proprietà ulteriori delle $*$ -algebre di Weyl $\mathscr{W}(X, \sigma)$ | 766 |
| 14.2.2 | La C^* -algebra di Weyl $C^*\mathscr{W}(X, \sigma)$ | 770 |
| 14.3 | Introduzione alla trattazione delle Simmetrie Quantistiche nella formulazione algebrica | 772 |
| 14.3.1 | Il punto di vista della formulazione algebrica sulle simmetrie quantistiche | 772 |
| 14.3.2 | Gruppi di simmetria (topologici) nel formalismo algebrico .. | 775 |
| A | Relazioni d'ordine e gruppi | 779 |
| A.1 | Relazioni d'ordine, insiemi parzialmente ordinati, lemma di Zorn .. | 779 |
| A.2 | Richiami di teoria dei gruppi | 780 |
| B | Elementi di geometria differenziale | 783 |
| B.1 | Varietà differenziabili, varietà differenziabili prodotto, funzioni differenziabili | 783 |
| B.2 | Spazio tangente e cotangente. Campi vettoriali covarianti e controvarianti | 787 |
| B.3 | Differenziali, curve e vettori tangenti | 790 |
| B.4 | Pushforward e pullback | 791 |
| | Bibliografia | 793 |
| | Indice analitico | 799 |