Valter Moretti

Teoria Spettrale e Meccanica Quantistica

con un'introduzione alla Formulazione Algebrica delle Teorie Quantistiche

Ottobre 2012

Springer

Dedicato a tutti i giovani e brillanti colleghi, matematici e fisici, che sono stati costretti ad emigrare dall'Italia verso Paesi più civili dove poter dare il loro contributo, piccolo o grande, alla Ricerca Scientifica.

Prefazione

Dovevo avere otto o nove anni e mio padre, di formazione letteraria, ma interdisciplinarmente colto e curioso, mi raccontò: "Un grandissimo scienziato, Albert Einstein, ha scoperto che per un oggetto pesante non è possibile superare una velocità massima, quella della luce". Io rimasi incredulo e cercai di controbattere: "Ma no, non è vero, se corro quasi a quella velocità e poi accelero un po', la supero sicurmente quella velocità, no?" Ma mio padre fu irremovibile: "No, è impossibile fare quello che dici, è un fatto noto della fisica". Dopo un po' io aggiunsi:"Quel signore, Einstein, ha fatto tante prove...come si dice, tanti esperimenti*?" Ma la risposta che mi arrivò fu del tutto inattesa: "No, nemmeno uno credo, ha invece usato la matematica!"*
Cosa c'entravano i numeri e le figure geometriche con l'esistenza di una velocità limite? Come si poteva sostenere una cosa tanto apparentemente assurda, ma vera (mi fidavo di quanto mi raccontava mio padre) come l'esistenza di una velocità limite, usando solo *la matematica? Come poteva la matematica avere tanto potere sul mondo materiale? E poi la* fisica*? Che roba era e che relazione aveva con la matematica? Era una delle cose più incredibilmente intriganti che avessi mai ascoltato fino a quel momento...dovevo saperne di più.*

Questo libro è una versione corretta ed ampliata di un precedente testo (sempre pubblicato da Springer-Verlag), pubblicato in lingua italiana. Una parte di entrambi i testi è stata in realtà scritta, in forma preliminare, quando ero studente del *corso di laurea in Fisica* all'Università degli Studi di Genova. Il corso obbligatorio di *Istituzioni di Fisica Teorica*, al terzo anno, era il secondo scoglio quasi insormontabile per molti studenti (il primo era il famigerato corso di *Fisica II* che includeva la termodinamica insieme all'elettrodinamica classica).
La Meccanica Quantistica, insegnata in quel corso, necessitava un modo di pensare nuovo e difficile e lo sforzo era davvero notevole per noi volenterosi studenti: ci si muoveva per molti mesi in un contesto nebbioso ed insicuro, senza capire cosa fosse davvero importante nelle nozioni fisiche che – con molta difficoltà – cercavamo di imparare insieme ad un formalismo del tutto nuovo: quello della teoria degli operatori lineari su spazi di Hilbert. In realtà, all'epoca, non comprendevamo ancora che

stavamo lavorando con tale teoria matematica, e per molti dei miei colleghi la cosa sarebbe stata, forse a ragione, del tutto irrilevante; i vettori *bra* di Dirac erano vettori *bra* di Dirac e basta! E non gli elementi del duale topologico dello spazio di Hilbert. La nozione di *spazio di Hilbert* e di *spazio duale topologico* non aveva ancora diritto di cittadinanza nella classe degli strumenti matematici della quasi totalità dei miei colleghi, anche se sarebbe entrata a breve dal corso di *Metodi Matematici della Fisica*, tenuto dal Prof. G. Cassinelli. La matematica, la formalizzazione matematica della fisica, era sempre stato il mio cavallo di battaglia per superare tutte le difficoltà insite nello studio della fisica, tanto che alla fine (ma dopo avere preso anche un dottorato in fisica teorica) sono istituzionalmente diventato un matematico. Armato delle mie nozioni di matematica – imparate in un percorso extracurriculare che coltivavo parallelamente agli studi di fisica da sempre – e preparandomi ad impararne nuove per l'occasione, cercai di formalizzare anche le nozioni nelle quale mi stavo imbattendo, in questo nuovo ed interessantissimo corso di fisica. In parallelo portavo avanti una analogo progetto riguardante la formalizzazione matematica della teoria della Relatività Generale, non sapendo ancora che lo sforzo dedicato alla Meccanica Quantistica sarebbe stato incommensurabilmente superiore.
La formulazione del teorema spettrale più o meno come è presentata nei capitoli 8 e 9 di questo libro è la stessa con la quale arrivai a sostenere l'esame del corso di Istituzioni di Fisica Teorica che fu, di conseguenza, un po' un discorso tra sordi.
Successivamente i miei interessi si spostarono verso la *teoria quantistica dei campi*, argomento di cui mi occupo ancora oggi, nel contesto un po' più generale della teoria quantistica dei campi *su spaziotempo curvo*. Tuttavia il mio interesse per la formulazione elementare della MQ non è andato scemando negli anni e, di tanto in tanto, ho continuato ad aggiungere qualche altra parte all'opera iniziata da studente.
L'occasione di insegnare queste cose in vari corsi per matematici e per fisici, nelle lauree specialistiche e nei dottorati, infliggendo ai miei poveri studenti i risultati dei miei sforzi di sintesi, si è rivelata fondamentale per per migliorare l'opera, trascrivendo il testo in LaTeX, ma anche correggendolo in vari punti, accogliendo le numerose osservazioni che mi sono giunte da varie persone.
Vorrei a tal proposito ringraziare vari colleghi, diversi amici di discussione sui *newsgroups*: *it.scienza.fisica*, *it.scienza.matematica* e *free.it.scienza.fisica* e molti studenti, alcuni dei quali diventati oggi miei colleghi, che hanno contribuito a migliorare le diverse versioni preliminari di questo trattato, direttamente o indirettamente nel corso di vari anni: S. Albeverio, P. Armani, G. Bramanti, S. Bonaccorsi, A. Cassa, B. Cocciaro, G. Collini, M. Dalla Brida, S. Doplicher, L. Di Persio, E. Fabri, C. Fontanari, A. Franceschetti, R. Ghiloni, A. Giacomini, V. Marini, S. Mazzucchi, E. Pagani, E. Pelizzari, G. Tessaro, M. Toller, L. Tubaro, D. Pastorello, A. Pugliese, F. Serra Cassano, G. Ziglio, S. Zerbini. Sono debitore, per vari motivi legati anche a questo libro, al mio compianto collega Alberto Tognoli. Ringrazio in particolare R. Aramini, D. Cadamuro e C. Dappiaggi che mi hanno segnalato errori di vario genere in varie versioni del libro, dopo averlo letto accuratamente.
Sono grato ai miei amici e collaboratori R. Brunetti, C. Dappiaggi e N. Pinamonti per varie discussioni tecniche nel corso degli anni, diversi suggerimenti su molti degli argomenti trattati e per avermi segnalato importanti riferimenti bibliografici.

Infine desidero ringraziare E. Gregorio per i suo puntuale e preziosissimo aiuto tecnico con il LaTeX.

Nel passaggio dalla versione ridotta in lingua italiana a quella, ampliata, in lingua inglese sono stati corretti un numero enorme (quasi con la cardinalità del continuo!) di errori di stampa ed errori di vario genere. Sono in particolare grato a E. Annigoni, M. Caffini, G. Collini, R. Ghiloni, A. Iacopetti, M. Oppio e D. Pastorello per questo. È stato inoltre introdotto ulteriore materiale, sia di carattere fisico che matematico ed è stato aggiunto un nuovo capitolo finale, riguardante la cosiddetta *formulazione algebrica*.
In particolare, nel capitolo 4 è stato dimostrato il teorema di Mercer per gli operatori di Hilbert-Schmidt positivi. La discussione sui primi due assiomi della Meccanica Quantistica, nel capitolo 7, è stata ampliata introducendo la caratterizzazione algebrica degli stati quantistici in termini di funzionali positivi di norma unitaria sulla C^*-algebra degli operatori compatti. Nel capitolo 8 sono stati introdotti i risultati generali sulle C^*-algebre e gli *-omomorfismi tra di esse. La formulazione di diversi teoremi riguardati il calcolo funzionale ed il teorema spettrale sono stati conseguentemente parzialmente modificate nei capitoli 8 e 9. Nel capitolo 10 (capitolo 9 della precedente edizione) è stata introdotta una rapida trattazione delle equazioni differenziali astratte negli spazi di Hilbert. È stato aggiunto un importante esempio al teorema di Bargamann nel capitolo 12 (ex capitolo 11). Sempre nel capitolo 12, dopo avere presentato la nozione di misura di Haar, è stato introdotto ed in parte provato il teorema di Peter-Weyl riguardante le rappresentazioni unitarie dei gruppi topologici compatti. Il teorema è stato quindi applicato alla teoria del momento angolare. Nella stessa sede è stata discussa in dettaglio la regola di superselezione del momento angolare. La discussione sulle POVM nel capitolo 13 (ex capitolo 12) è stata arricchita con ulteriore materiale ed è stata inserita una breve introduzione di alcune idee fondamentali della teoria dello scattering non relativistico. La discussione sulle disuguaglianze di Bell è stata notevolmente allargata presentandone la versione dovuta a Wigner. Alla fine del primo capitolo sono ora richiamate alcune nozioni di topologia generale e di teoria della misura astratta. Lo sforzo complessivo è stato quello di costruire un trattato il più possibile autoconsistente. Sono conscio del fatto che rimangano comunque evidenti limitazioni nel contenuto. Per ironia della sorte, dato che la mia attività di ricerca concerne le teorie relativistiche – tutta la trattazione si sviluppa ad un livello non relativistico e la trattazione quantistica della simmetria di Poincaré rimane del tutto trascurata.
Ringrazio i colleghi F. Serra Cassano, R. Ghiloni, G. Greco, A. Perotti e L. Vanzo per alcune utili discussioni tecniche riguardanti questa seconda versione del libro.

Ottobre 2012

Valter Moretti
Dipartimento di Matematica
Facoltà di Scienze MFN,
Università di Trento

Indice