
Indice

1	Introduzione	1
1.1	Sul libro	1
1.1.1	Scopi e struttura del libro	1
1.1.2	Prerequisiti	3
1.1.3	Convenzioni generali valide per tutto il libro	4
1.2	Sulla Meccanica Quantistica	5
1.2.1	La MQ come teoria matematica	5
1.2.2	La MQ nel panorama della Fisica attuale	6

Parte I Elementi di teoria degli operatori lineari

2	Spazi normati e spazi di Banach, esempi ed applicazioni	11
2.1	Richiami di topologia generale	12
2.2	Spazi ed algebre normate e di Banach	15
2.2.1	Spazi normati e loro proprietà topologiche elementari	15
2.2.2	Spazi di Banach	19
2.2.3	Un esempio: lo spazio di Banach $C(K; \mathbb{K}^n)$ ed il teorema di Arzelà-Ascoli	22
2.2.4	Algebre normate, algebre di Banach ed esempi vari	26
2.3	Operatori, spazi di operatori, norme di operatori	33
2.4	I teoremi fondamentali negli spazi di Banach	41
2.4.1	Il teorema di Hahn-Banach e le sue conseguenze elementari	41
2.4.2	Il teorema di Banach-Steinhaus o principio della limitatezza uniforme	45
2.4.3	Topologie deboli. Completezza *-debole di X'	47
2.4.4	Breve digressione: Spazi metrici, spazi localmente convessi metrizzabili e spazi di Fréchet	51
2.4.5	Il teorema dell'applicazione aperta e dell'operatore inverso continuo dal Teorema di Baire	54
2.4.6	Teorema del grafico chiuso	58

2.5	Proiettori	60
2.6	Norme equivalenti	62
2.7	Il teorema del punto fisso ed applicazioni	64
2.7.1	Il teorema del punto fisso di Banach-Caccioppoli	65
2.7.2	Applicazione del teorema del punto fisso: il teorema di esistenza ed unicità locale per sistemi di equazioni differenziali	70
	Esercizi	74
3	Spazi di Hilbert ed operatori limitati	81
3.1	Nozioni elementari, teorema di Riesz e riflessività	81
3.1.1	Spazi con prodotto scalare e spazi di Hilbert	82
3.1.2	Il teorema di Riesz e le sue conseguenze	87
3.2	Basi hilbertiane	91
3.3	Nozione di aggiunto hermitiano e applicazioni	104
3.3.1	L'operazione di coniugazione hermitiana o aggiunta	105
3.3.2	*-algebre e C^* -algebre	108
3.3.3	Operatori normali, autoaggiunti, isometrici, unitari, operatori positivi	110
3.4	Proiettori ortogonali	114
3.5	Radici quadrate di operatori positivi e decomposizione polare di operatori limitati	116
3.6	La trasformata di Fourier-Plancherel	123
	Esercizi	135
4	Proprietà elementari degli operatori compatti, di Hilbert-Schmidt e di classe traccia	141
4.1	Operatori compatti in spazi normati e di Banach	142
4.1.1	Compatti in spazi normati (infinitodimensionali)	142
4.1.2	Operatori compatti in spazi normati	144
4.2	Operatori compatti in spazi di Hilbert	148
4.3	Operatori di Hilbert-Schmidt	158
4.4	Operatori di classe traccia (o nucleari)	167
4.5	Introduzione alla teoria di Fredholm delle equazioni integrali	175
	Esercizi	183
5	Operatori non limitati con domini densi in spazi di Hilbert	189
5.1	Operatori non limitati con dominio non massimale	189
5.1.1	Operatori non limitati con dominio non massimale in spazi normati	190
5.1.2	Operatori chiusi e chiudibili	190
5.1.3	Il caso degli spazi di Hilbert: struttura di $H \oplus H$ e operatore τ	191
5.1.4	Proprietà generali dell'operatore aggiunto hermitiano	192
5.2	Operatori hermitiani, simmetrici, autoaggiunti ed essenzialmente autoaggiunti	195

5.3	Alcune importanti applicazioni: operatore posizione e operatore impulso	199
5.3.1	L'operatore posizione	199
5.3.2	L'operatore impulso	201
5.4	Criteri di esistenza ed unicità per le estensioni autoaggiunte	205
5.4.1	La trasformata di Cayley e gli indici di difetto	205
5.4.2	Il Criterio di Von Neumann	209
5.4.3	Il criterio di Nelson	210
	Esercizi	216

Parte II Teoria Spettrale e Formalismo della Meccanica Quantistica

6	Brevi cenni di fenomenologia dei sistemi quantistici e di Meccanica Ondulatoria	223
6.1	Generalità sui sistemi quantistici	223
6.2	Alcune proprietà particellari delle onde elettromagnetiche	225
6.2.1	Effetto Fotoelettrico	225
6.2.2	Effetto Compton	226
6.3	Cenni di Meccanica ondulatoria	228
6.3.1	Onde di de Broglie	229
6.3.2	Funzione d'onda di Schrödinger e interpretazione probabilistica di Born	230
6.4	Principio di indeterminazione di Heisenberg	232
6.5	Le grandezze compatibili ed incompatibili	233
7	I primi 4 assiomi della MQ: proposizioni, stati quantistici e osservabili	235
7.1	Le idee che stanno alla base dell'interpretazione standard della fenomenologia quantistica	236
7.2	Stati classici come misure di probabilità sulla σ -algebra delle proposizioni elementari	238
7.2.1	Misure di probabilità, misure di Borel	238
7.2.2	Stati come misure	239
7.2.3	Proposizioni e insiemi e stati come misure su di esse	240
7.2.4	Interpretazione insiemistica dei connettivi logici	241
7.2.5	Proposizioni "infinite" e grandezze fisiche	242
7.2.6	Il reticolo distributivo, limitato, ortocomplementato e σ -completo delle proposizioni elementari	244
7.3	Le proposizioni relative a sistemi quantistici come insiemi di proiettori ortogonali	247
7.3.1	Reticoli di proiettori ortogonali su spazi di Hilbert	248
7.4	Le proposizioni e gli stati relativi a sistemi quantistici	256
7.4.1	Assiomi A1 e A2 : proposizioni, stati di sistemi quantistici ed il teorema di Gleason	256
7.4.2	Stati puri, stati misti, ampiezze di transizione	264

7.4.3	Assioma A3 : stati successivi ai processi di misura e preparazione degli stati	270
7.4.4	Regole di superselezione e settori coerenti	272
7.5	Le osservabili come Misure a Valori di Proiezione su \mathbb{R}	274
7.5.1	Assioma A4 : la nozione di osservabile	275
7.5.2	Operatori autoaggiunti associati ad osservabili: motivazioni fisiche ed esempi elementari	278
7.5.3	Misure di probabilità associate a coppie stato - osservabile ..	282
	Esercizi	285
8	Teoria Spettrale I: generalità ed operatori normali di $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ in spazi di Hilbert	287
8.1	Spettro e risolvente	288
8.1.1	Nozioni fondamentali	288
8.1.2	Algebre di Banach: Teorema di Gelfand-Mazur, raggio spettrale, formula di Gelfand	292
8.1.3	Spettri di operatori autoaggiunti, unitari e normali in spazi di Hilbert	297
8.2	*-omomorfismi di C^* -algebre di funzioni indotti da operatori limitati	298
8.3	Misure a valori di proiezione (PVM)	308
8.3.1	Misure a valori di proiezione (PVM) dette anche misure spettrali	308
8.3.2	Integrale di funzioni misurabili limitate rispetto ad una PVM	311
8.3.3	Proprietà degli operatori ottenuti integrando funzioni limitate rispetto a PVM	317
8.4	Teorema spettrale per operatori normali in $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$	324
8.4.1	Teorema di decomposizione spettrale per operatori limitati normali	324
8.4.2	Teorema di rappresentazione spettrale per operatori normali in $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ e teorema di Fuglede	332
	Esercizi	343
9	Teoria Spettrale II: operatori non limitati in spazi di Hilbert ed applicazioni	347
9.1	Teorema spettrale per operatori autoaggiunti non limitati	348
9.1.1	Integrazione di funzioni non limitate rispetto a misure spettrali	348
9.1.2	Teorema di decomposizione spettrale per operatori autoaggiunti non limitati	362
9.1.3	Un esempio a spettro puntuale: l'hamiltoniano dell'oscillatore armonico	371
9.1.4	Un esempio a spettro continuo: gli operatori posizione ed impulso	375
9.1.5	Teorema di rappresentazione spettrale per operatori autoaggiunti non limitati e misure congiunte	376

9.2 Esponenziale di operatori non limitati: vettori analitici 380

9.3 Gruppi unitari ad un parametro fortemente continui 384

9.3.1 Gruppi unitari ad un parametro fortemente continui, teorema di von Neumann 384

9.3.2 Gruppi unitari ad un parametro generati da operatori autoaggiunti e Teorema di Stone 388

9.3.3 Commutatività di operatori e misure spettrali 396

9.4 Prodotto tensoriale hilbertiano 399

9.4.1 Prodotto tensoriale di spazi di Hilbert 399

9.4.2 Prodotto tensoriale di operatori (generalmente non limitati) e loro proprietà spettrali 405

9.4.3 Un esempio: il momento angolare orbitale 408

9.5 Teorema di decomposizione polare per operatori non limitati 411

9.5.1 Proprietà degli operatori A^*A , radici quadrate di operatori autoaggiunti positivi non limitati 412

9.5.2 Teorema di decomposizione polare per operatori chiusi e densamente definiti 417

9.6 I teoremi di Kato-Rellich e di Kato 418

9.6.1 Il teorema di Kato-Rellich 418

9.6.2 Un esempio: l'operatore $-\Delta + V$ ed il teorema di Kato 420

Esercizi 427

10 La formulazione matematica della Meccanica Quantistica non relativistica 431

10.1 Riepilogo e commenti sugli assiomi **A1, A2, A3, A4** della MQ 431

10.2 Assioma **A5**: sistemi elementari non relativistici 437

10.2.1 le Relazioni di Commutazione Canonica (CCR) 438

10.2.2 Il Principio di Indeterminazione di Heisenberg come teorema 440

10.3 Le relazioni di Weyl, il teorema di Stone-von Neumann ed il teorema di Mackey 441

10.3.1 Famiglie irriducibili di operatori e lemma di Schur 441

10.3.2 Le relazioni di Weyl dalle CCR 443

10.3.3 Il teorema di Stone-von Neumann ed il teorema di Mackey . 451

10.3.4 La *-algebra di Weyl 454

10.3.5 Dimostrazione dei teoremi di Stone-von Neumann e di Mackey 458

10.3.6 Estensione del "principio di Heisenberg" agli stati misti 465

10.3.7 Commenti finali sul teorema di Stone-von Neumann: il gruppo di Heisenberg 466

10.4 Il principio di corrispondenza di Dirac 469

Esercizi 472

11	Introduzione alle Simmetrie Quantistiche	475
11.1	Nozione e caratterizzazione delle simmetrie quantistiche	475
11.1.1	Qualche esempio	477
11.1.2	Simmetrie in presenza di regole di superselezione	478
11.1.3	Simmetrie nel senso di Kadison	479
11.1.4	Simmetrie nel senso di Wigner	481
11.1.5	Teoremi di Wigner e di Kadison	483
11.1.6	Azione duale delle simmetrie sulle osservabili	495
11.2	Introduzione ai gruppi di simmetria	500
11.2.1	Rappresentazioni proiettive, unitarie proiettive	500
11.2.2	Unitarietà o antiunitarietà delle rappresentazioni unitarie proiettive	505
11.2.3	Estensioni centrali e gruppo quantistico associato ad un gruppo di simmetria	506
11.2.4	Gruppi di simmetria topologici	509
11.2.5	Rappresentazioni unitarie proiettive fortemente continue	513
11.2.6	Il caso notevole del gruppo topologico \mathbb{R}	516
11.2.7	Richiami sui gruppi ed algebre di Lie	521
11.2.8	Gruppi di simmetria di Lie, teoremi di Bargmann, Gårding, Nelson, FS ³	530
11.2.9	Un esempio: il gruppo di simmetria $SO(3)$ e lo spin	541
11.2.10	Il gruppo di Galileo e le sue rappresentazioni unitarie proiettive	545
11.2.11	La regola di Bargmann di superselezione della massa	553
	Esercizi	555
12	Alcuni argomenti più avanzati di Meccanica Quantistica	561
12.1	La dinamica quantistica e le sue simmetrie	562
12.1.1	Assioma A6 : l'evoluzione temporale	562
12.1.2	Simmetrie dinamiche	565
12.1.3	L'equazione di Schrödinger e gli stati stazionari	568
12.1.4	L'azione del gruppo di Galileo in <i>rappresentazione posizione</i>	575
12.1.5	L'evolutore temporale in assenza di omogeneità temporale e la serie di Dyson	578
12.1.6	Inversione del tempo antiunitaria	582
12.1.7	L'osservabile tempo ed il teorema di Pauli. Un'accenno alle POVM	583
12.2	Relazione tra simmetrie dinamiche e costanti del moto	587
12.2.1	La rappresentazione di Heisenberg e le costanti del moto	587
12.2.2	Un accenno al <i>teorema di Ehrenfest</i> ed ai problemi matematici ad esso connessi	592
12.2.3	Costanti del moto associate a gruppi di Lie di simmetria ed il caso del gruppo di Galileo	595
12.3	Sistemi composti e loro proprietà	600
12.3.1	Assioma A7 : sistemi composti	600

12.3.2	Stati entangled ed il cosiddetto “paradosso EPR”	601
12.3.3	Impossibilità di trasmettere informazione tramite le correlazioni EPR	605
12.3.4	Assioma A8 : sistemi di sottosistemi identici	607
12.3.5	Bosoni e Fermioni	610
	Esercizi	612
A	Relazioni d’ordine, topologia, gruppi	615
A.1	Relazioni d’ordine, insiemi parzialmente ordinati, lemma di Zorn	615
A.2	Richiami di topologia generale elementare	616
A.3	Richiami di teoria dei gruppi	620
B	Elementi di geometria differenziale	623
B.1	Varietà differenziabili, varietà differenziabili prodotto, funzioni differenziabili	623
B.2	Spazio tangente e cotangente. Campi vettoriali covarianti e controvarianti	627
B.3	Differenziali, curve e vettori tangenti	630
B.4	Pushforward e pullback	631
C	Teoria della misura	633
C.1	Misure positive σ -additive	633
C.2	Misura di Lebesgue su \mathbb{R}^n	638
C.3	Misura prodotto	639
C.4	Derivazione sotto il segno di integrale	640
	Bibliografia	643
	Indice analitico	647