

## Appendice B

# Soluzioni e/o suggerimenti per risolvere gli esercizi proposti.

### B.1 Esercizi del Capitolo 1.

#### Esercizi 1.1

1.1.1. *Soluzione.* Nella situazione in esame, per dimostrare che  $\sigma_{\mathcal{J}} : \mathbb{V}^4 \ni p \mapsto (T, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4$  definisce una carta compatibile con la struttura differenziabile di  $\mathbb{V}^4$ , per l'esercizio A.4.5, è sufficiente esibire, nell'intorno di ogni punto di  $\mathbb{V}^4$ , una carta locale della struttura differenziabile di  $\mathbb{V}^4$ , con coordinate locali  $y^1, y^2, y^3, y^4$  tale che la matrice jacobiana della trasformazione  $x^i = x^i(y^1, y^2, y^3, y^4)$  abbia determinante ovunque non nullo. Consideriamo  $p \in \mathbb{V}^4$  e  $\Sigma_t \ni p$ . Dato che  $\Sigma_t$  è sottovarietà embedded di  $\mathbb{V}^4$ , c'è una carta locale  $(U, \phi)$  con  $\mathbb{V}^4 \supset U \ni p$  e  $\phi : q \mapsto (z^0(q), z^1(q), z^2(q), z^3(q))$  e tale che  $U \cap \Sigma_t$  è determinato dalla condizione  $z^0 = 0$ . Infine  $\phi|_{U \cap \Sigma_t} : q \mapsto (z^1(q), z^2(q), z^3(q))$  definisce una carta locale su  $U \cap \Sigma_t$ . In coordinate  $z^i$  la funzione tempo assoluto  $T$  deve soddisfare  $\partial T / \partial z^0 \neq 0$  (in quanto  $\partial T / \partial z^i = 0$  se  $i = 1, 2, 3$  per costruzione e  $T$  è non singolare). Il determinante della matrice jacobiana, valutato in  $p$ , della trasformazione  $T = T(z^1, z^2, z^3)$ ,  $z^i = z^i$  (per  $i = 1, 2, 3$ ), vale proprio  $\partial T / \partial z^0 \neq 0$ . Per il teorema A.2, restringendo il dominio  $U$  attorno a  $p$  ad un più piccolo intorno  $U'$ , la funzione  $(z^0, z^1, z^2, z^3) \mapsto (T(z^1, z^2, z^3), z^1, z^2, z^3)$  è differenziabile biettiva con inversa differenziabile. In definitiva, per ogni  $p \in \mathbb{V}^4$ , c'è una carta locale  $(U', \psi)$  della struttura differenziabile di  $\mathbb{V}^4$ , con  $\mathbb{V}^4 \supset U' \ni p$  e tale che  $\psi : q \mapsto (y^0(q), y^1(q), y^2(q), y^3(q))$  con  $(y^0(q), y^1(q), y^2(q), y^3(q)) = (T(q), z^1(q), z^2(q), z^3(q))$ . Ovviamente  $\Sigma_t \cap U'$  è determinato dalla condizione  $y^0 = t$  e  $y^1, y^2, y^3$  sono coordinate locali su  $\Sigma_t$ . Le coordinate  $x^1, x^2, x^3$  sono coordinate globali su  $\Sigma_t$  compatibili con la sua struttura differenziabile in quanto sono definite tramite  $\Pi_{\mathcal{J}}|_{\Sigma_t} : \Sigma_t \rightarrow E_{\mathcal{J}}^3$  che è un diffeomorfismo essendo un'isometria tra spazi euclidei. La matrice jacobiana della trasformazione  $x^i = x^i(y^1, y^2, y^3)$ , con  $i = 1, 2, 3$ , deve quindi avere determinante  $J$  non nullo. Per computo diretto, si verifica che il determinante della matrice jacobiana della trasformazione  $T = y^0, x^i = x^i(y^1, y^2, y^3)$ , con  $i = 1, 2, 3$ , ha ancora determinante  $J \neq 0$ . Questo è quanto volevamo provare.

**1.1.2. Soluzione.** Fissiamo un evento  $p \in \mathbb{V}^4$  e consideriamone le coordinate secondo  $\sigma_{\mathcal{S}}$  e  $\sigma_{\mathcal{S}'}$ . La prima coordinata  $t(p)$  in  $(t(p), x^1(p), x^2(p), x^3(p))$  corrisponde al valore di  $T(p)$ . Cambiando riferimento,  $t'(p)$  deve coincidere con  $T(p)$  a meno di una costante additiva  $c$  arbitraria nella definizione del tempo assoluto  $T$ . Questo dimostra l'equazione (1.2). Consideriamo poi un evento  $p \in \Sigma_t$ . Le coordinate  $(x'^1(p), x'^2(p), x'^3(p))$  sono connesse alle coordinate  $(x^1(p), x^2(p), x^3(p))$  dalla trasformazione  $\Pi_{\mathcal{S}'} \downarrow_{\Sigma_t} \circ (\Pi_{\mathcal{S}} \downarrow_{\Sigma_t})^{-1}$  che è una isometria in quanto composizione di isometrie (vedi l'esercizio A.3.4) per la definizione 1.3. Possiamo applicare l'esercizio A.3.3 ottenendo proprio (1.2). La differenziabilità delle funzioni  $R^i_j(t)$  e  $c^j(t)$  è conseguenza immediata della condizione (ii) in definizione 1.3 scegliendo opportunamente il punto  $P$  che compare in tale condizione: per esempio, scegliendo  $P \in \mathbb{E}_{\mathcal{S}}^3$  nell'origine delle coordinate cartesiane non primate, segue subito da (1.2) che le funzioni  $c^j(t)$  sono differenziabili, descrivendo nelle coordinate primate la linea di universo di  $P$ .

**1.1.3. Soluzione.** (i) Rappresentiamo lo spaziotempo come  $\mathbb{R}^4$  tramite le coordinate  $t, x^1, x^2, x^3$ . Consideriamo quindi la classe di curve etichettate con le terne di numeri  $(x'^1, x'^2, x'^3) \in \mathbb{R}^3$  e parametrizzate nel parametro  $t' \in \mathbb{R}$  tramite le equazioni:

$$x^j(t') = \sum_{i=1}^3 (R(t' - c)^{-1})^j_i (x^i - c^i(t' - c)), \quad j = 1, 2, 3. \quad (\text{B.1})$$

Si verifica immediatamente che la classe di queste linee di universo soddisfa la definizione di riferimento 1.3 e, per costruzione,  $t', x'^1, x'^2, x'^3$  sono coordinate cartesiane ortonormali solidali con tale riferimento  $\mathcal{S}'$ . Per costruzione (1.2) sono le trasformazioni tra le coordinate cartesiane solidali con  $\mathcal{S}$  e quelle solidali con  $\mathcal{S}'$  definito sopra.

(ii) È evidente che se le trasformazioni (1.2) sono trasformazioni di coordinate interne allo stesso riferimento  $\mathcal{S}$ , essendo  $\Pi_{\mathcal{S}}$  la stessa nei due casi, non può comparire la dipendenza temporale nelle formule (1.2). Se viceversa risulta che le funzioni che appaiono in (1.2) non dipendono dal tempo, ciò significa che le linee di universo dei punti in quiete con (B.1) sono le stesse linee di universo dei punti in quiete con  $\mathcal{S}$  etichettate con le terne  $(x'^1, x'^2, x'^3) \in \mathbb{R}^3$  e con una eventuale scelta diversa per l'origine del tempo, per cui  $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ .

## Esercizi 1.2

**1.2.1. Soluzione.** Per prima cosa esprimiamo i versori delle coordinate polari in funzione di quelli delle coordinate cartesiane e viceversa. Vale

$$\mathbf{e}_r = \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y, \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y, \quad (\text{B.3})$$

con inversa

$$\mathbf{e}_x = \cos \phi \mathbf{e}_r - \sin \phi \mathbf{e}_\phi, \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{e}_y = \sin \phi \mathbf{e}_r + \cos \phi \mathbf{e}_\phi. \quad (\text{B.5})$$

Scelta un'origine  $O$ , avremo che, per definizione di  $\mathbf{e}_r$

$$\mathbf{x}(t) = P(t) - O = x(t) \mathbf{e}_x + y(t) \mathbf{e}_y = r(t) \mathbf{e}_r(t), \quad (\text{B.6})$$

dove abbiamo esplicitato la dipendenza dal tempo di  $\mathbf{e}_r$  tenendo conto che  $r$  e  $\phi$  dipendono dal tempo quando il punto si muove. La derivata temporale di  $P(t) - O$  si deve eseguire tenendo conto di tale dipendenza. Nel seguito indicheremo come di consuetudine (risalente a Newton), la derivata temporale con un punto sopra la variabile derivata. Abbiamo che

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{r}(t) \mathbf{e}_r(t) + r(t) \dot{\mathbf{e}}_r(t). \quad (\text{B.7})$$

Assumendo la dipendenza temporale di  $\mathbf{e}_r$  e  $\mathbf{e}_\phi$  in (B.2)-(B.3) e derivando in  $t$  e quindi usando (B.4)-(B.5), si ottiene

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi, \quad (\text{B.8})$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\phi = -\dot{\phi} \mathbf{e}_r, \quad (\text{B.9})$$

e quindi, per esempio,

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{e}}_r &= \ddot{\phi} \mathbf{e}_\phi - \dot{\phi}^2 \mathbf{e}_r, \\ \ddot{\mathbf{e}}_\phi &= -\dot{\phi}^2 \mathbf{e}_\phi - \ddot{\phi} \mathbf{e}_r. \end{aligned}$$

Inserendo (B.8)-(B.9) in (B.7) si trova

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi.$$

Derivando nel tempo ed usando (B.8)-(B.9), si trova l'espressione per l'accelerazione

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_r + (r \ddot{\phi} + 2\dot{r} \dot{\phi}) \mathbf{e}_\phi.$$

1.2.2. *Soluzione.* Si procede come per l'esercizio precedente. Abbiamo che

$$\mathbf{x}(t) = P(t) - O = x(t) \mathbf{e}_x + y(t) \mathbf{e}_y + z(t) \mathbf{e}_z = r(t) \mathbf{e}_r(t). \quad (\text{B.10})$$

Inoltre

$$\mathbf{e}_r = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z, \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z, \quad (\text{B.12})$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y. \quad (\text{B.13})$$

Si osservi che la terna è ortonormale, per cui dati due versori il terzo si ottiene con il prodotto vettoriale dei primi due facendo attenzione al segno. Al fine invertire la trasformazione di sopra, si vede subito da un disegno che

$$\mathbf{e}_z = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta.$$

Risulta comodo introdurre il versore radiale uscente nel piano  $z = 0$ :

$$n := \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta.$$

Per ricavare  $\mathbf{e}_x$  e  $\mathbf{e}_y$  si procede usando le stesse formule che per le coordinate polari piane e rimpiazzando  $\mathbf{e}_r$  con  $n$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_x &= \cos \phi n - \sin \phi \mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{e}_y &= \sin \phi n + \cos \phi \mathbf{e}_\varphi.\end{aligned}$$

Mettendo tutto insieme otteniamo:

$$\mathbf{e}_x = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_r - \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_\theta - \sin \phi \mathbf{e}_\varphi, \quad (\text{B.14})$$

$$\mathbf{e}_y = \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_r + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_\theta + \cos \phi \mathbf{e}_\varphi, \quad (\text{B.15})$$

$$\mathbf{e}_z = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta. \quad (\text{B.16})$$

Lo stesso risultato si ottiene notando che entrambe le terne sono ortonormali e pertanto sono connesse da una trasformazione ortogonale. Questo significa che la matrice che rappresenta (B.14)-(B.16) è la trasposta della matrice che rappresenta (B.11)-(B.13).

Derivando rispetto a  $t$  le (B.11)-(B.13) e quindi usando (B.14)-(B.16) nel risultato, si ottiene dopo un laborioso calcolo:

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi, \quad (\text{B.17})$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r + \dot{\phi} \cos \theta \mathbf{e}_\varphi, \quad (\text{B.18})$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_r - \dot{\phi} \cos \theta \mathbf{e}_\theta. \quad (\text{B.19})$$

Derivando in  $t$  (B.10) ed usando (B.17) si ottiene infine

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi.$$

Il calcolo dell'accelerazione produce, derivando l'espressione della velocità ed usando (B.17)-(B.19):

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \mathbf{e}_\theta + (r\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta) \mathbf{e}_\varphi.$$

1.2.3. *Traccia di soluzione.* In realtà l'esercizio è essenzialmente già stato risolto come esercizio 1.2.1, visto che l'asse  $z$  non introduce nessuna difficoltà essendo  $\mathbf{e}_z$  indipendente da  $t$  e valendo:

$$\mathbf{x}(t) = P(t) - O = x(t) \mathbf{e}_x + y(t) \mathbf{e}_y + z(t) \mathbf{e}_z = r(t) \mathbf{e}_r(t) + z(t) \mathbf{e}_z.$$

1.2.4. La spiegazione si basa sul fatto che, in coordinate cartesiane ortonormali, la connessione di Levi-Civita ha coefficienti di connessione nulli per cui la (1.11) fornisce automaticamente l'accelerazione. Si conclude che l'accelerazione del punto materiale altro non è che la derivata covariante seconda lungo la traiettoria del moto:

$$\mathbf{a} = \nabla_{\dot{P}} \dot{P}.$$

L'espressione, in coordinate del tutto arbitrarie, dell'identità di sopra è proprio la (1.11). Ovviamente, quindi, il risultato vale non solo in coordinate cilindriche o sferiche, ma in coordinate

curvilinee arbitrarie.

### Esercizi 1.2

1.3.1. *Soluzione.* Prendiamo un sistema di coordinate cartesiane ortonormali in cui  $\Pi$  risulti essere il piano  $z = 0$ . In tal caso le equazioni della curva sono date da, per ipotesi,  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ ,  $z = 0$ . Di conseguenza,  $\mathbf{t}(s) = dx/ds \mathbf{e}_x + dy/ds \mathbf{e}_y$ . Per ipotesi  $\mathbf{n}$  esiste ( $\Gamma$  non è riparametizzabile come un segmento di retta in ogni sottointervallo di  $(a, b)$ ) e, per costruzione,  $\mathbf{n}$  appartiene ancora al piano  $\Pi$  essendo scritto come combinazione lineare di  $\mathbf{e}_x$  e  $\mathbf{e}_y$ . Di conseguenza  $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) = \mathbf{e}_z$  che è perpendicolare a  $\Pi$  ed è costante.

1.3.2. *Soluzione.* Sia  $P = P(s)$  la curva con  $s \in (a, b) \ni c$ . Consideriamo la funzione di  $s$ ,  $f(s) := \mathbf{b} \cdot (P(s) - P(c))$ . Essendo  $\mathbf{b}$  costante in  $s$ , la derivata di essa vale  $f'(s) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{t}(s) = 0$ . Quindi la funzione è costante. In realtà è sempre nulla essendo  $f(c) = 0$ . Concludiamo che  $\mathbf{b} \cdot (P(s) - P(c)) = 0$  per ogni  $s \in (a, b)$ , ma l'insieme  $\{P \in \mathbb{E}^3 \mid \mathbf{b} \cdot (P - P(c)) = 0\}$  è l'equazione del piano passante per  $P(c)$  e normale a  $\mathbf{b} \neq 0$ . Concludiamo che  $\Gamma$  appartiene a tale piano.

1.3.3. *Soluzione.* Prima di tutto notiamo che le ultime identità in ciascuna delle tre equazioni si ottengono subito usando la definizione di vettore di Darboux ed eseguendo i prodotti vettoriali e ricordando che  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  è una base ortonormale destrorsa. Concentriamoci allora sulle prime identità delle tre equazioni. La (1.27) è la definizione di versore  $\mathbf{n}$  e non deve essere provata. Proviamo (1.25). Dato che  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  è una base ortonormale, varrà

$$d\mathbf{n}/ds = (d\mathbf{n}/ds \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} + (d\mathbf{n}/ds \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (d\mathbf{n}/ds \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}.$$

Calcoliamo le componenti separatamente.

$$d\mathbf{n}/ds \cdot \mathbf{t} = d/ds(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}) - \mathbf{n} \cdot d\mathbf{t}/ds = 0 - \rho^{-1}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = -\rho^{-1}.$$

Per la componente su  $\mathbf{n}$  si ha:

$$d\mathbf{n}/ds \cdot \mathbf{n} = (1/2)d/ds \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = (1/2)d/ds 1 = 0.$$

Per la componente su  $\mathbf{b}$  si ha:

$$d\mathbf{n}/ds \cdot \mathbf{b} = d\mathbf{n}/ds \cdot (\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}) =: -\tau^{-1} \text{ per definizione.}$$

Mettendo insieme si ottiene (1.25). Passiamo alla (1.26). Dato che  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  è una base ortonormale, varrà

$$d\mathbf{b}/ds = (d\mathbf{b}/ds \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} + (d\mathbf{b}/ds \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (d\mathbf{b}/ds \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}.$$

Calcoliamo le componenti separatamente.

$$d\mathbf{b}/ds \cdot \mathbf{t} = d/ds(\mathbf{b} \cdot \mathbf{t}) - \mathbf{b} \cdot d\mathbf{t}/ds = 0 - \rho^{-1}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) = 0.$$

Per la componente su  $\mathbf{b}$  si ha:

$$d\mathbf{b}/ds \cdot \mathbf{b} = (1/2)d/ds(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) = (1/2)d/ds 1 = 0.$$

Per la componente su  $\mathbf{n}$  si ha:

$$d\mathbf{b}/ds \cdot \mathbf{n} = 0 - \mathbf{b} \cdot d\mathbf{n}/ds = -\mathbf{b} \cdot (-\mathbf{t}/\rho - \mathbf{b}/\tau) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})/\tau = 1/\tau.$$

Mettendo insieme si ottiene (1.26).

### Esercizi 1.4

1.4.1. *Soluzione.* Esprimiamo i versori della base di  $\mathcal{S}$  in funzione di quelli della base di  $\hat{\mathcal{S}}$ . Per costruzione  $\mathbf{e}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 = \cos \theta$ ,  $\mathbf{e}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = \sin \theta \sin \phi$  e  $\mathbf{e}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = -\sin \theta \cos \psi$ , quindi

$$\mathbf{e}_3 = \sin \theta \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_1 - \sin \theta \cos \psi \hat{\mathbf{e}}_2 + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_3.$$

Passiamo a  $\mathbf{e}_1$ . Prima di tutto decomponiamolo sulla base  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{e}_3, \mathbf{N}'$  dove  $\mathbf{N}' := \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{N}$ . Per costruzione  $\mathbf{e}_1 = \cos \phi \mathbf{N} + \sin \phi \mathbf{N}'$  e pertanto, essendo  $\mathbf{N} = \cos \psi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_2$ , vale

$$\mathbf{e}_1 = \cos \phi (\cos \psi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_2) + \sin \phi \mathbf{e}_3 \wedge (\cos \psi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_2)$$

Ossia:

$$\mathbf{e}_1 = \cos \phi (\cos \psi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_2) + \sin \phi (\sin \theta \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_1 - \sin \theta \cos \psi \hat{\mathbf{e}}_2 + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_3) \wedge (\cos \psi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_2),$$

che, calcolato esplicitamente fornisce:

$$\mathbf{e}_1 = (\cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi \cos \theta) \hat{\mathbf{e}}_1 + (\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \cos \theta \cos \psi) \hat{\mathbf{e}}_2 + \sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_3.$$

L'espressione di  $\mathbf{e}_2$  si ottiene come prodotto vettoriale  $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$  e produce

$$\mathbf{e}_2 = -(\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi \cos \theta) \hat{\mathbf{e}}_1 + (-\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \theta \cos \psi) \hat{\mathbf{e}}_2 + \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_3$$

1.4.2. *Traccia di soluzione.* Dato che le matrici di trasformazione sono ortogonali, è sufficiente prendere la matrice trasposta dalla matrice di trasformazione dell'esercizio precedente.

1.4.3. *Traccia di soluzione.* Usando la legge di decomposizione di  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{\hat{\mathcal{S}}|\mathcal{S}}$ , si ottiene come somma di 3 vettori  $\boldsymbol{\omega}$ . Sia  $\mathcal{S}_2$  il sistema di riferimento con terna solidale data da  $\hat{\mathbf{e}}_3, \mathbf{N}$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_3 \wedge \mathbf{N}$  e  $\mathcal{S}_3$  quello con terna solidale data da  $\mathbf{e}_3, \mathbf{N}$ ,  $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{N}$ . Abbiamo allora che:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}|\hat{\mathcal{S}}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}|\mathcal{S}_3} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}_3|\mathcal{S}_2} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}_2|\hat{\mathcal{S}}},$$

ossia, per definizione di angoli di Eulero:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}|\hat{\mathcal{S}}} = \dot{\phi} \mathbf{e}_3 + \dot{\theta} \mathbf{N} + \dot{\psi} \hat{\mathbf{e}}_3,$$

dove  $\mathbf{N} = \cos \psi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_2$ . Esprimendo i versori  $\hat{\mathbf{e}}_i$  in funzione dei versori  $\mathbf{e}_k$  usando le formule dell'esercizio precedente, si ricava subito la formula finale per  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}|\hat{\mathcal{S}}}$ .

### Esercizi 1.5

1.5.1. *Soluzione.* Fissiamo un riferimento  $\mathcal{I}_D$  in quiete con  $D$  ed un riferimento  $\mathcal{I}_{D'}$  in quiete con  $D'$ . Per costruzione:  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}_D}|_{\mathcal{I}} = \frac{d\Theta}{dt} \mathbf{e}_z$  e  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}_{D'}}|_{\mathcal{I}} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_z$ . Se  $P \in D$  e  $P' \in D'$  sono punti, rispettivamente, solidali con i due dischi abbiamo allora che

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}} = \mathbf{v}_O|_{\mathcal{I}} + \mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}_D} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}_D}|_{\mathcal{I}} \wedge (P - O) = \mathbf{0} + \mathbf{0} + \frac{d\Theta}{dt} \mathbf{e}_z \wedge (P - O).$$

Nello stesso modo si trova:

$$\mathbf{v}_{P'}|_{\mathcal{I}} = \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{I}} + \mathbf{v}_{P'}|_{\mathcal{I}_{D'}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}_{D'}}|_{\mathcal{I}} \wedge (P' - O') = \mathbf{0} + \mathbf{0} + \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_z \wedge (P' - O').$$

La condizione di rotolamento  $\mathbf{v}_Q|_{\mathcal{I}} = \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{I}'}$ , dove  $Q$  è il punto di contatto tra i due dischi, si scrive allora

$$\frac{d\Theta}{dt} \mathbf{e}_z \wedge R \mathbf{e}_x = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_z \wedge (-r) \mathbf{e}_x.$$

In altre parole:

$$R \frac{d\Theta}{dt} \mathbf{e}_y = -r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_y,$$

e quindi

$$R \frac{d\Theta}{dt} = -r \frac{d\theta}{dt}.$$

Questa equazione differenziale può essere integrata in

$$R\Theta(t) = r\theta(t) + c,$$

dove la costante  $c$  si può individuare valutando i due angoli al tempo iniziale (oppure ad un qualsiasi tempo).

1.5.2. *Soluzione.* Fissiamo un riferimento  $\mathcal{I}_D$  in quiete con  $D$  ed un riferimento  $\mathcal{I}_{D'}$  in quiete con  $D'$ . Per costruzione:  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}_D}|_{\mathcal{I}} = \frac{d\Theta}{dt} \mathbf{e}_z$  e  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}_{D'}}|_{\mathcal{I}} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_z$ . Se  $P \in D$  e  $P' \in D'$  sono punti, rispettivamente, solidali con i due dischi abbiamo allora che

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}} = \mathbf{v}_O|_{\mathcal{I}} + \mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}_D} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}_D}|_{\mathcal{I}} \wedge (P - O) = \mathbf{0} + \mathbf{0} + \frac{d\Theta}{dt} \mathbf{e}_z \wedge (P - O).$$

Nello stesso modo si trova:

$$\mathbf{v}_{P'}|_{\mathcal{I}} = \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{I}} + \mathbf{v}_{P'}|_{\mathcal{I}_{D'}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}_{D'}}|_{\mathcal{I}} \wedge (P' - O') = \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_z \wedge (O' - O) + \mathbf{0} + \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_z \wedge (P' - O');$$

ossia

$$\mathbf{v}_{P'}|_{\mathcal{I}} = \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_z \wedge (O' - O) + \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_z \wedge (P' - O').$$

Abbiamo usato il fatto che  $O'$  ruota attorno ad  $O$  nel piano  $z = 0$  ed è individuato dall'angolo polare  $\phi$ . La condizione di rotolamento  $\mathbf{v}_Q|_{\mathcal{I}} = \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{I}'}$ , dove  $Q$  è il punto di contatto tra i due dischi, si scrive allora, se  $\mathbf{e}$  è il versore di  $Q - O$ ,

$$\frac{d\Theta}{dt} \mathbf{e}_z \wedge R \mathbf{e} = \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_z \wedge (R + r) \mathbf{e} - \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_z \wedge r \mathbf{e}.$$

In altre parole:

$$\left( R \frac{d\Theta}{dt} - (R+r) \frac{d\phi}{dt} + r \frac{d\theta}{dt} \right) \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e} = \mathbf{0},$$

e quindi, dato che  $\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ , la relazione di sopra equivale a:

$$R \frac{d\Theta}{dt} - (R+r) \frac{d\phi}{dt} + r \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Questa equazione differenziale può essere integrata in

$$R\Theta(t) - (R+r)\phi(t) + r\theta(t) = c,$$

dove la costante  $c$  si può individuare valutando i tre angoli al tempo iniziale (oppure ad un qualsiasi tempo).

## B.2 Esercizi del Capitolo 2.

### Esercizi 2.1

**2.1.1. Traccia di soluzione.** Comporre le trasformazioni di Galileo associate a  $(c_2, \vec{c}_2, \vec{v}_2, R_2)$  e  $(c_1, \vec{c}_1, \vec{v}_1, R_1)$ , nell'ordine detto, e ricavare gli analoghi coefficienti per la trasformazione di Galileo ottenuta.

**2.1.2. Traccia di soluzione.** Bisogna verificare che la legge di composizione detta sia associativa e che  $(0, \vec{0}, \vec{0}, I)$

$$(c, \vec{c}, \vec{v}, R)^{-1} = (-c, -R^{-1}(\vec{c} + c\vec{v}), -R^{-1}\vec{v}, R^{-1}).$$

siano l'elemento neutro ed inverso rispetto a tale legge di composizione.

**2.1.3. Traccia di soluzione.** Si identifichino i vettori  $(t, \vec{x}) \in \mathbb{R}^4$  con i vettori di  $\mathbb{R}^5$  della forma  $(1, t, \vec{x})$ . Si associ quindi a ciascun elemento  $G := (c, \vec{c}, \vec{v}, R)$  del gruppo di Galileo la matrice

$$\Omega_G := \left[ \begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & \vec{0} \\ \hline c & 1 & \vec{0} \\ \hline \vec{c} & \vec{v} & R \end{array} \right].$$

Si verifichi che l'azione di  $\Omega_G$  sul vettore (pensato come vettore colonna)  $(1, t, \vec{x})$ ,  $\Omega_G$  produca l'azione nota del elemento  $G$  del gruppo di Galileo su  $t$  e  $\vec{x}$ , lasciando immutato il primo numero 1. Si verifichi che la corrispondenza  $G \mapsto \Omega_G$  sia iniettiva. Si verifichi  $\Omega_G$  sia non singolare e che la legge di composizione di elementi  $G, G'$  del gruppo di Galileo corrisponda al prodotto matriciale delle matrici  $\Omega_G, \Omega_{G'}$  rispettivamente associate e che l'elemento neutro del gruppo di Galileo sia associato alla matrice identità.

### Esercizi 2.2

**2.2.1. Soluzione.** Siano  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  assi in quiete con la terra uscenti dal punto  $O$ , sia  $\hat{O}$  solidale con il sedile e si supponga che gli assi solidali con il sedile  $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z$  siano uscenti da  $\hat{O}$ . Gli assi  $\mathbf{e}_z, \hat{\mathbf{e}}_z$  si suppongono entrambi verticali e la ruota si assume trovarsi nel piano  $y = \hat{y} = 0$ . Si osservi che, per costruzione gli assi  $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_z$  rimangono paralleli agli assi  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z$  durante il moto del sedile. Pertanto  $\boldsymbol{\omega}_{\hat{\mathcal{S}}|\mathcal{S}} = 0$ . Tuttavia  $\hat{\mathcal{S}}$  non è inerziale. Supponiamo che sia  $\alpha \neq 0$  la velocità angolare (costante) della ruota, posizionando  $O$  al centro della grande ruota, la trasformazione di coordinate vale (assumiamo  $\hat{t} = t$ ):  $x = R \cos(\alpha t) + \hat{x}, y = \hat{y}, z = R \sin(\alpha t) + \hat{z}$ . Questa trasformazione non appartiene al gruppo di Galileo per cui  $\hat{\mathcal{S}}$  non può essere inerziale se lo è  $\mathcal{S}$ .

### Esercizi 2.3

**2.3.1. Traccia di soluzione.** Il secondo principio della dinamica per il sistema  $P, Q$  si scrive

$$m\mathbf{a}_P = -mg \mathbf{e}_z - \kappa(P - Q) + \phi_P$$

$$m\mathbf{a}_Q = -mg \mathbf{e}_z - \kappa(Q - P) + \phi_Q$$

Parametrizzando  $\Gamma$  con l'ascissa curvilinea, determinando  $P$  con l'ascissa  $s_P$  e  $Q$  con l'ascissa  $s_Q$ , ed usando le formule dell'esempio 1 in esempi 1.1, le equazioni di sopra si riscrivono:

$$m\mathbf{a}_P = -mg \mathbf{e}_z - \kappa \left( \cos \left( \frac{s_P}{\sqrt{2}} \right) - \cos \left( \frac{s_Q}{\sqrt{2}} \right) \right) \mathbf{e}_x - \kappa \left( \sin \left( \frac{s_P}{\sqrt{2}} \right) - \sin \left( \frac{s_Q}{\sqrt{2}} \right) \right) \mathbf{e}_y \\ - \kappa \frac{s_P - s_Q}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_z + \phi_P$$

e

$$m\mathbf{a}_Q = -mg \mathbf{e}_z - \kappa \left( \cos \left( \frac{s_Q}{\sqrt{2}} \right) - \cos \left( \frac{s_P}{\sqrt{2}} \right) \right) \mathbf{e}_x - \kappa \left( \sin \left( \frac{s_Q}{\sqrt{2}} \right) - \sin \left( \frac{s_P}{\sqrt{2}} \right) \right) \mathbf{e}_y \\ - \kappa \frac{s_Q - s_P}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_z + \phi_Q.$$

A questo punto, usando le formule dell'esempio 1 in esempi 1.1, proiettando entrambe le equazioni lungo i vettori tangenti a  $\Gamma$  in  $P$  e  $Q$ , rispettivamente  $\mathbf{t}_P$  e  $\mathbf{t}_Q$ , e tenendo conto di (1.18) si trova il sistema di equazioni pure di movimento ( $\phi_P$  e  $\phi_Q$  sono normali a  $\Gamma$  per ipotesi e quindi non appaiono):

$$m \frac{d^2 s_P}{dt^2} = -\frac{mg}{\sqrt{2}} + \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \sin \left( \frac{s_P}{\sqrt{2}} \right) \left[ \cos \left( \frac{s_P}{\sqrt{2}} \right) - \cos \left( \frac{s_Q}{\sqrt{2}} \right) \right] \\ - \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \cos \left( \frac{s_P}{\sqrt{2}} \right) \left[ \sin \left( \frac{s_P}{\sqrt{2}} \right) - \sin \left( \frac{s_Q}{\sqrt{2}} \right) \right] - \frac{\kappa}{\sqrt{2}} (s_P - s_Q)$$

e

$$m \frac{d^2 s_Q}{dt^2} = -\frac{mg}{\sqrt{2}} + \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \sin \left( \frac{s_Q}{\sqrt{2}} \right) \left[ \cos \left( \frac{s_Q}{\sqrt{2}} \right) - \cos \left( \frac{s_P}{\sqrt{2}} \right) \right]$$

$$-\frac{\kappa}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s_Q}{\sqrt{2}}\right) \left[ \sin\left(\frac{s_Q}{\sqrt{2}}\right) - \sin\left(\frac{s_P}{\sqrt{2}}\right) \right] - \frac{\kappa}{\sqrt{2}}(s_Q - s_P)$$

**2.3.2. Traccia di soluzione.** Si calcoli la derivata temporale del secondo membro di  $E$  e si tenga conto dell'equazione (2.50). Il significato di  $E$  è quello dell'energia meccanica del punto materiale nel riferimento non inerziale  $\mathcal{S}'$ .

### B.3 Esercizi del Capitolo 3.

#### Esercizi 3.1

**3.1.1. Suggestimento.** È sufficiente provare l'asserto per  $k = \pm 1$  e poi iterare la dimostrazione  $k$  volte. Si applichi il teorema di esistenza ed unicità in forma globale usando il fatto che ( $k = 1$ )

$$\left. \frac{d\mathbf{x}'}{dt} \right|_{t=s-T} = \left. \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|_{t=s}$$

e che  $\mathbf{f}$  è periodica in  $t$  di periodo  $T$ .

**3.1.2. Traccia di Soluzione.** Basta usare l'esercizio precedente per  $k = 1$ , notando che la funzione  $\mathbf{f}$ , essendo costante in  $t$  è periodica di qualsiasi periodo  $T$  in tale variabile.

**3.1.3. Soluzione.** Ignoriamo già dal principio il moto nella direzione  $z$ , che è di quiete a causa del vincolo. La reazione vincolare del piano vale quindi  $mg \mathbf{e}_z$ . Il problema si riduce ad un problema bidimensionale con equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= m^{-1}\kappa x, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= m^{-1}\kappa y. \end{aligned}$$

Si tratta di un sistema del secondo ordine in forma normale. Riducendolo al prim'ordine si ha che:

$$\begin{aligned} \frac{d^2v_x}{dt^2} &= m^{-1}\kappa x, \\ \frac{d^2v_y}{dt^2} &= m^{-1}\kappa y, \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= v_x, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= v_y. \end{aligned}$$

(B.20)

È chiaro che il secondo membro è una funzione di classe  $C^1$  e pertanto possiamo applicare i teoremi di esistenza ed unicità. Tornando alla forma del secondo ordine del sistema, notiamo che le due equazioni sono disaccoppiate, per cui le possiamo risolvere separatamente. Pensiamo

dapprima le soluzioni  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  come soluzioni complesse, alla fine ci ridurremo al caso reale. Il polinomio caratteristico di entrambe è:  $\chi^2 - \frac{\kappa}{m} = 0$ . Le soluzioni sono:

$$b_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{\kappa}{m}}, \quad \text{se } \kappa > 0,$$

oppure

$$b_{\pm} = \pm i \sqrt{\frac{-\kappa}{m}}, \quad \text{se } \kappa < 0.$$

Nel caso  $\kappa > 0$ , la legge oraria è dunque del tipo:

$$x(t) = c_1 e^{\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t}, \quad (\text{B.21})$$

$$y(t) = d_1 e^{\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t} + d_2 e^{-\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t}, \quad (\text{B.22})$$

dove  $c_1, c_2, d_1, d_2$  sono costanti arbitrarie in  $\mathbb{R}$ . Esse vengono fissate una volta assegnate condizioni iniziali.

Nel caso  $\kappa < 0$  la discussione è leggermente più complessa. Lavorando in  $\mathbb{C}$ , le soluzioni sarebbero:

$$x(t) = c_1 e^{i\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t} + c_2 e^{-i\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t},$$

$$y(t) = d_1 e^{i\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t} + d_2 e^{-i\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t}.$$

In generale, queste soluzioni non sono accettabili, in quanto  $x$  e  $y$  risultano essere complesse. Ricordiamo le formule di Eulero:  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ . Da ciò si ha che le soluzioni di sopra si possono riscrivere come:

$$x(t) = (c_1 + c_2) \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) + i(c_1 - c_2) \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right), \quad (\text{B.23})$$

$$y(t) = (d_1 + d_2) \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) + i(d_1 - d_2) \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right). \quad (\text{B.24})$$

Tutte le soluzioni reali si ottengono facendo variare le costanti  $(c_1 + c_2), (d_1 + d_2)$  in  $\mathbb{R}$  e le costanti  $(c_1 - c_2), (d_1 - d_2)$  in  $i\mathbb{R}$  (insieme degli immaginari). In definitiva, la soluzione generale ha la forma:

$$x(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) + A_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right), \quad (\text{B.25})$$

$$y(t) = B_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) + B_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right). \quad (\text{B.26})$$

con  $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{R}$ .

Per concludere ricaviamo la legge oraria, nel caso  $\kappa < 0$ , con condizioni iniziali  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  e

$\mathbf{v}(0) = v(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y)$ . La prima condizione, inserita in (B.25)-(B.26), fornisce:  $0 = A_1$  e  $0 = B_1$ . Derivando (B.25)-(B.26), tenendo conto di quanto appena ottenuto, si ha:

$$v_x(0) = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} A_2, \quad (\text{B.27})$$

$$v_y(0) = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} B_2. \quad (\text{B.28})$$

Dovendo essere  $\mathbf{v}(0) = v(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y)$ , ricaviamo che  $v_x(0) = v$  e  $v_y(0) = -v$ , per cui  $A_2 = v\sqrt{\frac{m}{\kappa}}$  e  $B_2 = -v\sqrt{\frac{m}{\kappa}}$ . La legge oraria richiesta è dunque:

$$\mathbf{x}(t) = v\sqrt{\frac{m}{\kappa}} \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) (\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y), \quad \text{per } t \in \mathbb{R}.$$

3.1.4. *Soluzione.* Procedendo come per l'esercizio precedente, si ha il sistema:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= m^{-1}\kappa x - m^{-1}\beta \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= m^{-1}\kappa y + m^{-1}\beta \frac{dx}{dt}. \end{aligned}$$

È chiaro che siamo nelle ipotesi del teorema di esistenza ed unicità. Le equazioni, a differenza dell'esercizio precedente non sono disaccoppiate. Conviene procedere nel modo seguente. Definiamo la variabile complessa  $z = x + iy$  e riscriviamo le equazioni di sopra come:

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{dt^2} &= m^{-1}\kappa z + m^{-1}\beta i \frac{diy}{dt}, \\ \frac{d^2iy}{dt^2} &= m^{-1}\kappa iy + m^{-1}\beta i \frac{dx}{dt}. \end{aligned}$$

Sommando membro a membro otteniamo una sola equazione complessa che contiene entrambe le equazioni reali:

$$\frac{d^2z}{dt^2} - i \frac{\beta}{m} \frac{dz}{dt} - \frac{\kappa}{m} z = 0. \quad (\text{B.29})$$

*Dobbiamo ricordare, alla fine, che le soluzioni in  $x$  e  $y$  si otterranno prendendo la parte reale ed immaginaria della soluzione  $z$ .*

Il polinomio caratteristico è:

$$\chi^2 - i \frac{\beta}{m} \chi - \frac{\kappa}{m} = 0,$$

ed ha soluzioni:

$$b_{\pm} = i \frac{\beta}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}}.$$

Esaminiamo subito il caso di soluzioni coincidenti, cioè  $\frac{4\kappa}{m} = \frac{\beta^2}{m^2}$ . In questo caso, la soluzione generale ha la forma, con  $a, b \in \mathbb{C}$  costanti arbitrarie:

$$z(t) = (a + bt)e^{i \frac{\beta}{2m} t}.$$

Usando la formula di Eulero si ha ancora che:

$$z(t) = (a + bt) \left( \cos\left(\frac{\beta}{2m}t\right) + i \sin\left(\frac{\beta}{2m}t\right) \right).$$

Decomponendo  $a = A + iB$  e  $b = C + iD$  con  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ , e prendendo la parte reale ed immaginaria otteniamo le espressioni per la soluzione generale reale:

$$x(t) = (A + Ct) \cos\left(\frac{\beta}{2m}t\right) - (B + Dt) \sin\left(\frac{\beta}{2m}t\right)$$

e

$$y(t) = (B + Dt) \cos\left(\frac{\beta}{2m}t\right) + (A + Ct) \sin\left(\frac{\beta}{2m}t\right).$$

Nel caso  $\frac{4\kappa}{m} \neq \frac{\beta^2}{m^2}$ , la soluzione generale, in  $\mathbb{C}$ , dell'equazione (B.29) è data quindi da:

$$z(t) = e^{i\frac{\beta}{2m}t} \left( C_+ e^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}}t} + C_- e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}}t} \right),$$

per  $C_{\pm} \in \mathbb{C}$  scelte arbitrariamente. Possiamo scrivere la stessa soluzione come

$$z(t) = \cos\left(\frac{\beta}{2m}t\right) \left( C_+ e^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}}t} + C_- e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}}t} \right) + i \sin\left(\frac{\beta}{2m}t\right) \left( C_+ e^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}}t} + C_- e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}}t} \right).$$

Ci sono due casi da considerare.

(i) *Caso*  $\frac{4\kappa}{m} > \frac{\beta^2}{m^2}$ . In questo caso le funzioni esponenziali scritte sopra sono tutte reali. Decomponendo  $C_+ = a + ib$  e  $C_- = c + id$  in parte reale ed immaginaria, in modo da avere solo costanti reali, si trova immediatamente:

$$x(t) = \cos\left(\frac{\beta}{2m}t\right) \left( a e^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}}t} + c e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}}t} \right) - \sin\left(\frac{\beta}{2m}t\right) \left( b e^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}}t} + d e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}}t} \right),$$

$$y(t) = \cos\left(\frac{\beta}{2m}t\right) \left( b e^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}}t} + d e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}}t} \right) + \sin\left(\frac{\beta}{2m}t\right) \left( a e^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}}t} + c e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}}t} \right),$$

dove le costanti  $a, b, c, d$  sono fissate arbitrariamente in  $\mathbb{R}$ .

(i) *Caso*  $\frac{4\kappa}{m} < \frac{\beta^2}{m^2}$ . In questo caso gli esponenti delle funzioni sono immaginari:

$$z(t) = \cos\left(\frac{\beta}{2m}t\right) \left( C_+ e^{i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4\kappa}{m}}t} + C_- e^{-i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4\kappa}{m}}t} \right) + i \sin\left(\frac{\beta}{2m}t\right) \left( C_+ e^{i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4\kappa}{m}}t} + C_- e^{-i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4\kappa}{m}}t} \right).$$

Usando la formula di Eulero e decomponendo nuovamente  $C_+ = a + ib$  e  $C_- = c + id$  in parte reale ed immaginaria, in modo da avere solo costanti reali, si ottiene infine, prendendo la parte reale di  $z$ , l'espressione esplicita della componente  $x$  della soluzione:

$$x(t) = (a + c) \cos\left(\frac{\beta}{2m}t\right) \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4\kappa}{m}}t\right) + (c - a) \sin\left(\frac{\beta}{2m}t\right) \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4\kappa}{m}}t\right)$$

$$+(-b+d) \cos\left(\frac{\beta}{2m}t\right) \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4\kappa}{m}}t\right) - (b+d) \sin\left(\frac{\beta}{2m}t\right) \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4\kappa}{m}}t\right).$$

Prendendo invece la parte immaginaria di  $z$  si ha:

$$y(t) = (d+b) \cos\left(\frac{\beta}{2m}t\right) \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4\kappa}{m}}t\right) + (d-b) \sin\left(\frac{\beta}{2m}t\right) \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4\kappa}{m}}t\right) \\ + (a-c) \cos\left(\frac{\beta}{2m}t\right) \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4\kappa}{m}}t\right) + (a+c) \sin\left(\frac{\beta}{2m}t\right) \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4\kappa}{m}}t\right).$$

Cambiando nuovamente nome alle costanti reali abbiamo alla fine, nelle costanti reali  $A, B, C, D$ :

$$x(t) = A \cos\left(\frac{\beta}{2m}t\right) \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4\kappa}{m}}t\right) + B \sin\left(\frac{\beta}{2m}t\right) \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4\kappa}{m}}t\right) \\ + C \cos\left(\frac{\beta}{2m}t\right) \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4\kappa}{m}}t\right) + D \sin\left(\frac{\beta}{2m}t\right) \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4\kappa}{m}}t\right),$$

e

$$y(t) = -D \cos\left(\frac{\beta}{2m}t\right) \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4\kappa}{m}}t\right) + C \sin\left(\frac{\beta}{2m}t\right) \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4\kappa}{m}}t\right) \\ - B \cos\left(\frac{\beta}{2m}t\right) \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4\kappa}{m}}t\right) + A \sin\left(\frac{\beta}{2m}t\right) \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4\kappa}{m}}t\right).$$

3.1.5. *Suggerimento.* Procedere come nell'esercizio 3, dato che le due equazioni differenziali per la componente  $x$  e la componente  $y$  risultano disaccoppiate.

## B.4 Esercizi del Capitolo 4.

### Esercizi 4.1

4.1.1. *Soluzione.* Dalla definizione di  $\Gamma_{O|\mathcal{S}}$  ed usando le relazioni (1.66) (per  $O'$  in quiete in  $\mathcal{S}'$ ) si ha:

$$\Gamma_{O|\mathcal{S}}(t) = \Gamma_{O|\mathcal{S}'}(t) + \sum_{k=1}^n m_k (P_k(t) - O(t)) \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}}(t) \wedge (P_k(t) - O'(t))) \\ + \sum_{k=1}^n m_k (P_k(t) - O(t)) \wedge \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{S}}(t).$$

Dato che il punto  $O'$  in quiete con  $\mathcal{S}'$  può essere scelto arbitrariamente, lo scegliamo tale che, all'istante  $t$  coincida con  $O(t)$  (ne dobbiamo scegliere uno diverso ad ogni istante, ma questo non è proibito). In questo modo otteniamo

$$\Gamma_{O|\mathcal{S}}(t) = \Gamma_{O|\mathcal{S}'}(t) + \sum_{k=1}^n m_k (P_k(t) - O(t)) \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}}(t) \wedge (P_k(t) - O(t))).$$

4.1.2. *Soluzione.* Dalla definizione di  $\Gamma_O|_{\mathcal{S}}$ :

$$\Gamma_O|_{\mathcal{S}} = \sum_{k=1}^n m_k (P_k - O') \wedge \mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{S}} + \sum_{k=1}^n m_k (O' - O) \wedge \mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{S}} = \Gamma_{O'}|_{\mathcal{S}} + (O - O') \wedge \mathbf{P}|_{\mathcal{S}},$$

dove, nell'ultimo passaggio abbiamo usato (4.1).

### Esercizi 4.2

4.2.1. *Soluzione.* Lavoriamo in coordinate polari sferiche centrate in  $O$ . Consideriamo una curva regolare chiusa contenuta in  $\Omega$ ,  $\Gamma : r = r(s), \theta = \theta(s), \varphi = \varphi(s)$  con  $s \in [0, 1]$ . In tal caso  $\mathbf{x}(s) = r(s) \mathbf{e}_r(s)$ , per cui:

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{dr}{ds} \mathbf{e}_r(s) + r(s) \frac{d\theta}{ds} \mathbf{e}_\theta(s) + r(s) \sin(\theta(s)) \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{e}_\varphi(s).$$

Tenendo conto che  $\mathbf{e}_r(s)$  è sempre perpendicolare a  $\mathbf{e}_\theta(s)$  e  $\mathbf{e}_\varphi(s)$  per costruzione, si ha immediatamente che, se  $\mathbf{F} = F(r) \mathbf{e}_r$ :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F}(r) \cdot d\mathbf{x} = \int_0^1 F(r(s)) \mathbf{e}_r \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} ds = \int_0^1 F(r(s)) \frac{dr}{ds} ds = \int_{r(0)}^{r(1)} \mathbf{F}(r) dr = 0,$$

dato che, per ipotesi,  $r(0) = r(1)$ . L'arbitrarietà della curva chiusa  $\Gamma$  ed (a) del teorema 4.4 implicano che  $\mathbf{F}$  è conservativa.

4.2.2. *Soluzione.* Per prima cosa notiamo che il momento angolare  $\Gamma_O|_{\mathcal{S}} = (P - O) \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}}$  soddisfa, sul moto:  $d\Gamma_O|_{\mathcal{S}}/dt = (P - O) \wedge \mathbf{F} = \mathbf{0}$ , dato che  $\mathbf{F}$  è parallela a  $P - O$  per ipotesi. Quindi il momento angolare si conserva nel tempo. Se  $\Gamma_O|_{\mathcal{S}} = 0$  significa che, in coordinate cartesiane solidali con  $\mathcal{S}$  e centrate in  $O$ ,  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ , deve essere

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \lambda(t) \mathbf{x}(t),$$

dove  $\lambda(t)$  è una funzione continua, e quindi integrabile, eccetto al più per i tempi in cui  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$ . Passando in componenti, quest'equazione differenziale si integra immediatamente producendo:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\int_0^t \lambda(\tau) d\tau} \mathbf{x}(0).$$

Il moto avviene dunque lungo una direzione fissata inizialmente e quindi in un piano, che è sicuramente perpendicolare al momento angolare essendo quest'ultimo il vettore nullo. Nel caso  $\Gamma_O|_{\mathcal{S}} \neq 0$ , la condizione:

$$\Gamma_O|_{\mathcal{S}} = (P(t) - O) \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}}(t)$$

dice, in particolare, che  $P(t) - O$  è sempre perpendicolare al vettore costante non nullo  $\Gamma_O|_{\mathcal{S}}$  e quindi  $P(t)$  appartiene al piano passante per  $O$  e perpendicolare a tale vettore.

### Esercizi 4.3

4.3.1. *Soluzione.* (i) Nel riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , il secondo principio della dinamica si scrive:

$$m\mathbf{a}_P|_{\mathcal{I}} = -mg \mathbf{e}_z - k(P - H) + \boldsymbol{\phi}.$$

Esprimendo l'accelerazione  $\mathbf{a}_P|_{\mathcal{I}}$  in funzione di  $\mathbf{a}_P|_{\mathcal{I}'}$  tramite le (1.68), tenendo conto che la velocità angolare è costante, otteniamo che il secondo principio della dinamica, nel riferimento  $\mathcal{I}'$ , si scrive:

$$m\mathbf{a}_P|_{\mathcal{I}'} + 2m\omega \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}'} + m\omega^2 \mathbf{e}_z \wedge (\mathbf{e}_z \wedge (P - O)) = -mg \mathbf{e}_z - k(P - H) + \boldsymbol{\phi},$$

ossia:

$$m\mathbf{a}_P|_{\mathcal{I}'} = -2m\omega \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}'} - m\omega^2 \mathbf{e}_z \wedge (\mathbf{e}_z \wedge (P - O)) - mg \mathbf{e}_z - k(P - H) + \boldsymbol{\phi}.$$

Poniamo  $\mathbf{x} := P - O = x\mathbf{e}_x$ . In tal caso:  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}'} = \dot{x}\mathbf{e}_x$ , dove il punto indica la derivata temporale, e  $P - H = x\mathbf{e}_x - h\mathbf{e}_z$ . Tenendo infine conto che il vincolo è liscio, per cui  $\boldsymbol{\phi} = \phi^y \mathbf{e}_y + \phi^z \mathbf{e}_z$ , l'equazione di sopra si riscrive come:

$$m\ddot{x}\mathbf{e}_x = (m\omega^2 - \kappa)x\mathbf{e}_x + (\phi^y - 2m\omega\dot{x})\mathbf{e}_y + (\kappa h + \phi^z - mg)\mathbf{e}_z, \quad (\text{B.30})$$

da cui ricaviamo: l'equazione pura di movimento

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\omega^2 - \frac{\kappa}{m}\right)x, \quad (\text{B.31})$$

e due equazioni che determinano la reazione vincolare una volta noto il moto

$$\phi^y(t) = 2m\omega \frac{dx}{dt}, \quad (\text{B.32})$$

$$\phi^z = mg - \kappa h. \quad (\text{B.33})$$

La forma della soluzione generale dell'equazione lineare e omogenea a coefficienti costanti (B.31), dipende dal valore del rapporto  $m\omega^2/\kappa$ . Abbiamo 3 casi.

(1)  $m\omega^2/\kappa < 1$ . In tal caso le soluzioni del polinomio caratteristico sono immaginarie pure e pertanto:

$$x(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m} - \omega^2} t\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m} - \omega^2} t\right),$$

con  $A, B \in \mathbb{R}$  costanti arbitrarie.

(2)  $m\omega^2/\kappa = 1$ . In tal caso le soluzioni del polinomio caratteristico sono coincidenti e valgono 0. Pertanto:

$$x(t) = Ae^{0t} + Bte^{0t} = A + Bt,$$

con  $A, B \in \mathbb{R}$  costanti arbitrarie.

(3)  $m\omega^2/\kappa > 1$ . In tal caso le soluzioni del polinomio caratteristico sono reali e pertanto:

$$x(t) = A \exp\left(\sqrt{\omega^2 - \frac{\kappa}{m}} t\right) + B \exp\left(-\sqrt{\omega^2 - \frac{\kappa}{m}} t\right),$$

con  $A, B \in \mathbb{R}$  costanti arbitrarie.

(ii) Consideriamo il caso (1). La condizione iniziale  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}'}(0) = \mathbf{0}$  fornisce immediatamente  $A = 0$ . Imponendo  $P(0) - O = x_0 \mathbf{e}_x$  con  $x_0 > 0$  si trova allora che:  $B = x_0$ . Pertanto, il moto con queste condizioni iniziali è

$$x(t) = x_0 \cos \left( \sqrt{\frac{\kappa}{m} - \omega^2} t \right), \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

La reazione vincolare al variare del tempo, usando (B.32)-(B.33), risulta essere

$$\phi = -2m\omega x_0 \sqrt{\frac{\kappa}{m} - \omega^2} \sin \left( \sqrt{\frac{\kappa}{m} - \omega^2} t \right) \mathbf{e}_y + (mg - \kappa h) \mathbf{e}_z.$$

(iii) e (iv) La seconda equazione cardinale fornisce nel caso in esame

$$\frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{S}} [(P(t) - O) \wedge m\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}}(t)] = (P(t) - O) \wedge (-mg \mathbf{e}_z - \kappa(P(t) - H) + \phi(t)),$$

cioè

$$\frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{S}} [(P(t) - O) \wedge m\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}}(t)] = x(t)\mathbf{e}_x(t) \wedge (-mg \mathbf{e}_z - \kappa x(t) \mathbf{e}_x(t) + h\kappa \mathbf{e}_z + \phi^y(t) \mathbf{e}_y(t) + \phi^z \mathbf{e}_z).$$

La componente del secondo membro lungo l'asse  $z$  è, usando (B.32):

$$x(t)\phi^y(t) = 2m\omega x(t) \frac{dx}{dt} = m\omega \frac{d}{dt} x(t)^2.$$

Concludiamo che il momento angolare l'ungo l'asse  $z$  non si conserva eccetto nel caso in cui il moto non soddisfi  $x(t)^2 = c$  con  $c$  costante, per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , cioè  $x(t) = \pm c$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Questo significa, dato che i moti sono funzioni continue, che gli unici moti ammissibili sono  $x(t) = x_0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

Nel caso (1):  $m\omega^2/\kappa < 1$ , questo è possibile solo se  $A = B = 0$ . Pertanto deve essere in tal caso  $x(0) = 0$  e  $dx/dt(0) = 0$ .

Nel caso (2):  $m\omega^2/\kappa = 1$ , questo è possibile solo se  $A = 0$ . Pertanto deve essere in tal caso  $x(0) = x_0$  arbitrario e  $dx/dt(0) = 0$ .

Nel caso (3):  $m\omega^2/\kappa > 1$ , questo è possibile solo se  $A = B = 0$ . Pertanto deve essere in tal caso  $x(0) = 0$  e  $dx/dt(0) = 0$ .

4.3.2. *Soluzione.* (i) Consideriamo in teorema delle forze vive nel riferimento  $\mathcal{S}'$ . Esso si esprime come

$$\frac{d\mathcal{T}|_{\mathcal{S}'}}{dt} = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}'} \cdot \mathbf{F},$$

dove  $\mathbf{F}$  include tutte le forze vere e inerziali che sono viste agire su  $P$  nel riferimento  $\mathcal{S}'$   $\mathbf{F}$  è quindi pari al secondo membro di (B.30). In termini espliciti si ottiene:

$$\frac{d\mathcal{T}|_{\mathcal{S}'}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{e}_x \cdot ((m\omega^2 - \kappa)x \mathbf{e}_x + (\phi^y - 2m\omega\dot{x}) \mathbf{e}_y + (\kappa h + \phi^z - mg) \mathbf{e}_z).$$

Notare che, in particolare, la forza di Coriolis ( $2m\omega\dot{x}\mathbf{e}_y$ ) e la reazione vincolare non dissipano potenza, dando contributo nullo al secondo membro dell'equazione di bilancio scritta sopra. In definitiva si ha:

$$\frac{d\mathcal{T}|_{\mathcal{S}'}}{dt} = (m\omega^2 - \kappa)\frac{dx(t)}{dt}x(t).$$

che può scriversi come:

$$\frac{d\mathcal{T}|_{\mathcal{S}'}}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\kappa\frac{x^2}{2} - m\omega^2\frac{x^2}{2}\right).$$

In definitiva, sui moti è conservata la quantità :

$$\mathcal{E}|_{\mathcal{S}'} := \mathcal{T}|_{\mathcal{S}'} + \kappa\frac{x^2}{2} - m\omega^2\frac{x^2}{2}.$$

Il secondo addendo a secondo membro è l'ordinaria energia potenziale della molla, mentre l'ultimo termine è un'energia potenziale attribuibile alla forza centrifuga, infatti:

$$-\nabla\left(-m\omega^2\frac{x^2}{2}\right) = (m\omega^2)x\mathbf{e}_x = -m\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|_{\mathcal{S}}}\wedge(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|_{\mathcal{S}}}\wedge(P(t) - O))$$

è proprio la forza centrifuga che appare in  $\mathcal{S}'$ .

(ii) Esaminiamo la situazione energetica nel riferimento  $\mathcal{S}$ . Nel riferimento  $\mathcal{S}$  agiscono la forza della molla, la reazione vincolare e la forza di gravità. Le forze conservative sono quelle della molla e quella di gravità. L'energia potenziale gravitazionale  $mgz$  è però costante a causa del vincolo a cui è sottoposto il punto materiale. In definitiva, il teorema di bilancio dell'energia meccanica, definita come  $\mathcal{E}|_{\mathcal{S}} = (1/2)m\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}} + (1/2)\kappa(P - H)^2 + mgz$ , dice che deve essere:

$$\frac{d\mathcal{E}|_{\mathcal{S}}}{dt} = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}} \cdot (\phi^y\mathbf{e}_y(t) + \phi^z\mathbf{e}_z),$$

dove  $\phi^y(t) = 2m\omega\dot{x}(t)$  per la (B.32), mentre  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}} \cdot \phi^z\mathbf{e}_z = 0$  dato che il moto avviene nel piano  $z = 0$ . Sappiamo anche che:

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}} = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|_{\mathcal{S}}}\wedge(P(t) - O) = \dot{x}(t)\mathbf{e}_x(t) + \omega\mathbf{e}_z\wedge x(t)\mathbf{e}_x(t) = \dot{x}(t)\mathbf{e}_x(t) + \omega x(t)\mathbf{e}_y(t).$$

In definitiva:

$$\frac{d\mathcal{E}|_{\mathcal{S}}}{dt} = (\dot{x}(t)\mathbf{e}_x(t) + \omega x(t)\mathbf{e}_y(t)) \cdot 2m\omega\dot{x}(t)\mathbf{e}_y(t) = m\omega^2\frac{dx(t)^2}{dt}.$$

Otteniamo la stessa situazione già discussa nel precedente esercizio:  $\mathcal{E}|_{\mathcal{S}}$  si conserva solo sui moti che soddisfano  $x(t) = \text{costante}$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Le condizioni iniziali che forniscono tali moti sono state studiate nel precedente esercizio.

**4.3.3. Soluzione.** Lavoriamo in coordinate cilindriche  $r, \varphi, z$  adattate alla superficie cilindrica in modo ovvio. Ricordiamo che allora

$$P - O = z(P)\mathbf{e}_z + R\mathbf{e}_r(P), \quad \mathbf{v}_P = \dot{z}(P)\mathbf{e}_z + R\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi(P),$$

$$\mathbf{a}_P = -R\dot{\varphi}^2(P) \mathbf{e}_r(P) + R\ddot{\varphi}(P) \mathbf{e}_\varphi(P) + \ddot{z} \mathbf{e}_z$$

Il secondo principio della dinamica, per il punto  $P$ , è scritto come:

$$-MR\dot{\varphi}^2(P) \mathbf{e}_r(P) + MR\ddot{\varphi}(P) \mathbf{e}_\varphi(P) + M\ddot{z} \mathbf{e}_z = -Mg \mathbf{e}_z - \kappa(P-Q) - \gamma(P-O) + \phi^r(P) \mathbf{e}_r(P),$$

che possiamo riscrivere

$$-MR\dot{\varphi}^2(P) \mathbf{e}_r(P) + MR\ddot{\varphi}(P) \mathbf{e}_\varphi(P) + M\ddot{z}(P) \mathbf{e}_z = -Mg \mathbf{e}_z - (\kappa + \gamma)(P-O) + \kappa(Q-O) + \phi^r(P) \mathbf{e}_r(P). \quad (\text{B.34})$$

Per il punto  $Q$  avremo similmente:

$$-mR\dot{\varphi}^2(Q) \mathbf{e}_r(Q) + mR\ddot{\varphi}(Q) \mathbf{e}_\varphi(Q) + m\ddot{z}(Q) \mathbf{e}_z = -mg \mathbf{e}_z - (\kappa + \gamma)(Q-O) + \kappa(P-O) + \phi^r(Q) \mathbf{e}_r(Q). \quad (\text{B.35})$$

Per aver tutto nella base associata alle coordinate cilindriche, teniamo conto che vale:

$$\mathbf{e}_x = \cos \varphi \mathbf{e}_r - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_y = \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi.$$

Pertanto banalmente  $P-O = z(P) \mathbf{e}_z + R \mathbf{e}_r(P)$ , mentre

$$Q-O = z(Q) \mathbf{e}_z + R \mathbf{e}_r(Q) = z(Q) \mathbf{e}_z + R \cos \varphi(Q) \mathbf{e}_x + R \sin \varphi(Q) \mathbf{e}_y =$$

$$z(Q) \mathbf{e}_z + R \cos \varphi(Q) (\cos \varphi(P) \mathbf{e}_r(P) - \sin \varphi(P) \mathbf{e}_\varphi(P)) + R \sin \varphi(Q) (\sin \varphi(P) \mathbf{e}_r(P) + \cos \varphi(P) \mathbf{e}_\varphi(P)).$$

Cioé :

$$Q-O = z(Q) \mathbf{e}_z + R(\cos \varphi(Q) \cos \varphi(P) + \sin \varphi(Q) \sin \varphi(P)) \mathbf{e}_r(P) \\ + R(\sin \varphi(Q) \cos \varphi(P) - \cos \varphi(Q) \sin \varphi(P)) \mathbf{e}_\varphi(P),$$

ossia:

$$Q-O = z(Q) \mathbf{e}_z + R \cos(\varphi(Q) - \varphi(P)) \mathbf{e}_r(P) + R \sin(\varphi(Q) - \varphi(P)) \mathbf{e}_\varphi(P)$$

Inserendo in (B.34), raccogliendo i singoli fattori dei tre versori  $\mathbf{e}_r(P)$ ,  $\mathbf{e}_\varphi(P)$ ,  $\mathbf{e}_z$  otteniamo le 3 equazioni, cambiando leggermente le notazioni:

$$MR\ddot{\varphi}_P = \kappa R \sin(\varphi_Q - \varphi_P), \quad (\text{B.36})$$

$$M\ddot{z}_P = -Mg - (\kappa + \gamma)z_P + \kappa z_Q, \quad (\text{B.37})$$

$$MR\dot{\varphi}_P^2 = (\gamma + \kappa)R - \kappa R \cos(\varphi_Q - \varphi_P) - \phi_P^r. \quad (\text{B.38})$$

Nello stesso modo, si ottengono (B.35) le equazioni per  $Q$ :

$$mR\ddot{\varphi}_Q = -\kappa R \sin(\varphi_Q - \varphi_P), \quad (\text{B.39})$$

$$m\ddot{z}_Q = -Mg - (\kappa + \gamma)z_Q + \kappa z_P, \quad (\text{B.40})$$

$$mR\dot{\varphi}_Q^2 = (\gamma + \kappa)R - \kappa R \cos(\varphi_Q - \varphi_P) - \phi_Q^r. \quad (\text{B.41})$$

Abbiamo allora il sistema delle equazioni pure di movimento

$$\ddot{\varphi}_P = \frac{\kappa}{M} \sin(\varphi_Q - \varphi_P), \quad (\text{B.42})$$

$$\ddot{\varphi}_Q = -\frac{\kappa}{m} \sin(\varphi_Q - \varphi_P), \quad (\text{B.43})$$

$$\ddot{z}_P = -g - \frac{(\kappa + \gamma)}{M} z_P + \frac{\kappa}{M} z_Q, \quad (\text{B.44})$$

$$\ddot{z}_Q = -g - \frac{(\kappa + \gamma)}{m} z_Q + \frac{\kappa}{m} z_P, \quad (\text{B.45})$$

e le equazioni che determinano le reazioni vincolari su ogni moto:

$$\phi_P^r = (\gamma + \kappa)R - \kappa R \cos(\varphi_Q - \varphi_P) - MR\dot{\varphi}_P^2. \quad (\text{B.46})$$

$$\phi_Q^r = (\gamma + \kappa)R - \kappa R \cos(\varphi_Q - \varphi_P) - mR\dot{\varphi}_Q^2. \quad (\text{B.47})$$

Quindi se a  $t = 0$ ,  $\varphi_P = 0$ ,  $\varphi_Q = \pi/2$  e  $\dot{\varphi}_P = \dot{\varphi}_Q = 0$ , indipendentemente dai valori di  $z_P$  e  $z_Q$  le reazioni vincolari valgono  $\phi_P = (\gamma + \kappa)R \mathbf{e}_x$  e  $\phi_Q = (\gamma + \kappa)R \mathbf{e}_y$ .

Per concludere proviamo che la quantità  $M\dot{\varphi}_P + m\dot{\varphi}_Q$  si conserva sui moti. La prova si può ottenere direttamente dalle equazioni (B.42) e (B.43), moltiplicando ambo i membri delle prime equazioni per  $M$ , quelli della seconda per  $m$  e sommando membro a membro le identità ottenute in tal modo. In tal caso si ricava che  $M\dot{\varphi}_P + m\dot{\varphi}_Q$  ha derivata temporale nulla sulle soluzioni delle equazioni del moto, ed è pertanto una costante del moto. Una via alternativa è quella di notare che  $MR\dot{\varphi}_P + mR\dot{\varphi}_Q$  altro non è che la componente lungo l'asse  $z$  del momento angolare totale del sistema rispetto al polo  $O$  e che, d'altra parte, il momento totale delle forze esterne applicate sul sistema non ha componenti lungo l'asse  $z$ . Di conseguenza, la seconda equazione cardinale assicura la conservazione di  $R(M\dot{\varphi}_P + m\dot{\varphi}_Q)$ .

## B.5 Esercizi del Capitolo 6.

### Esercizi 6.1

6.1.1. *Soluzione.* Le equazioni differenziali che determinano il moto sono

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{2\kappa}{m}x^2, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{2\kappa}{m}y^2, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{4\kappa}{m}z^3. \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

Consideriamo la soluzione massimale con condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = (0, 0, z_0)$  e  $\mathbf{v}(0) = (0, 0, 0)$  dove  $z_0 > 0$ . Sappiamo che tale soluzione esiste ed è unica in quanto ricadiamo nelle ipotesi del teorema di esistenza ed unicità. Le prime due equazioni scritte sopra ammettono come unica soluzione, rispettivamente,  $x(t) = 0$  e  $y(t) = 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . La (B.48) non è integrabile

in forma esplicita. Tuttavia si possono ottenere informazioni, sufficienti per dimostrare quanto voluto, usando un opportuno integrale primo. Moltiplicando per  $dz/dt$  ambo membri di (B.48) e raccogliendo a primo membro, con qualche banale passaggio si ottiene:

$$\frac{d}{dz} \left[ \left( \frac{dz(t)}{dt} \right)^2 - 2 \frac{\kappa}{m} z(t)^4 \right] = 0.$$

Di conseguenza

$$2 \frac{\kappa}{m} z_0^4 = \left( \frac{dz(t)}{dt} \right)^2 - 2 \frac{\kappa}{m} z(t)^4$$

da cui:

$$\frac{dz(t)}{dt} = \pm \sqrt{2 \frac{\kappa}{m} [z(t)^4 - z_0^4]}.$$

Quest'equazione può essere integrata<sup>1</sup> in:

$$t(z) = \pm \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\sqrt{2 \frac{\kappa}{m} [\zeta^4 - z_0^4]}}. \quad (\text{B.49})$$

Fissato il segno, dato che l'integrando è strettamente positivo, la funzione può essere invertita ottenendo due funzioni monotone:  $z = z_{\pm}(t)$ .  $z_+$  è definita per  $t \geq 0$ , mentre  $z_-$  è definita per  $t < 0$  e  $z$  corre, in entrambi i casi, in  $[z_0, +\infty)$ . La soluzione massimale, che sappiamo esistere ed essere unica, deve coincidere, a tratti, con le funzioni  $z_{\pm}$ . Essa dunque è definita come:  $z := z_-(t)$  se  $t < 0$  e  $z = z_+(t)$  se  $t \geq 0$ . Non è completa in quanto l'integrale a secondo membro in (B.49) converge a qualche valore  $\omega \in \mathbb{R}$  per  $z \rightarrow +\infty$ , e qualche valore  $\alpha \in \mathbb{R}$  per  $z \rightarrow -\infty$ . Questo è dovuto al fatto che, per  $z \rightarrow \pm\infty$ :

$$\frac{1}{\sqrt{z^4 - z_0^4}} = O(z^{-2}).$$

Consideriamo una palla aperta  $B_{\epsilon}$  in  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  centrata nell'origine,  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , e di raggio  $\epsilon > 0$ . Non è possibile trovare alcun intorno aperto  $U$  dell'origine di  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  tale che, tutte le condizioni iniziali  $V$  producano soluzioni massimali con orbite contenute in  $B_{\epsilon}$ . Possiamo infatti scegliere come condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = (0, 0, z_0)$  e  $\mathbf{v}(0) = (0, 0, 0)$  dove  $z_0 > 0$  è sufficientemente piccolo da ricadere in  $V$ . La soluzione massimale associata fuoriesce da  $B_{\epsilon}$  in un tempo finito, dato che la componente  $z(t)$  della soluzione è crescente e ammette limite  $+\infty$  per  $t \rightarrow \omega$ . La stessa cosa accade considerando l'andamento a  $t \rightarrow \alpha$ :  $z(t) \rightarrow -\infty$ . Concludiamo che la configurazione di equilibrio data dall'origine di  $\mathbb{R}^3$  non è stabile nel passato e nel futuro.

---

<sup>1</sup>Si osservi che l'integrale converge per  $z \rightarrow z_0$  in quanto:

$$\frac{1}{\sqrt{z^4 - z_0^4}} = \frac{1}{\sqrt{z - z_0} \sqrt{(z - z_0)(z^2 + z_0^2)}}$$

e la singolarità è dovuta solo al primo fattore al secondo membro che è integrabile.

## B.6 Esercizi del Capitolo 7.

### Esercizi 7.1

7.1.1. *Soluzione.* Notiamo preventivamente che il sistema  $\mathcal{S}$  è inerziale per cui dobbiamo considerare solo forze vere, inoltre i vincoli sono olonomi ed ideali: possiamo applicare il formalismo lagrangiano.

(a). Usando le coordinate libere  $\phi_P$  e  $\phi_Q$ , le posizioni dei punti  $P$  e  $Q$  sono determinate, nel riferimento  $\mathcal{S}$ , dai vettori posizione:

$$\mathbf{x}_P = R \cos \phi_P \mathbf{e}_x + R \sin \phi_P \mathbf{e}_y + R \phi_P \mathbf{e}_z, \quad (\text{B.50})$$

$$\mathbf{x}_Q = R \cos \phi_Q \mathbf{e}_x + R \sin \phi_Q \mathbf{e}_y + R \phi_Q \mathbf{e}_z. \quad (\text{B.51})$$

Da cui ricaviamo le velocità (rispetto a  $\mathcal{S}$ ):

$$\mathbf{v}_P = \dot{\phi}_P (-R \sin \phi_P \mathbf{e}_x + R \cos \phi_P \mathbf{e}_y + R \mathbf{e}_z), \quad (\text{B.52})$$

$$\mathbf{v}_Q = \dot{\phi}_Q (-R \sin \phi_Q \mathbf{e}_x + R \cos \phi_Q \mathbf{e}_y + R \mathbf{e}_z). \quad (\text{B.53})$$

Dalle due ultime formule possiamo scrivere l'energia cinetica  $\mathcal{T} = \frac{m}{2} \mathbf{v}_P^2 + \frac{m}{2} \mathbf{v}_Q^2$  riferita a  $\mathcal{S}$ , in funzione delle coordinate libere  $\phi_P, \phi_Q$  e delle associate coordinate puntate  $\dot{\phi}_P, \dot{\phi}_Q$ :

$$\mathcal{T} = \frac{mR^2}{2} \dot{\phi}_P^2 (\sin^2 \phi_P + \cos^2 \phi_P + 1) + \frac{mR^2}{2} \dot{\phi}_Q^2 (\sin^2 \phi_Q + \cos^2 \phi_Q + 1).$$

Con ovvie semplificazioni si trova:

$$\mathcal{T} = mR^2 (\dot{\phi}_P^2 + \dot{\phi}_Q^2).$$

Consideriamo inizialmente il caso  $\gamma = 0$ . In questo caso tutte le forze attive sono conservative e di conseguenza il sistema ammette lagrangiana,  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}} = \mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ , dove  $\mathcal{U} = \mathcal{U}|_{\mathcal{S}}$  è la somma delle energie potenziale di ogni forza conservativa agente sul sistema. In pratica abbiamo un contributo a  $\mathcal{U}$  dovuto all'energia potenziale gravitazionale:

$$mgz_P + mgz_Q = mgR(\phi_P + \phi_Q)$$

ed un contributo dovuto all'energia potenziale della molla tra  $P$  e  $Q$ :

$$\frac{\kappa}{2} (P - Q)^2 = \frac{\kappa R^2}{2} [(\cos \phi_P - \cos \phi_Q) \mathbf{e}_x + (\sin \phi_P - \sin \phi_Q) \mathbf{e}_y + (\phi_P - \phi_Q) \mathbf{e}_z]^2.$$

Quest'ultimo contributo, eseguendo i quadrati, si semplifica in:

$$\frac{\kappa R^2}{2} [2(1 - \cos \phi_P \cos \phi_Q - \sin \phi_P \sin \phi_Q) + (\phi_P - \phi_Q)^2] = \frac{\kappa R^2}{2} [2(1 - \cos(\phi_P - \phi_Q)) + (\phi_P - \phi_Q)^2].$$

In definitiva:

$$\mathcal{U} = mgR(\phi_P + \phi_Q) + \kappa R^2 \left[ 1 - \cos(\phi_P - \phi_Q) + \frac{(\phi_P - \phi_Q)^2}{2} \right].$$

La lagrangiana del sistema, nel caso  $\gamma = 0$ , è data dunque da:

$$\mathcal{L} = mR^2 (\dot{\phi}_P^2 + \dot{\phi}_Q^2) - mgR(\phi_P + \phi_Q) - \kappa R^2 \left[ 1 - \cos(\phi_P - \phi_Q) + \frac{(\phi_P - \phi_Q)^2}{2} \right]. \quad (\text{B.54})$$

Nel caso  $\gamma = 0$ , la parte non banale del sistema di equazioni differenziali di E-L prende la forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} = 0, \quad \text{dove } q^1 = \phi_P \text{ e } q^2 = \phi_Q.$$

La parte banale del sistema di equazioni è, ovviamente, quella che sancisce che, sul moto, le variabili puntate sono le derivate temporali di quelle non puntate. Nel caso in esame si trova allora il sistema in forma definitiva (del secondo ordine):

$$2mR^2 \frac{d^2 \phi_P}{dt^2} = -mgR - \kappa R^2 [\sin(\phi_P - \phi_Q) + (\phi_P - \phi_Q)], \quad (\text{B.55})$$

$$2mR^2 \frac{d^2 \phi_Q}{dt^2} = -mgR + \kappa R^2 [\sin(\phi_P - \phi_Q) + (\phi_P - \phi_Q)]. \quad (\text{B.56})$$

Passiamo al caso in cui sia presente la forza viscosa agente sul solo punto  $P$ . Tale forza non ammette potenziale non essendo posizionale e quindi nemmeno conservativa. Pertanto dobbiamo usare la formulazione delle equazioni di E-L in cui appaiono esplicitamente le componenti lagrangiane delle forze attive:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q^k} = \mathcal{Q}_k, \quad \text{dove } q^1 = \phi_P \text{ e } q^2 = \phi_Q.$$

Tuttavia, tra le forze agenti sui due punti, solo la forza viscosa non ammette potenziale, per cui possiamo semplificare le equazioni di sopra come, usando la stessa lagrangiana di prima:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} = \mathcal{Q}_k^{(visc)}, \quad \text{dove } q^1 = \phi_P \text{ e } q^2 = \phi_Q, \quad (\text{B.57})$$

dove  $\mathcal{Q}_k^{(visc)}$  sono le componenti lagrangiane della sola forza viscosa. Le forze conservative sono state inglobate a primo membro nel termine  $-\mathcal{U}$  presente nella lagrangiana  $\mathcal{L}$ . Nelle nostre ipotesi abbiamo che

$$\mathcal{Q}_k^{(visc)} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} \cdot \mathbf{F}_i^{(visc)} = \frac{\partial \mathbf{x}_R}{\partial q^k} \cdot (-\gamma \mathbf{v}_P).$$

In definitiva usando (B.50) e (B.50), otteniamo che nel calcolo delle componenti lagrangiane della forza viscosa, solo la componente con  $k = 1$  (cioè relativa a  $\phi_P$ ) è non nulla. Essa è data da:

$$\mathcal{Q}_1^{(visc)} = -\gamma \left[ \frac{\partial}{\partial \phi_P} (R \cos \phi_P \mathbf{e}_x + R \sin \phi_P \mathbf{e}_y + R \phi_P \mathbf{e}_z) \right] \cdot \dot{\phi}_P (-R \sin \phi_P \mathbf{e}_x + R \cos \phi_P \mathbf{e}_y + R \mathbf{e}_z).$$

Con qualche calcolo si ha l'espressione finale:

$$\mathcal{Q}_1^{(visc)} = -2\gamma R^2 \dot{\phi}_P .$$

In questo caso le equazioni di E-L diventano quindi, esplicitando (B.57):

$$2mR^2 \frac{d^2\phi_P}{dt^2} = mgR - \kappa R^2 [\sin(\phi_P - \phi_Q) + (\phi_P - \phi_Q)] - 2\gamma R^2 \frac{d\phi_P}{dt} , \quad (\text{B.58})$$

$$2mR^2 \frac{d^2\phi_Q}{dt^2} = mgR + \kappa R^2 [\sin(\phi_P - \phi_Q) + (\phi_P - \phi_Q)] . \quad (\text{B.59})$$

(b). Il cambiamento di variabili  $\theta = \phi_P - \phi_Q$ ,  $\tau = \phi_P + \phi_Q$  è biiettivo e bidifferenziabile. Le formule inverse sono:  $\phi_P = (\theta + \tau)/2$  e  $\phi_Q = (\tau - \theta)/2$  da cui è evidente che, variando la coordinata  $\tau$  e tenendo fissa la coordinata  $\theta$ , si produce una rotazione rigida del sistema di punti di un angolo  $\tau/2$  composta con una traslazione lungo l'asse  $z$  di  $R\tau/2$ .

Dalle leggi di trasformazione di coordinate scritte sopra si ha che:  $\dot{\phi}_P = (\dot{\theta} + \dot{\tau})/2$  e  $\dot{\phi}_Q = (\dot{\tau} - \dot{\theta})/2$ . Sostituendo tutto nell'espressione (B.54) troviamo infine l'espressione della lagrangiana in funzione delle nuove variabili:

$$\mathcal{L}(\theta, \tau, \dot{\theta}, \dot{\tau}) = \frac{mR^2}{2} ((\dot{\theta} + \dot{\tau})^2 + (\dot{\tau} - \dot{\theta})^2) + mgR\tau - \kappa R^2 \left[ 1 - \cos\theta + \frac{\theta^2}{2} \right] ,$$

ossia

$$\mathcal{L}(\theta, \tau, \dot{\theta}, \dot{\tau}) = \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\tau}^2) + mgR\tau - \kappa R^2 \left[ 1 - \cos\theta + \frac{\theta^2}{2} \right] .$$

Nel caso  $g = 0$  la lagrangiana si riduce a:

$$\mathcal{L}(\theta, \tau, \dot{\theta}, \dot{\tau}) = \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\tau}^2) - \kappa R^2 \left[ 1 - \cos\theta + \frac{\theta^2}{2} \right] .$$

In questo caso l'equazione di E-L per la coordinata  $\tau$ , visto che  $\mathcal{L}$  non dipende esplicitamente da  $\tau$  risulta essere:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\tau}} \right) = 0 .$$

In altre parole, la grandezza:

$$I := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\tau}} = mR^2 \frac{d\tau}{dt} ,$$

si conserva nel tempo sul moto (cioé sulle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange).

Tornando alle coordinate libere  $\phi_P$  e  $\phi_Q$  la grandezza  $L_z$  assume forma:

$$I := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\tau}} = mR^2 \left( \frac{d\phi_P}{dt} + \frac{d\phi_Q}{dt} \right) .$$

Consideriamo ora il momento angolare del sistema di punti nel riferimento  $\mathcal{S}$  rispetto al polo  $O$ :

$$\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}} = (P - O) \wedge m\mathbf{v}_P + (Q - O) \wedge m\mathbf{v}_Q .$$

Il calcolo esplicito, usando (B.50), (B.51), (B.52) e (B.53), fornisce immediatamente che

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{I}} = mR^2 \left( \frac{d\phi_P}{dt} + \frac{d\phi_Q}{dt} \right).$$

Concludiamo, di conseguenza, che la grandezza conservata  $I$  non è altro che la componente lungo l'asse  $z$  momento angolare del sistema di punti nel riferimento  $\mathcal{I}$  rispetto al polo  $O$ .

**7.1.2. Soluzione.** Notiamo preventivamente che il sistema  $\mathcal{I}$  è inerziale per cui dobbiamo considerare solo forze vere, inoltre i vincoli sono olonomi ed ideali: possiamo applicare il formalismo lagrangiano.

(a) Determiniamo la lagrangiana del sistema, che indicheremo con  $\mathcal{L}$  sottointendendo il riferimento  $\mathcal{I}$ . Dato che tutte le forze attive sono conservative la lagrangiana avrà forma  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ , dove  $\mathcal{T}$  è l'energia cinetica riferita ad  $\mathcal{I}$ , mentre  $\mathcal{U}$  è l'energia potenziale totale riferita allo stesso sistema di riferimento. Valutiamo per prima l'energia cinetica. Scriviamo a tal fine la posizione e la velocità dei due punti in funzione delle coordinate libere  $r_1, \varphi_1$  e  $r_2, \varphi_2$  e delle associate coordinate puntate. Tenendo conto che, data l'equazione del cono, la quota  $z_1$  di  $P_1$  coincide con il raggio  $r_1$  che ha lo stesso punto in coordinate polari piane nel piano  $z = 0$ , si ha banalmente che

$$P_1 - O = r_1(\cos \varphi_1 \mathbf{e}_x + \sin \varphi_1 \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z).$$

e similmente:

$$P_2 - O = r_2(\cos \varphi_2 \mathbf{e}_x + \sin \varphi_2 \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z).$$

Ora lavoriamo solo con il punto  $P_1$ . Assumendo che le coordinate libere  $r_1, \varphi_1$  dipendano dal tempo, derivando nel tempo e sostituendo con le variabili puntate le derivate temporali delle coordinate libere, si ha:

$$\mathbf{v}_1 = \dot{r}_1(\cos \varphi_1 \mathbf{e}_x + \sin \varphi_1 \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) + r_1 \dot{\varphi}_1(-\sin \varphi_1 \mathbf{e}_x + \cos \varphi_1 \mathbf{e}_y),$$

da cui, quadrando e tenendo conto dell'identità  $\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1 = 1$  troviamo:

$$\mathbf{v}_1^2 = 2\dot{r}_1^2 + r_1^2 \dot{\varphi}_1^2.$$

Analogamente deve essere:

$$\mathbf{v}_2^2 = 2\dot{r}_2^2 + r_2^2 \dot{\varphi}_2^2.$$

Mettendo tutto insieme, l'energia cinetica si scrive:

$$\mathcal{T} = \frac{m}{2} (2(\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2) + r_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + r_2^2 \dot{\varphi}_2^2). \quad (\text{B.60})$$

L'energia potenziale è data dalla somma delle energie potenziali gravitazionali  $mgz_1 + mgz_2$  più dall'energia potenziale della molla:  $\kappa(P_1 - R_2)^2/2$ . In particolare, dall'espressione trovata sopra per  $P_1 - O$  e  $P_2 - O$  si ha:

$$(P_1 - P_2)^2 = (r_1 \cos \varphi_1 - r_2 \cos \varphi_2)^2 + (r_1 \sin \varphi_1 - r_2 \sin \varphi_2)^2 + (r_1 - r_2)^2,$$

da cui, sviluppando i quadrati e tenendo conto dell'identità :  $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$  si ricava:

$$(P_1 - P_2)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

In definitiva:

$$\mathcal{U}(P_1, P_2) = mg(r_1 + r_2) + \frac{\kappa}{2} (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) , \quad (\text{B.61})$$

da cui, tenendo conto di (B.60):

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (2(\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2) + r_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + r_2^2 \dot{\varphi}_2^2) - mg(r_1 + r_2) - \frac{\kappa}{2} (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) . \quad (\text{B.62})$$

Con questa lagrangiana le equazioni del moto di Eulero-Lagrange risultano essere

$$2m \frac{d^2 r_1}{dt^2} = mr_1 \left( \frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 - mg - k(r_1 - r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) , \quad (\text{B.63})$$

$$2m \frac{d^2 r_2}{dt^2} = mr_2 \left( \frac{d\varphi_2}{dt} \right)^2 - mg - k(r_2 - r_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) , \quad (\text{B.64})$$

$$m \frac{d}{dt} \left( r_1^2 \frac{d\varphi_1}{dt} \right) = -\kappa r_1 r_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) , \quad (\text{B.65})$$

$$m \frac{d}{dt} \left( r_2^2 \frac{d\varphi_2}{dt} \right) = -\kappa r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) . \quad (\text{B.66})$$

(b) Vale  $\Phi := (\varphi_1 - \varphi_2)/2$  e  $\Theta = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$  da cui  $\varphi_1 = \Phi + \Theta$ ,  $\varphi_2 = \Theta - \Phi$ ,  $\dot{\varphi}_1 = \dot{\Phi} + \dot{\Theta}$ ,  $\dot{\varphi}_2 = \dot{\Theta} - \dot{\Phi}$ . La lagrangiana (B.62) espressa nelle nuove variabili assume pertanto la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{m}{2} [2(\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2) + (r_1^2 + r_2^2) (\dot{\Phi}^2 + \dot{\Theta}^2) + 2(r_1^2 - r_2^2) \dot{\Phi} \dot{\Theta}] \\ - mg(r_1 + r_2) - \frac{\kappa}{2} (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos 2\Phi) . \end{aligned}$$

Quindi la lagrangiana non dipende esplicitamente da  $\Theta$  e pertanto la grandezza  $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{\Theta}$  si conserva sui moti del sistema in virtù delle equazioni di Eulero-Lagrange. Tornando nelle coordinate iniziali:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Theta}} = \frac{m}{2} 2 [(\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2) \dot{\Theta} + (r_1^2 - r_2^2) \dot{\Phi}] = \frac{m}{2} [(r_1^2 + r_2^2)(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) + (r_1^2 - r_2^2)(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)] .$$

Sviluppando l'espressione si ha infine, sul moto:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Theta}} = mr_1^2 \frac{d\varphi_1}{dt} + mr_2^2 \frac{d\varphi_2}{dt} .$$

Con banali passaggi di calcolo vettoriale, esprimendo  $P_i - O$  e le velocità  $\mathbf{v}_i$  in funzione delle coordinate libere, come determinato all'inizio dell'esercizio, si verifica facilmente che:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Theta}} = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{\Gamma}_0|_{\mathcal{L}} ,$$

dove:

$$\mathbf{\Gamma}_0|_{\mathcal{I}} = (P_1 - 0) \wedge m\mathbf{v}_1 + (P_2 - 0) \wedge m\mathbf{v}_2$$

è il momento angolare totale del sistema nel riferimento  $\mathcal{I}$  rispetto al polo  $O$ .

**7.1.3. Soluzione.** (a) Usiamo come coordinata libera la componente  $x$  del vettore  $P - O$  nel riferimento non inerziale  $\mathcal{I}$ . Dato che nel riferimento inerziale non compaiono forze non conservative (esclusa ovviamente la reazione vincolare  $\phi$ ), è conveniente usare la lagrangiana rispetto al riferimento inerziale  $\mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{I}}} = \mathcal{T}|_{\hat{\mathcal{I}}} - \mathcal{U}|_{\hat{\mathcal{I}}}$ . Ricaviamo l'energia cinetica  $\mathcal{T}|_{\hat{\mathcal{I}}} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_P^2|_{\hat{\mathcal{I}}}$  espressa in funzione di  $x$  e  $\dot{x}$ . La velocità nel riferimento non inerziale  $\mathcal{I}$  è data banalmente dalla derivata nel tempo di:

$$P - O = x(t) \mathbf{e}_x + \sinh x(t) \mathbf{e}_z,$$

tenendo conto che i versori  $\mathbf{e}_x$  e  $\mathbf{e}_z$  sono fissi in tale riferimento. Abbiamo allora che:

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}} = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{x} \cosh x \mathbf{e}_z.$$

La velocità nel riferimento  $\hat{\mathcal{I}}$  si ottiene allora come

$$\mathbf{v}_P|_{\hat{\mathcal{I}}} = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}}|_{\hat{\mathcal{I}}} \wedge (P - O) = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{x} \cosh x \mathbf{e}_z + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (x \mathbf{e}_x + \sinh x \mathbf{e}_z).$$

Svolgendo il calcolo otteniamo:

$$\mathbf{v}_P|_{\hat{\mathcal{I}}} = \dot{x} \mathbf{e}_x + \Omega x \mathbf{e}_y + \dot{x} \cosh x \mathbf{e}_z. \quad (\text{B.67})$$

Otteniamo di conseguenza che:

$$\mathcal{T}|_{\hat{\mathcal{I}}} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 (1 + \cosh^2 x) + \frac{m}{2} \Omega^2 x^2. \quad (\text{B.68})$$

Abbiamo due contributi all'energia potenziale  $\mathcal{U}|_{\hat{\mathcal{I}}}$ . Uno è dovuto alla forza di gravità:  $mgz$  e l'altro è dovuto alla forza della molla:  $(\kappa/2)x^2$ . In definitiva:

$$\mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{I}}} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 (1 + \cosh^2 x) - mg \sinh x - \frac{1}{2}(\kappa - m\Omega^2)x^2. \quad (\text{B.69})$$

Con questa lagrangiana abbiamo che

$$\frac{\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{I}}}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}(1 + \cosh^2 x), \quad \frac{\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{I}}}}{\partial x} = m\dot{x}^2 \sinh x \cosh x + (m\Omega^2 - \kappa)x - mg \cosh x.$$

Per cui, le equazioni di Eulero-Lagrange si scrivono:

$$\frac{d}{dt} m \left( \frac{dx}{dt} (1 + \cosh^2 x) \right) = m\dot{x}^2 \sinh x \cosh x + (m\Omega^2 - \kappa)x - mg \cosh x$$

che forniscono:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} (1 + \cosh^2 x) + 2m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \sinh x \cosh x = m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \sinh x \cosh x + (m\Omega^2 - \kappa)x - mg \cosh x.$$

La forma finale delle equazioni di Eulero-Lagrange è pertanto:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{(m\Omega^2 - \kappa)x - mg \cosh x - m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \sinh x \cosh x}{1 + \cosh^2 x} \quad (\text{B.70})$$

(b) Direttamente dalla definizione di  $\mathcal{H}$  abbiamo che:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H} = \frac{dx}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{I}}}}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{I}}}}{\partial \dot{x}} - \frac{d}{dt} \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{I}}}.$$

Usando le equazioni di Eulero-Lagrange possiamo riscrivere l'identità di sopra come:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H} = \frac{dx}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{I}}}}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{I}}}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{I}}}.$$

Aggiungendo e togliendo  $\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{I}}}/\partial t$  si ottiene infine:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H} = \frac{dx}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{I}}}}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{I}}}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{I}}}}{\partial t} - \frac{d}{dt} \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{I}}} - \frac{\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{I}}}}{\partial t}.$$

D'altra parte, dato che  $\mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{I}}} = \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{I}}}(t, x, \dot{x})$  deve anche essere:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{I}}} = \frac{dx}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{I}}}}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{I}}}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{I}}}}{\partial t}.$$

Inserendo questa identità nell'espressione trovata sopra otteniamo infine che, su ogni soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange vale l'identità notevole:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(t, x(t), \dot{x}(t)) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{I}}}(t, x(t), \dot{x}(t)).$$

Dato che, nel caso in esame da (B.69) è evidente che  $\mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{I}}}$  non dipende esplicitamente dal tempo, si ha

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(t, x(t), \dot{x}(t)) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{I}}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0,$$

e pertanto su ogni soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange  $\mathcal{H}$  è una costante. Passiamo a stabilire il significato fisico di  $\mathcal{H}$ , che calcolato esplicitamente da (B.69) fornisce subito:

$$\mathcal{H}(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 (1 + \cosh^2 x) + mg \sinh x + \frac{1}{2} (\kappa - m\Omega^2) x^2. \quad (\text{B.71})$$

Vogliamo dimostrare, per verifica diretta che  $\mathcal{H}$  è l'energia meccanica totale valutata nel riferimento non inerziale  $\mathcal{I}$ . Nel riferimento inerziale  $\hat{\mathcal{I}}$  non si conserva l'energia meccanica: per mantenere il sistema in rotazione bisogna fornire lavoro dall'esterno. Tale lavoro è dissipato dalla reazione vincolare  $\phi$ . Si osservi infatti che la reazione vincolare  $\phi$  in generale compie lavoro nel riferimento  $\hat{\mathcal{I}}$  dato che essa è normale alla curva, ma la direzione della curva non è quella della velocità del punto materiale, visto che la curva stessa è in movimento in  $\hat{\mathcal{I}}$ . Valutiamo la

situazione nel riferimento non inerziale  $\mathcal{S}$ , tenendo conto della presenza delle due forze inerziali di Coriolis  $-m\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}} \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}}$  e quella centrifuga  $-m\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}} \wedge (P - O))$  (le altre forze inerziali sono assenti dato che  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}}$  è costante nel tempo). Nel riferimento non inerziale, la forza  $\phi$  non compie lavoro in quanto, per costruzione, è sempre perpendicolare alla velocità del punto materiale  $P$  in quel riferimento. Le altre forze agenti sono quella di gravità che è conservativa, quella della molla che è conservativa, quella di Coriolis che non compie lavoro (dato che per definizione è perpendicolare alla velocità), infine c'è ancora la forza centrifuga che, come vedremo è conservativa. L'energia meccanica totale nel sistema di riferimento  $\mathcal{S}$ , data dalla somma dell'energia cinetica e delle tre forme di energia potenziale suddette è quindi una costante del moto. Mostriamo che coincide con  $\mathcal{H}$ . Scriviamo l'equazione del moto in forma Newtoniana nel riferimento  $\mathcal{S}$ . Se  $\mathbf{x} = P - O = x \mathbf{e}_x + \sinh x \mathbf{e}_z$  e quindi  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}} = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{x} \cosh x \mathbf{e}_z$ , abbiamo che:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{\mathcal{S}} \mathbf{x} = -mg \mathbf{e}_z - \kappa x \mathbf{e}_x - m\Omega \mathbf{e}_z \wedge \left( \frac{dx}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dx}{dt} \cosh x \mathbf{e}_z \right) - m\Omega^2 \mathbf{e}_z \wedge (\mathbf{e}_z \wedge (x \mathbf{e}_x + \sinh x \mathbf{e}_z)) + \phi.$$

Sviluppando entrambi i membri troviamo:

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x \mathbf{e}_x + \sinh x \mathbf{e}_z) = -mg \mathbf{e}_z - \kappa x \mathbf{e}_x + m\Omega^2 x \mathbf{e}_x - m\Omega \frac{dx}{dt} \mathbf{e}_y + \phi. \quad (\text{B.72})$$

Le due ultime forze non compiono lavoro essendo perpendicolari alla velocità (che è sempre diretta lungo  $\mathbf{e}_x$ ). La forza centrifuga si ottiene derivando in  $x$  e cambiando segno all'energia potenziale centrifuga  $-\frac{1}{2}m\Omega^2 x^2$ , che corrisponde a quella di una molla con costante elastica negativa. In base al teorema di conservazione dell'energia meccanica, si deve conservare nel tempo, su ogni moto, la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale totale. L'energia cinetica in  $\mathcal{S}$  vale

$$\frac{1}{2} m \mathbf{v}_P^2|_{\mathcal{S}} = \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 (1 + \cosh^2 x),$$

pertanto l'integrale primo suddetto ha la forma:

$$\frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 (1 + \cosh^2 x) + mg \sinh x + \frac{1}{2} (\kappa - m\Omega^2) x^2.$$

Questa è, su ogni moto, proprio l'espressione trovata per  $\mathcal{H}$  (B.71).

(c) Direttamente da (B.72) abbiamo che:

$$\phi^x = m \frac{d^2 x}{dt^2} + (\kappa - m\Omega^2) x.$$

Usando (B.70) per esplicitare  $m d^2 x / dt^2$  in funzione di  $x$  e della sua derivata prima nel tempo, si trova su ogni moto:

$$\phi^x(x, \dot{x}) = (\kappa - m\Omega^2) x + \frac{(m\Omega^2 - \kappa) x - mg \cosh x - m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \sinh x \cosh x}{1 + \cosh^2 x}$$

cioè, in funzione di  $x$  e  $\dot{x}$ :

$$\phi^x(x, \dot{x}) = \frac{(\kappa - m\Omega^2)x \cosh^2 x - mg \cosh x - m\dot{x}^2 \sinh x \cosh x}{1 + \cosh^2 x}. \quad (\text{B.73})$$

(d) Dato che  $\mathcal{H}$  si conserva nel tempo, per il moto con condizioni iniziali  $x(0) = 0$  e  $\dot{x}(0) = v > 0$  deve essere:

$$\mathcal{H}(0, v) = \mathcal{H}(x(t), \dot{x}(t)), \quad \text{per ogni } t.$$

Di conseguenza, direttamente da (B.71) troviamo che deve essere

$$mv^2 = \frac{m}{2}\dot{x}(t)^2 (1 + \cosh^2 x(t)) + mg \sinh x(t) + \frac{1}{2}(\kappa - m\Omega^2)x(t)^2,$$

da cui:

$$m\dot{x}(t)^2 = \frac{2mv^2 - 2mg \sinh x(t) + (m\Omega^2 - \kappa)x(t)^2}{1 + \cosh^2 x(t)}.$$

Sostituendo in (B.73) si ricava l'espressione richiesta dal quesito:

$$\begin{aligned} \phi^x(x(t)) &= \frac{(\kappa - m\Omega^2)x(t) \cosh^2 x(t) - mg \cosh x(t)}{1 + \cosh^2 x(t)} \\ &+ \frac{2mg \sinh x(t) - 2mv^2 + (\kappa - m\Omega^2)x(t)^2}{(1 + \cosh^2 x(t))^2} \sinh x(t) \cosh x(t) \end{aligned}$$

7.1.4. *Soluzione.* (a) La Lagrangiana riferita al riferimento inerziale  $\hat{\mathcal{S}}$ , tenendo conto che tutte le forze attive sono conservative, ha la forma generale, con ovvie notazioni:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\mathbf{v}_P^2 + \mathbf{v}_Q^2) - \mathcal{U}. \quad (\text{B.74})$$

Le velocità  $\mathbf{v}_P$  e  $\mathbf{v}_Q$  sono riferite al sistema  $\hat{\mathcal{S}}$ . Dobbiamo scrivere tutte le grandezze che appaiono nella lagrangiana di sopra in funzione di  $\phi, \dot{\phi}, \psi, \dot{\psi}$ . Cominciamo con il notare che  $Q - O = Q - P + P - O$  e ancora

$$P - O = L(\cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_z), \quad Q - P = L(\cos \psi \mathbf{e}_x + \sin \psi \mathbf{e}_z). \quad (\text{B.75})$$

Di conseguenza

$$Q - O = L[(\cos \phi + \cos \psi) \mathbf{e}_x + (\sin \phi + \sin \psi) \mathbf{e}_z]. \quad (\text{B.76})$$

Queste espressioni permettono di esplicitare l'espressione di

$$\mathcal{U} = mg(z_P + z_Q) + \frac{k}{2}(Q - O)^2$$

in funzione degli angoli, ottenendo:

$$\mathcal{U}(\phi, \psi) = mgL(2 \sin \phi + \sin \psi) + \frac{kL^2}{2} \left( (\cos \phi + \cos \psi)^2 + (\sin \phi + \sin \psi)^2 \right)^2,$$

da cui:

$$\mathcal{U}(\phi, \psi) = mgL(2 \sin \phi + \sin \psi) + kL^2(1 + \cos(\phi - \psi)). \quad (\text{B.77})$$

Le espressioni calcolate sopra per  $P-O$  e  $Q-O$  permettono anche di calcolare le velocità di  $P$  e  $Q$  nel riferimento  $\mathcal{S}$  in funzione di  $\phi, \dot{\phi}, \psi, \dot{\psi}$ . Le velocità nel riferimento  $\hat{\mathcal{S}}$  si ottengono usando le solite leggi di trasformazione cinematica, tenendo conto del moto relativo dei due riferimenti. Assumendo che gli angoli varino su un moto del sistema e derivando nel tempo  $P-O$  e  $Q-O$  in (B.75) e (B.76), tenendo conto che i versori sono costanti nel tempo nel riferimento  $\mathcal{S}$  otteniamo:

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}} = L(-\dot{\phi} \sin \phi \mathbf{e}_x + \dot{\phi} \cos \phi \mathbf{e}_z), \quad (\text{B.78})$$

$$\mathbf{v}_Q|_{\mathcal{S}} = -L(\dot{\phi} \sin \phi + \dot{\psi} \sin \psi) \mathbf{e}_x + L(\dot{\phi} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \psi) \mathbf{e}_z. \quad (\text{B.79})$$

La velocità di  $P$  e  $Q$  in  $\hat{\mathcal{S}}$  si ottengono dalle formule:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}|\hat{\mathcal{S}}} \wedge (P-O) = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (P-O), \quad \mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{S}} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (Q-O).$$

Il calcolo esplicito, facendo uso di (B.75), (B.76), (B.78) e (B.79), produce facilmente:

$$\mathbf{v}_P = -\dot{\phi}L \sin \phi \mathbf{e}_x + \Omega L \cos \phi \mathbf{e}_y + L\dot{\phi} \cos \phi \mathbf{e}_z, \quad (\text{B.80})$$

$$\mathbf{v}_Q = -L(\dot{\phi} \sin \phi + \dot{\psi} \sin \psi) \mathbf{e}_x + \Omega L(\cos \phi + \cos \psi) \mathbf{e}_y + L(\dot{\phi} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \psi) \mathbf{e}_z. \quad (\text{B.81})$$

Sostituendo queste espressioni per le velocità nel secondo membro di (B.74) ed usando anche l'espressione (B.77) per l'energia potenziale, troviamo l'espressione finale della lagrangiana  $\mathcal{L}$  in funzione delle coordinate scelte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{mL^2}{2} (2\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos(\phi - \psi)) + \frac{mL^2\Omega^2}{2} [(\cos \phi + \cos \psi)^2 + \cos^2 \phi] \\ & - mgL(2 \sin \phi + \sin \psi) - kL^2(1 + \cos(\phi - \psi)). \end{aligned} \quad (\text{B.82})$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange risultano essere di conseguenza:

$$\begin{aligned} 2mL^2 \frac{d^2\phi}{dt^2} + mL^2 \cos(\phi - \psi) \frac{d^2\psi}{dt^2} = & -mL^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 \sin(\phi - \psi) - mL^2\Omega^2(2 \cos \phi + \cos \psi) \sin \phi \\ & + kL^2 \sin(\phi - \psi) - 2mgL \cos \phi, \end{aligned} \quad (\text{B.83})$$

insieme a

$$\begin{aligned} mL^2 \frac{d^2\psi}{dt^2} + mL^2 \cos(\psi - \phi) \frac{d^2\phi}{dt^2} = & -mL^2 \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \sin(\psi - \phi) - mL^2\Omega^2(\cos \psi + \cos \phi) \sin \psi \\ & + kL^2 \sin(\psi - \phi) - mgL \cos \psi. \end{aligned} \quad (\text{B.84})$$

(b) Le equazioni di Eulero Lagrange scritte sopra *non* sono in forma normale: a primo membro compare una combinazione lineare delle derivate di ordine massimo e non le derivate di ordine

massimo separatamente su ogni riga. Il sistema di equazioni scritto sopra può essere trascritto come:

$$mL^2 \begin{bmatrix} 2 & \cos(\phi - \psi) \\ \cos(\phi - \psi) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d^2\phi}{dt^2} \\ \frac{d^2\psi}{dt^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mL^2 \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \sin(\phi - \psi) - ML^2\Omega^2(2\cos\phi + \cos\psi)\sin\phi + kL^2\sin(\phi - \psi) - 2mgL\cos\phi \\ -mL^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \sin(\psi - \phi) - ML^2\Omega^2(\cos\psi + \cos\phi)\sin\psi + kL^2\sin(\psi - \phi) - mgL\cos\psi \end{bmatrix}$$

Se la matrice quadrata a primo membro risulta invertibile, il sistema si può scrivere in forma normale moltiplicando ambo i membri per la matrice inversa. Il determinante della matrice detta è (a parte il fattore  $mL^2$ ),  $2 - \cos^2(\phi - \psi)$  che è sempre strettamente positivo e pertanto la matrice può essere invertita. Il calcolo con la regola di Cramer fornisce:

$$\begin{bmatrix} 2 & \cos(\phi - \psi) \\ \cos(\phi - \psi) & 1 \end{bmatrix}^{-1} = (2 - \cos^2(\phi - \psi))^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -\cos(\phi - \psi) \\ -\cos(\phi - \psi) & 2 \end{bmatrix}$$

Il sistema di equazioni di Eulero-Lagrange si riscrive in forma normale come:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2\phi}{dt^2} \\ \frac{d^2\psi}{dt^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{mL^2(2 - \cos^2(\phi - \psi))} \begin{bmatrix} 1 & -\cos(\phi - \psi) \\ -\cos(\phi - \psi) & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -mL^2 \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \sin(\phi - \psi) - mL^2\Omega^2(2\cos\phi + \cos\psi)\sin\phi + kL^2\sin(\phi - \psi) - 2mgL\cos\phi \\ -mL^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \sin(\psi - \phi) - mL^2\Omega^2(\cos\psi + \cos\phi)\sin\psi + kL^2\sin(\psi - \phi) - mgL\cos\psi \end{bmatrix}$$

(c) Dato che la lagrangiana (B.82) non dipende esplicitamente dal tempo, di conseguenza, per il teorema 9.3 si conserva l'hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \dot{\phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} + \dot{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} - \mathcal{L}.$$

Il calcolo esplicito fornisce immediatamente:

$$\mathcal{H} = \frac{mL^2}{2} (2\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos(\phi - \psi)) - \frac{mL^2\Omega^2}{2} [(\cos\phi + \cos\psi)^2 + \cos^2\phi] + mgL(2\sin\phi + \sin\psi) + kL^2(1 + \cos(\phi - \psi)). \quad (\text{B.85})$$

Il significato fisico si  $\mathcal{H}$  è quello dell'energia meccanica del sistema fisico nel riferimento non inerziale  $\mathcal{I}$ . Infatti, dalle (B.78)-(B.79) si ricava immediatamente che l'energia cinetica del sistema dei due punti nel riferimento  $\mathcal{I}$  è:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{I}} = \frac{mL^2}{2} (2\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos(\phi - \psi)).$$

Nel riferimento  $\mathcal{S}$  agiscono sul sistema fisico le reazioni vincolari che non compiono complessivamente lavoro per l'idealità dei vincoli, le forze conservative di gravità e della molla che producono un'energia potenziale complessiva:

$$+mgL(2 \sin \phi + \sin \psi) + kL^2(1 + \cos(\phi - \psi)),$$

le forze di Coriolis che non compiono lavoro in quanto perpendicolari ai vettori velocità, le forze centrifughe che sono perpendicolari ed uscenti dall'asse  $z$  ed hanno modulo pari a  $m\Omega^2 d_P$  e  $m\Omega^2 d_Q$  rispettivamente, dove  $d_P$  e  $d_Q$  sono le distanze dei punti indicati dall'asse  $z$ . Queste forze hanno la stessa struttura di forze di molle repulsive di costante  $-m\Omega^2$  fissate all'asse  $z$  a punti  $P'$  e  $Q'$  che stanno sempre alla stessa quota del rispettivo altro estremo della molla  $P$  e  $Q$ . Le due forze centrifughe sono dunque forze conservative con energia potenziale totale pari a:

$$-\frac{m\Omega^2}{2} (d_P^2 + d_Q^2) = -\frac{mL^2\Omega^2}{2} [\cos^2 \phi + (\cos \phi + \cos \psi)^2].$$

Sommando tutti i contributi, l'energia meccanica totale nel riferimento  $\mathcal{S}$  vale:

$$E|_{\mathcal{S}} = \frac{mL^2}{2} (2\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos(\phi - \psi)) - \frac{mL^2\Omega^2}{2} [(\cos \phi + \cos \psi)^2 + \cos^2 \phi] \\ + mgL(2 \sin \phi + \sin \psi) + kL^2(1 + \cos(\phi - \psi)).$$

Pertanto essa coincide con  $\mathcal{H}$  sui moti del sistema.

(d) Direttamente dal sistema di equazioni (B.83)-(B.84) si vede che le 4 curve costanti  $(\phi(t), \psi(t)) = (\pm\pi/2, \pm\pi/2)$  soddisfano le equazioni del moto e le condizioni iniziali dette. Dato che le equazioni sono scrivibili in forma normale, con secondo membro di classe  $C^\infty$  vale il teorema di unicità delle soluzioni, quindi quelle trovate sono le uniche soluzioni con le condizioni iniziali imposte per ipotesi.

## B.7 Esercizi del Capitolo 10.

### Esercizi 10.1

10.1.1. *Soluzione.* (a) Per prima cosa notiamo che, direttamente dell'equazione di  $\mathbb{T}^2$  pensando  $P$  come il punto materiale e  $\phi = \phi(t), \theta = \theta(t)$ , abbiamo che:

$$\mathbf{x} = P - O = (R + r \cos \theta) \cos \phi \mathbf{e}_x + (R + r \cos \theta) \sin \phi \mathbf{e}_y + r \sin \phi \mathbf{e}_z$$

e quindi:

$$\mathbf{v}_P = (R + r \cos \theta) \dot{\phi} (-\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y) + r \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{e}_z - r \dot{\theta} \sin \theta (\cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y).$$

Ovvero:

$$\mathbf{v}_P = - [(R + r \cos \theta) \dot{\phi} \sin \phi + r \dot{\theta} \sin \theta \cos \phi] \mathbf{e}_x + [(R + r \cos \theta) \dot{\phi} \cos \phi - r \dot{\theta} \sin \theta \sin \phi] \mathbf{e}_y + r \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{e}_z.$$

Eseguendo il quadrato del secondo membro e moltiplicando il risultato per  $m/2$  troviamo l'energia cinetica in  $\mathcal{I}$  che vale esplicitamente:

$$\mathcal{T} = \frac{m(R + r \cos \theta)^2}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{mr^2}{2} \dot{\theta}^2 .$$

L'energia potenziale della molla è :

$$\frac{k}{2}(P - O)^2 = \frac{k}{2}r^2 \sin^2 \theta + \frac{k}{2}(R + r \cos \theta)^2 = \frac{k}{2} (R^2 + r^2 + 2rR \cos \theta) .$$

Possiamo ridefinire l'energia potenziale omettendo la costante additiva senza perdere informazioni:

$$\mathcal{U}(\theta, \phi) := krR \cos \theta$$

Nel caso  $\gamma > 0$  la forza viscosa sarà descritta tramite le componenti lagrangiane:

$$\mathcal{Q}_\phi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} \cdot (-\gamma \mathbf{v}_P) = -\gamma(R + r \cos \theta)^2 \dot{\phi} ,$$

e

$$\mathcal{Q}_\theta = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \cdot (-\gamma \mathbf{v}_P) = -\gamma r^2 \dot{\theta} .$$

Introdotta la lagrangiana parziale (che non tiene conto della forza viscosa!):

$$\mathcal{L} := \mathcal{T} - \mathcal{U} = \frac{m(R + r \cos \theta)^2}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{mr^2}{2} \dot{\theta}^2 - krR \cos \theta \quad (\text{B.86})$$

le due equazioni di Eulero-Lagrange non banali possono scriversi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= \mathcal{Q}_\phi , \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= \mathcal{Q}_\theta , \end{aligned}$$

che si riscrivono, esplicitamente:

$$m \frac{d}{dt} \left( (R + r \cos \theta)^2 \frac{d\phi}{dt} \right) = -\gamma(R + r \cos \theta)^2 \frac{d\phi}{dt} , \quad (\text{B.87})$$

$$mr^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mr(R + r \cos \theta) \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \sin \theta - \gamma r^2 \frac{d\theta}{dt} + krR \sin \theta . \quad (\text{B.88})$$

(b) Nel caso in cui  $\gamma = 0$ , la lagrangiana completa del sistema è data in (B.86). Si vede che tale lagrangiana ammette la coordinata  $\phi$  come coordinata ciclica. In tal caso il momento coniugato associato è un integrale primo. Quindi abbiamo l'integrale primo:

$$p_\phi := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = m(R + r \cos \theta)^2 \frac{d\phi}{dt} .$$

Dimostriamo che questa è la componente  $z$  del momento angolare rispetto al polo  $O$  in  $\mathcal{S}$ . Da

$$\mathbf{x} = P - O = (R + r \cos \theta) \cos \phi \mathbf{e}_x + (R + r \cos \theta) \sin \phi \mathbf{e}_y + r \sin \phi \mathbf{e}_z$$

e

$$\mathbf{v}_P = - \left[ (R + r \cos \theta) \dot{\phi} \sin \phi + r \dot{\theta} \sin \theta \cos \phi \right] \mathbf{e}_x + \left[ (R + r \cos \theta) \dot{\phi} \cos \phi - r \dot{\theta} \sin \theta \sin \phi \right] \mathbf{e}_y + r \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{e}_z,$$

abbiamo facilmente che:

$$\Gamma_O|_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{e}_z = m \mathbf{x} \wedge \mathbf{v}_P \cdot \mathbf{e}_z = m(xv_{Py} - yv_{Px}) = m(R + r \cos \theta)^2 \dot{\phi},$$

cioè su ogni moto:

$$p_\phi = \Gamma_O|_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{e}_z = m(R + r \cos \theta)^2 \dot{\phi}. \quad (\text{B.89})$$

Per quanto riguarda l'energia meccanica totale, siamo nelle ipotesi del teorema di Jacobi dato che nelle coordinate usate (che sono adattate a  $\mathcal{S}$ ), la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo. Pertanto essa si conserva e coincide con l'hamiltoniana del sistema. Vale

$$\mathcal{H}(\phi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\theta}) = \mathcal{T} + \mathcal{U} = \frac{m(R + r \cos \theta)^2}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{mr^2}{2} \dot{\theta}^2 + krR \cos \theta. \quad (\text{B.90})$$

(c) Dobbiamo scrivere la legge che connette le coordinate  $\phi, \theta, p_\phi, p_\theta$  in funzione delle coordinate  $\phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}$ , invertire questa trasformazione ed esplicitare l'hamiltoniana in (B.90) in funzione di  $\phi, \theta, p_\phi, p_\theta$ . Sappiamo che  $p_\phi$  è dato in (B.89) mentre:

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}.$$

quindi:

$$\dot{\theta} = \frac{1}{mr^2} p_\theta, \quad (\text{B.91})$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{m(R + r \cos \theta)^2} p_\phi. \quad (\text{B.92})$$

Nelle variabili  $\phi, \theta, p_\phi, p_\theta$ , l'hamiltoniana (B.90) si riscrive:

$$\mathcal{H}(\phi, \theta, p_\phi, p_\theta) = \frac{p_\phi^2}{2m(R + r \cos \theta)^2} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + krR \cos \theta.$$

Le equazioni di Hamilton sono allora:

$$\frac{dp_\phi}{dt} = \left( -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} \right) = 0, \quad (\text{B.93})$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\phi} \right) = \frac{p_\phi}{m(R + r \cos \theta)^2}, \quad (\text{B.94})$$

$$\frac{dp_\theta}{dt} = \left( -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \right) = -\frac{p_\phi^2 r \sin \theta}{m(R + r \cos \theta)^3} + krR \sin \theta, \quad (\text{B.95})$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} \right) = \frac{p_\theta}{mr^2}. \quad (\text{B.96})$$

(d) Consideriamo le equazioni di Eulero-Lagrange (B.87)- (B.88). Se inseriamo nella seconda equazione le condizioni iniziali il secondo membro si annulla. Si osservi allora che la funzione  $\theta(t) = 0$  costantemente per ogni  $t \in \mathbb{R}$  soddisfa sia le condizioni iniziali in  $\theta$  che la seconda equazione qualunque sia la soluzione dell'altra equazione. Dato che il sistema di equazioni è in forma normale con secondo membro regolare quella trovata è parte dell'unica soluzione. Con questa funzione  $\theta = \theta(t)$ , la prima equazione si riscrive:

$$m \frac{d}{dt} \left( (R+r)^2 \frac{d\phi}{dt} \right) = -\gamma(R+r)^2 \frac{d\phi}{dt},$$

ossia:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{d\phi}{dt} = 0.$$

Il polinomio caratteristico associato è

$$\chi^2 + \frac{\gamma}{m} \chi = 0,$$

con soluzioni  $\chi = 0, -\gamma/m$ . La soluzione generale dell'equazione dunque è:

$$\phi(t) = A + B e^{-\gamma t/m}.$$

Le condizioni iniziali dicono che:  $\phi(0) = A + B = 0$  da cui  $A = -B$ , e ancora  $v = d/dt|_{t=0} \phi(t) = -\gamma B e^{-\gamma t/m} / m|_{t=0}$  da cui:  $B = -mv/\gamma$ . La soluzione (massimale) del problema, cioè il moto del sistema individuato dalle condizioni iniziali dette, è dunque:

$$\theta(t) = 0, \quad \phi(t) = \frac{mv}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t/m}), \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

**10.1.2. Soluzione.** (a) Useremo la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{F}}}$  relativa al riferimento inerziale  $\hat{\mathcal{F}}$ . Dobbiamo per prima cosa esprimere la velocità dei due punti rispetto al riferimento  $\hat{\mathcal{F}}$  usando le coordinate libere  $x, \theta, s$ . Usiamo un sistema di coordinate polari piane  $(r, \theta)$  nel piano perpendicolare a  $\mathbf{e}_x$  e passante per  $O + x \mathbf{e}_x$ . Allora

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_y + \sin \theta \mathbf{e}_z \quad \mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z.$$

Si tenga conto che  $P - O = x \mathbf{e}_x + \cosh x \mathbf{e}_z$  mentre  $Q - O = x \mathbf{e}_x + r \mathbf{e}_r$ . Vale:

$$\mathbf{v}_P|_{\hat{\mathcal{F}}} = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{x} \sinh x \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{v}_Q|_{\hat{\mathcal{F}}} = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta. \quad (\text{B.97})$$

Di conseguenza:

$$\mathbf{v}_P|_{\hat{\mathcal{F}}} = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{F}} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (x \mathbf{e}_x + \cosh x \mathbf{e}_z) = \dot{x} \mathbf{e}_x + \Omega x \mathbf{e}_y + \dot{x} \sinh x \mathbf{e}_z,$$

mentre:

$$\mathbf{v}_Q|_{\hat{\mathcal{F}}} = \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{F}} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (x \mathbf{e}_x + r \mathbf{e}_r) = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \Omega x \mathbf{e}_y + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (r \cos \theta \mathbf{e}_y + r \sin \theta \mathbf{e}_z)$$

$$= \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \Omega x \mathbf{e}_y - \Omega r \cos \theta \mathbf{e}_x = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \Omega x (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) - \Omega r \cos \theta \mathbf{e}_x .$$

Abbiamo trovato che:

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{F}} = \dot{x} \mathbf{e}_x + \Omega x \mathbf{e}_y + \dot{x} \sinh x \mathbf{e}_z , \quad (\text{B.98})$$

$$\mathbf{v}_Q|_{\mathcal{F}} = (\dot{x} - \Omega r \cos \theta) \mathbf{e}_x + (\dot{r} + \Omega x \cos \theta) \mathbf{e}_r + (r \dot{\theta} - \Omega x \sin \theta) \mathbf{e}_\theta . \quad (\text{B.99})$$

Entrambe le velocità sono ora espresse rispetto a due terne ortonormali (diverse) di versori. L'energia cinetica in  $\mathcal{F}|_{\mathcal{F}}$  vale allora, tenendo conto che  $\cosh^2 x + \sinh^2 x = 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}|_{\mathcal{F}} &= \frac{m}{2} (\mathbf{v}_P|_{\mathcal{F}}^2 + \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{F}}^2) \\ &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \Omega^2 x^2 + \dot{x}^2 \sinh^2 x + (\dot{x} - \Omega r \cos \theta)^2 + (\dot{r} + \Omega x \cos \theta)^2 + (r \dot{\theta} - \Omega x \sin \theta)^2) . \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}|_{\mathcal{F}} &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 (1 + \cosh^2 x) + \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{m}{2} (2\Omega^2 x^2 + \Omega^2 r^2 \cos^2 \theta) \\ &\quad - m\Omega \dot{\theta} r x \sin \theta + m(\dot{r} x - \dot{x} r) \Omega \cos \theta . \end{aligned}$$

L'energia potenziale è data dalla somma dell'energia potenziale gravitazionale più quella della molla. Usando  $P - Q = P - O - (Q - O) = x \mathbf{e}_x + \cosh x \mathbf{e}_z - (x \mathbf{e}_x + r \mathbf{e}_r) = \cosh x \mathbf{e}_z - r \mathbf{e}_r$  e  $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z = \sin \theta$ , troviamo:

$$\mathcal{U} = mg(z_P + z_Q) + \frac{k}{2} (P - Q)^2 = mg(\cosh x + r \sin \theta) + \frac{k}{2} (r^2 + \cosh^2 x - 2r \cosh x \sin \theta) .$$

La lagrangiana in  $\mathcal{F}$  ha quindi forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}|_{\mathcal{F}} &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 (1 + \cosh^2 x) + \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{m}{2} (2\Omega^2 x^2 + \Omega^2 r^2 \cos^2 \theta) \\ &\quad - m\Omega \dot{\theta} r x \sin \theta + m(\dot{r} x - \dot{x} r) \Omega \cos \theta - mg(\cosh x + r \sin \theta) - \frac{k}{2} (r^2 + \cosh^2 x - 2r \cosh x \sin \theta) . \end{aligned}$$

Le tre equazioni di E-L risultano allora essere, in riferimento alle coordinate  $x, r, \theta$  nell'ordine scritto:

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt} \left( (1 + \cosh^2 x) \frac{dx}{dt} - r \Omega \cos \theta \right) &= m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \sinh x \cosh x + 2m\Omega^2 x - m\Omega \frac{d\theta}{dt} r \sin \theta + m \frac{dr}{dt} \Omega \cos \theta \\ &\quad - mg \sinh x - k \cosh x \sinh x + kr \sinh x \sin \theta , \\ m \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} + x \Omega \cos \theta \right) &= mr \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + m\Omega^2 r \cos^2 \theta - m\Omega \frac{d\theta}{dt} x \sin \theta - m \frac{dx}{dt} \Omega \cos \theta - mg \sin \theta \\ &\quad - kr - k \cosh x \sin \theta , \\ m \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} - \Omega r x \sin \theta \right) &= -m\Omega^2 r^2 \cos \theta \sin \theta - m \frac{d\theta}{dt} \Omega r x \cos \theta - m \left( \frac{dr}{dt} x - \frac{dx}{dt} r \right) \Omega \sin \theta \end{aligned}$$

$$-mgr \cos \theta + kr \cosh x \cos \theta .$$

(b) La forma esplicita dell'hamiltoniana associata alla lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{I}}$  riferita a coordinate  $x, r, \theta$  è:

$$\mathcal{H} = \dot{x} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{I}}}{\partial \dot{x}} + \dot{r} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{I}}}{\partial \dot{r}} + \dot{\theta} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{I}}}{\partial \dot{\theta}} - \mathcal{L} ,$$

ossia, esplicitamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 (1 + \cosh^2 x) + \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{m\Omega^2}{2} (x^2 + (x^2 + r^2 \cos^2 \theta)) + mg (\cosh x + r \sin \theta) \\ + \frac{k}{2} (r^2 + \cosh^2 x - 2r \cosh x \sin \theta) . \end{aligned} \quad (\text{B.100})$$

Dato che  $\mathcal{L}|_{\mathcal{I}}$  non dipende esplicitamente dal tempo, il teorema di Jacobi assicura che  $\mathcal{H}$  si conservi sulle soluzioni delle equazioni di E-L. Il significato di

$$\frac{m}{2} (\dot{x}^2 (1 + \cosh^2 x) + \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

è quello di energia cinetica nel riferimento  $\mathcal{I}$  come si ricava direttamente dalle (B.97). Il terzo ed il quarto addendo a secondo membro in (B.100) rappresentano l'energia potenziale della gravità e della molla come abbiamo calcolato precedentemente. Il secondo addendo

$$-\frac{m\Omega^2}{2} (x^2 + (x^2 + r^2 \cos^2 \theta))$$

si può invece scrivere come  $-\frac{m\Omega^2}{2} d_P^2 - \frac{m\Omega^2}{2} d_Q^2$ .  $d_P = |x_P|$  è la distanza di  $P$  dall'asse  $z$  e  $d_Q$  è la distanza tra  $Q$  e l'asse  $z$ .  $d_Q$  è la lunghezza della proiezione nel piano  $z = 0$  del vettore  $Q - O = x \mathbf{e}_x + r \mathbf{e}_r = x \mathbf{e}_x + r \cos \theta \mathbf{e}_y + r \sin \theta \mathbf{e}_z$ ; pertanto il quadrato di  $d_Q$  è  $x^2 + r^2 \cos^2 \theta$ . Come sappiamo

$$-\frac{m\Omega^2}{2} d_P^2 - \frac{m\Omega^2}{2} d_Q^2$$

è l'energia potenziale della forza centrifuga. La forza di Coriolis non compie lavoro nel riferimento  $\mathcal{I}$  perché è perpendicolare alla velocità. Le reazioni vincolari non compiono lavoro complessivo essendo i vincoli ideali ed indipendenti dal tempo nel riferimento  $\mathcal{I}$ . In definitiva il secondo memebro dell'espressione trovata sopra per  $\mathcal{H}$  è proprio l'energia meccanica totale nel riferimento  $\mathcal{I}$ .

(c) Abbiamo esplicitamente:

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{I}}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}(1 + \cosh^2 x) - mr\Omega \cos \theta , \quad (\text{B.101})$$

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{I}}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} + mx\Omega \cos \theta , \quad (\text{B.102})$$

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{I}}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} - m\Omega xr \sin \theta . \quad (\text{B.103})$$

Le formule inverse risultano essere:

$$\dot{x} = \frac{p_x + mr\Omega \cos \theta}{m(1 + \cosh^2 x)}, \quad (\text{B.104})$$

$$\dot{r} = \frac{p_r - mx\Omega \cos \theta}{m}, \quad (\text{B.105})$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta + m\Omega xr \sin \theta}{mr^2}. \quad (\text{B.106})$$

Sostituendo in (B.100) si trova:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{(p_x + mr\Omega \cos \theta)^2}{2m(1 + \cosh^2 x)} + \frac{(p_r - mx\Omega \cos \theta)^2}{2m} + \frac{(p_\theta + m\Omega xr \sin \theta)^2}{2mr^2} - \frac{m\Omega^2}{2} (2x^2 + r^2 \cos^2 \theta) \\ & + mg (\cosh x + r \sin \theta) + \frac{k}{2} (r^2 + \cosh^2 x + 2r \cosh x \sin \theta). \end{aligned} \quad (\text{B.107})$$

Le equazioni di Hamilton della forma:  $\frac{dq^k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}$  forniscono immediatamente le equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{p_x + mr\Omega \cos \theta}{m(1 + \cosh^2 x)}, \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{p_r - mx\Omega \cos \theta}{m}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{p_\theta + m\Omega xr \sin \theta}{mr^2}. \end{aligned}$$

Le rimanenti equazioni di Hamilton:  $\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k}$  sono allora:

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= \frac{(p_x + mr\Omega \cos \theta)^2}{m(1 + \cosh^2 x)^2} \sinh x \cosh x + \Omega \cos \theta (p_r - mx\Omega \cos \theta) - \Omega r \sin \theta \frac{p_\theta + m\Omega xr \sin \theta}{r^2} \\ &\quad + 2m\Omega^2 x - mg \sinh x - k \cosh x \sinh x + kr \sinh x \sin \theta, \\ \frac{dp_r}{dt} &= \frac{(p_\theta + m\Omega xr \sin \theta)^2}{mr^3} - \Omega \cos \theta \frac{p_x + mr\Omega \cos \theta}{(1 + \cosh^2 x)} - \Omega x \sin \theta \frac{p_\theta + m\Omega xr \sin \theta}{r^2} \\ &\quad + m\Omega^2 r \cos^2 \theta - mg \sin \theta - kr - k \cosh x \sin \theta, \\ \frac{dp_\theta}{dt} &= - \left( x(p_r - mx\Omega \cos \theta) - r \frac{p_x + mr\Omega \cos \theta}{1 + \cosh^2 x} \right) \Omega \sin \theta - \Omega x \cos \theta \frac{p_\theta + m\Omega xr \sin \theta}{r} \\ &\quad - m\Omega^2 r^2 \cos \theta \sin \theta - mgr \cos \theta + kr \cosh x \cos \theta. \end{aligned}$$

## B.8 Esercizi dell'Appendice A.

### Esercizi A.1

A.1.1. *Soluzione.* Sia  $\mathbf{u} \in V$ . Per (i) in definizione A.1 deve esistere  $R \in \mathbb{A}^n$  tale che  $R - P = \mathbf{u}$ . Usando (ii),  $\mathbf{u} + (P - P) = (R - P) + (P - P) = R - P = \mathbf{u}$ . Per l'unicità dell'elemento neutro additivo  $\mathbf{0}$  in  $V$ , deve essere  $P - P = \mathbf{0}$ .

A.1.2. *Soluzione.* Usando (ii) in definizione A.1 si ha:  $((Q + \mathbf{u}) + \mathbf{v}) - Q = [((Q + \mathbf{u}) + \mathbf{v}) - (Q + \mathbf{u})] + [(Q + \mathbf{u}) - Q]$ . Per definizione il primo ed il secondo addendo a secondo membro sono rispettivamente:  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$ . Abbiamo ottenuto che  $((Q + \mathbf{u}) + \mathbf{v}) - Q = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ . Per definizione si ha allora che:  $(Q + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = Q + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$ .

A.1.3. *Soluzione.* Usando (ii) in definizione A.1 si ha che:  $P - Q + Q - P = P - P = \mathbf{0}$  da cui la tesi.

A.1.4. *Soluzione.* Usando (ii) in definizione A.1 si ha:

$$(P + \mathbf{u}) - (Q + \mathbf{u}) = [(P + \mathbf{u}) - P] + [P - (Q + \mathbf{u})] = [(P + \mathbf{u}) - P] + [P - Q] + [Q - (Q + \mathbf{u})].$$

Applicando la definizione di  $P + \mathbf{u}$  e  $Q + \mathbf{u}$  nell'ultimo membro, tenendo conto dell'esercizio precedente, troviamo:

$$(P + \mathbf{u}) - (Q + \mathbf{u}) = \mathbf{u} + [P - Q] - \mathbf{u} = P - Q.$$

### Esercizi A.2

A.2.1. *Soluzione.* Per costruzione

$$\mathbf{e}_i = \sum_j B^j_i \mathbf{e}'_j,$$

dove la matrice  $B$  di elementi  $B^j_i$  è non singolare. Se  $\mathbf{v} \in V$  ed esso si decompone sulle due basi dette come  $\mathbf{v} = \sum_i v^i \mathbf{e}_i = \sum_j v'^j \mathbf{e}'_j$ , esplicitando  $\mathbf{e}_i$  in funzione degli  $\mathbf{e}'_j$  si ricava:

$$\sum_{i,j} v^i B^j_i \mathbf{e}'_j = \sum_j v'^j \mathbf{e}'_j.$$

Da cui

$$\sum_j \left( v'^j - \sum_{i=1}^n B^j_i v^i \right) \mathbf{e}'_j = \mathbf{0}.$$

Sfruttando l'indipendenza lineare dei vettori  $\mathbf{e}'_j$  si hanno infine le *relazioni di trasformazione* delle componenti di  $\mathbf{v}$  tra le due basi considerate:

$$v'^j = \sum_{i=1}^n B^j_i v^i. \quad (\text{B.108})$$

Da queste relazioni possiamo facilmente ricavare la legge di trasformazione tra i due differenti sistemi di coordinate cartesiane  $f$  e  $g$ . Consideriamo ora un punto  $P \in \mathbb{A}^n$ , possiamo scrivere, in virtù delle proprietà degli spazi affini:

$$P - O' = (P - O) + (O - O') \quad (\text{B.109})$$

Le componenti di  $P - O$ ,  $x^1, \dots, x^n$ , sulla base  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1, \dots, n}$  sono le coordinate di  $P$  nella carta globale  $(\mathbb{A}^n, f)$ , mentre quelle di  $P - O'$ ,  $x'^1, \dots, x'^n$ , nella base  $\{\mathbf{e}'_j\}_{j=1, \dots, n}$  sono le coordinate di  $P$  nell'altra carta globale  $(\mathbb{A}^n, g)$ . In base alla (B.108) si ha immediatamente da (B.109):

$$(P - O')'^j = \sum_{i=1}^n B^j{}_i (P - O)^i = \sum_{i=1}^n B^j{}_i (P - O)^i + \sum_{i=1}^n B^j{}_i (O - O')^i,$$

da cui

$$x'^j = \sum_{i=1}^n B^j{}_i (x^i + b^i),$$

dove  $(O - O') = \sum_i b^i \mathbf{e}_i$ .

**A.2.2. Soluzione.**  $f \circ g^{-1}$  non è altro che la relazione che esprime le coordinate  $x^1, \dots, x^n$  in funzione delle coordinate  $x'^1, \dots, x'^n$ . Essa si ottiene invertendo la funzione (A.4). Vale, per definizione di matrice inversa,  $\sum_j (B^{-1})^k{}_j B^j{}_i = \delta^k{}_i$  dove  $\delta^k{}_i$  è il solito *delta di Kroneker* definito da  $\delta^k{}_i = 0$  se  $k \neq i$  e  $\delta^k{}_k = 1$ . Moltiplicando entrambi i membri di (A.4) per  $(B^{-1})^k{}_j$  e sommando su  $j$  si ottiene:

$$\sum_j (B^{-1})^k{}_j x'^j = \sum_{i,j} (B^{-1})^k{}_j B^j{}_i (x^i + b^i) = \sum_{i,j} \delta^k{}_i (x^i + b^i) = x^k + b^k,$$

da cui segue immediatamente (A.5).

**A.2.3.** Siano  $O_1 \in \mathbb{A}^n$  e  $O_2 \in \mathbb{A}^m$  due origini per sistemi di coordinate cartesiane e  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset V_1$  e  $\{f_1, \dots, f_m\} \subset V_2$  basi negli spazi delle traslazioni. Indichiamo con  $x_1^1, \dots, x_1^n$  e  $x_2^1, \dots, x_2^m$  le coordinate cartesiane rispettivamente associate in  $\mathbb{A}^n$  e  $\mathbb{A}^m$ . Se  $x_1^1, \dots, x_1^n$  sono le coordinate di  $P \in \mathbb{A}^n$ , vale  $P - O_1 = \sum_j x_1^j \mathbf{e}_j$  e quindi:

$$\psi(P) = \psi \left( O_1 + \sum_j x_1^j \mathbf{e}_j \right) = \left[ \psi \left( O_1 + \sum_j x_1^j \mathbf{e}_j \right) - \psi(O_1) \right] + \psi(O_1).$$

La funzione in parentesi quadre è una funzione lineare  $d\psi(\sum_j x_1^j \mathbf{e}_j)$  per ipotesi, per cui:

$$\psi(P) = \sum_j x_1^j d\psi(\mathbf{e}_j) + \psi(O_1).$$

Quindi

$$\psi(P) - O_2 = \sum_j x_1^j d\psi(\mathbf{e}_j) + (\psi(O_1) - O_2) = \sum_j x_1^j L(\mathbf{e}_j) + c,$$

dove  $c := \psi(O) - O_2 \in V_2$ . Possiamo decomporre tutti vettori che compaiono sopra sulla base  $f_1, \dots, f_m \subset V_2$ :

$$\sum_i (\psi(P) - O_2)^i f_i = \sum_j x_1^j \sum_i L^i(\mathbf{e}_j) f_i + \sum_i c^i f_i.$$

Per definizione  $x_2^i := (\psi(P) - O_2)^i$  e, posto  $L^i_j := d\psi^i(\mathbf{e}_j)$ , l'identità di sopra si riscrive:

$$\sum_i \left[ x_2^i - \left( \sum_j L^i_j x_1^j + c^i \right) \right] f_i = 0.$$

L'indipendenza lineare dei vettori  $f_i$  prova la validità della (A.6). Il fatto che una trasformazione  $\psi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$  sia affine se è della forma (A.6) quando rappresentata in coordinate cartesiane è di immediata verifica diretta.

A.2.4. Vale:

$$\psi(P(t)) = \psi(P(t)) - \psi(P) + \psi(P) = \psi(P + tu) - \psi(P) + \psi(P) = d\psi(tu) + \psi(P) = \psi(P) + td\psi(u).$$

### Esercizi A.3

A.3.1. *Traccia di soluzione.* Sia  $\|\mathbf{u}\| := \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$  è la norma associata al prodotto scalare. Dalle proprietà di simmetria e linearità del prodotto scalare segue che:

$$\mathbf{u} \pm \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \pm \mathbf{v} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^2 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^2 \pm 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}),$$

da cui

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2.$$

Dato che  $d(O, O + \mathbf{w}) := \|\mathbf{w}\|$  la tesi segue immediatamente.

A.3.2. *Soluzione.* Ovviamente la conservazione del prodotto scalare implica quella delle distanze, per cui dobbiamo provare solo che la conservazione delle distanze implica la conservazione del prodotto scalare. Dalle proprietà del prodotto scalare (reale simmetrico) vale

$$(\mathbf{u}|\mathbf{v})_1 = \frac{1}{2} [(\mathbf{u} + \mathbf{v}|\mathbf{u} + \mathbf{v})_1 - (\mathbf{u} - \mathbf{v}|\mathbf{u} - \mathbf{v})_1],$$

per cui il prodotto scalare tra due vettori  $P - Q$  e  $P' - Q$ , definendo  $R \in \mathbb{E}_1^3$  t.c.  $R - Q = (P - Q) + (P' - Q)$ , vale

$$(P - Q|P' - Q)_1 = \frac{1}{2} [(R - Q|R - Q)_1 - (P - P'|P - P')_1] = \frac{1}{2} [d_1(R, Q)^2 - d_1(P, P')^2].$$

Dato che  $\phi$  è affine:

$$\phi(R) - \phi(Q) = d\psi(R - Q) = d\psi(P - Q) + d\psi(P' - Q) = (\phi(P) - \phi(Q)) + (\phi(P') - \phi(Q)).$$

Come conseguenza del fatto che  $\phi$  conserva le distanze, si ha che

$$(P - Q|P' - Q)_1 = \frac{1}{2} [d_1(R, Q)^2 - d_1(P, P')^2] = \frac{1}{2} [d_2(\phi(R), \phi(Q))^2 - d_2(\phi(P), \phi(P'))^2]$$

L'ultimo membro è proprio  $(\phi(P) - \phi(Q)|\phi(P') - \phi(Q))_2$ .

**A.3.3. Soluzione.** Se  $\phi$  è espressa in coordinate dalla (A.14), allora, nelle basi ortonormali associate a tali distanze, la rappresentazione matriciale della trasformazione lineare  $d\phi$  è semplicemente data dalla matrice  $R$  di coefficienti  $R^i_j$ . Essendo tale matrice ortogonale, la conservazione dei prodotti scalari segue immediatamente. Dall'esercizio precedente segue che  $\phi$  conserva le distanze. Supponiamo viceversa che  $\phi$  sia affine e conservi le distanze, quindi conserverà i prodotti scalari per l'esercizio precedente. In coordinate cartesiane ortonormali la trasformazione affine  $\phi$  (esercizio A.2.3) sarà rappresentata da:

$$x_2^i = \sum_{j=1}^n R^i_j x_1^j + b^i,$$

da cui, la trasformazione lineare  $d\phi : V_1 \rightarrow V_2$  si esprime come, nelle stesse basi usate per definire le coordinate cartesiane:

$$w_2^i = \sum_{j=1}^n R^i_j w_1^j$$

dove  $w_2 = d\phi(w_1)$  con  $w_1 \in V_1$  e  $w_2 \in V_2$ . Tenendo conto che le basi usate sono ortonormali, la conservazione dei prodotti scalari si esprime con la relazione

$$\sum_{i=1}^n v_2^i u_2^i = \sum_{j=1}^n v_1^j u_1^j.$$

Usando la rappresentazione di  $d\phi$  data sopra, si ottengono le condizioni:

$$\sum_{i=1}^n v_1^k R^i_k R^i_j u_1^j = \sum_{j=1}^n v_1^j u_1^j$$

ossia

$$\sum_{i,j,k=1}^n v_1^k (R^i_k R^i_j - \delta_{kj}) u_1^j = 0.$$

Scegliendo tutti i coefficienti  $v_1^k$  e  $u_1^j$  nulli eccetto una coppia di essi, e facendo variare tali coppie in tutti i modi possibili, si trovano le relazioni, valide per ogni scelta di  $k$  e  $j$ :

$$\sum_{i=1}^n R^i_k R^i_j = \delta_{kj}$$

che in forma matriciale si riscrivono

$$R^t R = I.$$

Si osservi che questa relazione equivale a  $RR^t = I$  ( $R^t R = I$  significa che  $R^t$  è un'inversa sinistra di  $R$ , ma, dato che la matrice  $R$  è quadrata, l'inversa sinistra coincide con l'inversa destra ed è unica, per cui vale anche  $RR^t = I$ . Il fatto che  $RR^t = I$  implichi  $R^t R = I$  si prova analogamente). Quindi  $R$  è una matrice ortogonale  $n \times n$  reale.

**A.3.4. Soluzione.** Proviamo (i), (ii) e (iii). Se  $\phi : \mathbb{E}_1^n \rightarrow \mathbb{E}_2^n$  conserva le distanze allora è affine per il teorema A.1, allora si esprime come (A.14) in coordinate cartesiane ortonormali. Dato che le trasformazioni lineari non omogenee sono  $C^\infty$ ,  $\phi$  è di classe  $C^\infty$ . Dato che le matrici ortogonali sono invertibili, l'inversa di (A.14) si scrive subito come:

$$x_1^j = \sum_{i=1}^n (R^{-1})^j{}_i x_2^i + c^j, \quad \text{con } c^j = \sum_{i=1}^n (R^{-1})^j{}_i b^i.$$

Dato che la matrice inversa di una matrice ortogonale è ancora ortogonale, per l'esercizio precedente, la trasformazione inversa di  $\phi$  è ancora una trasformazione affine che conserva le distanze, in particolare è ancora  $C^\infty$  e quindi  $\phi$  è un diffeomorfismo. La composizione di due isometrie affini, in coordinate cartesiane ortonormali  $x_2^i = \sum_{j=1}^n R^i{}_j x_1^j + b^i$  e  $x_3^i = \sum_{j=1}^n R'^i{}_j x_2^j + b'^i$  produce banalmente la trasformazione:

$$x_3^i = \sum_{j=1}^n (R'R)^i{}_j x_1^j + \left( \sum_{j=1}^n R'^i{}_j b^j + b'^i \right)$$

Dato che le matrici ortogonali formano un gruppo  $R'R$  è ortogonale e pertanto la trasformazione di sopra è ancora un'isometria per l'esercizio A.3.3.

La prova di (iv) è immediata tenendo conto che, dall'esercizio A.3.3, la rappresentazione matriciale di  $d\phi$  è una matrice ortogonale quando ci si riferisce alla coppia di basi che danno luogo alle coordinate cartesiane ortonormali in cui si rappresenta  $\phi$ .

**A.3.5. Soluzione.** Per l'esercizio precedente l'insieme delle isometrie affini da  $\mathbb{E}^n$  a  $\mathbb{E}^n$  è chiuso rispetto alla composizione ed all'inversa, inoltre la trasformazione identica è banalmente un'isometria. Di conseguenza, rispetto alla composizione di funzioni (che è associativa) l'insieme delle isometrie affini su un fissato spazio euclideo è un gruppo. Essendo le trasformazioni affini degli isomorfismi, tale gruppo è sottogruppo rispetto al gruppo degli isomorfismi di  $\mathbb{E}^n$  in se stesso.

**A.3.6. Soluzione.** Se  $f$  è un'isometria affine allora è banalmente un'isometria. Per dimostrare che se  $f$  è isometria allora è un'isometria affine, è sufficiente dimostrare che  $f$  è una trasformazione affine. Abbiamo bisogno del seguente risultato preliminare.

**Lemma.** Sia  $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ , con  $V_1$  e  $V_2$  spazi vettoriali di dimensione finita  $n$ , dotati di prodotti scalari (reali simmetrici)  $(\cdot|\cdot)_1$  e  $(\cdot|\cdot)_2$  rispettivamente, che generano le norme  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  rispettivamente.  $\phi$  è lineare e conserva il prodotto scalare se e solo se valgono le due condizioni insieme:

- (i)  $\phi(0_1) = 0_2$ , essendo  $0_i$  il vettore nullo di  $V_i$ ,  $i = 1, 2$ ;
- (ii)  $\|\phi(\mathbf{v}) - \phi(\mathbf{u})\|_2 = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_1$  per ogni coppia  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_1$ .

*Dimostrazione.* È chiaro che se  $\phi$  è lineare e conserva il prodotto scalare, allora le condizioni (i) e (ii) sono verificate. Proviamo che se valgono (i) e (ii) allora  $\phi$  conserva il prodotto scalare. Per ogni  $\mathbf{w} \in V_1$

$$\|\phi(\mathbf{w})\|_2 = \|\phi(\mathbf{w}) - 0_2\|_2 = \|\phi(\mathbf{w}) - \phi(0_1)\|_2 = \|\mathbf{w} - \mathbf{0}\|_1 = \|\mathbf{w}\|_1.$$

D'altra parte  $\|\phi(\mathbf{u}) - \phi(\mathbf{v})\|_2^2 = \|u - v\|_1^2$  si esplicita come:

$$\|\phi(\mathbf{u})\|_2^2 + \|\phi(v)\|_2^2 + 2(\phi(\mathbf{u})|\phi(\mathbf{v}))_2 = \|\mathbf{u}\|_1^2 + \|\mathbf{v}\|_1^2 + 2(\mathbf{u}|\mathbf{v})_2$$

e pertanto, usando  $\|\phi(\mathbf{w})\|_2 = \|\mathbf{w}\|_1$ , segue che  $(\phi(\mathbf{u})|\phi(\mathbf{v}))_2 = (\mathbf{u}|\mathbf{v})_2$ , che è quanto volevamo provare. Per concludere, dimostriamo che  $\phi$  è lineare. Sia  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,\dots,n}$  base ortonormale in  $V_1$ . Per la conservazione del prodotto scalare  $\{\phi(\mathbf{e}_i)\}_{i=1,\dots,n}$  è una base ortonormale in  $V_2$ . Quindi, per ogni  $\mathbf{v} \in V_1$ , decomponendo  $\phi(\mathbf{v})$  sulla base  $\{\phi(\mathbf{e}_i)\}_{i=1,\dots,n}$  ed infine usando nuovamente la conservazione del prodotto scalare:

$$\phi(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n (\phi(\mathbf{e}_i)|\phi(v))\phi(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{e}_i|v)\phi(\mathbf{e}_i).$$

La linearità in  $v$  dei prodotti scalari  $(\mathbf{e}_i|v)$  implica immediatamente che  $\phi$  è lineare.  $\square$

Torniamo alla dimostrazione che ogni isometria è una trasformazione affine. Fissiamo  $O \in \mathbb{E}_1^n$ . Ogni vettore  $v \in V_1$  si potrà scrivere, biunivocamente, come  $\mathbf{v} = P_{\mathbf{v}} - O$  per  $P_{\mathbf{v}} \in \mathbb{E}_1^n$ . In particolare  $\mathbf{0}_1 = O - O$ . Definiamo  $\phi : V_1 \rightarrow V_2$  tale che  $\phi(\mathbf{v}) := f(P_{\mathbf{v}}) - f(O)$ . In questo modo  $\phi(\mathbf{0}_1) = f(O) - f(O) = \mathbf{0}_2$ , inoltre

$$\|\phi(\mathbf{u}) - \phi(\mathbf{v})\|_2^2 = \|(f(P_{\mathbf{u}}) - f(O)) - (f(P_{\mathbf{v}}) - f(O))\|_2^2 = \|f(P_{\mathbf{u}}) - f(P_{\mathbf{v}})\|_2^2,$$

ma l'ultimo membro uguaglia:

$$d_2(f(P_{\mathbf{u}}), f(P_{\mathbf{v}}))^2 = d_1(P_{\mathbf{u}} - P_{\mathbf{v}})^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_1^2.$$

Sono dunque verificate (i) e (ii) del lemma. Applicando il lemma, concludiamo che  $\phi$  è lineare (e conserva i prodotti scalari). Infine per la definizione di  $\phi$  e la sua linearità:

$$f(P_{\mathbf{v}}) - f(P_{\mathbf{u}}) = f(P_{\mathbf{v}}) - f(O) - (f(P_{\mathbf{u}}) - f(O)) = \phi(\mathbf{v}) - \phi(\mathbf{u}) = \phi(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \phi(P_{\mathbf{v}} - P_{\mathbf{u}}).$$

Dato che  $P_{\mathbf{w}}$  spazia in tutto  $\mathbb{E}_1^n$  al variare di  $\mathbf{w} \in V_1$ , l'identità di sopra si riscrive:

$$f(P) - f(Q) = \phi(P - Q), \text{ per ogni coppia } P, Q \in \mathbb{E}^n,$$

dove  $\phi$  è una funzione lineare. Questa identità implica che  $f$  sia invariante per traslazioni e sia una trasformazione affine con  $df = \phi$ .

#### Esercizi A.4

**A.4.1. Traccia di soluzione.** Per costruire l'atlante  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  su  $\mathbb{S}^2$ , considerare sistemi di coordinate polari sferiche con asse polare  $z$  disposto in varie direzioni e usando, in luogo della coordinata radiale  $r$ , la nuova coordinata  $r' := r - 1$ .

**A.4.2. Traccia di soluzione.** La risposta ad entrambe le domande è negativa:  $N$  non è localmente omeomorfa a  $\mathbb{R}^1$  (cosa succede attorno al punto  $(0, 0)$ ?).

**A.4.3. Traccia di soluzione.** Il vertice del cono  $(0, 0, 0)$  non ammette, nel suo intorno, sistemi di coordinate del tipo di quelli nella condizione (ii) della definizione A.10. Tuttavia una struttura differenziabile per  $C$  si ottiene dalla carta globale che proietta i punti di  $C$  sul piano  $x^3 = 0$  e associa alle proiezioni le loro coordinate  $(x^1, x^2)$ . Eliminando il vertice del cono,  $C^*$  risulta avere struttura di sovarietà embedded in  $\mathbb{R}^3$  di dimensione 2 ed una carta globale si ottiene proprio dalla proiezione sulla base del cono, come detto sopra.

**A.4.4. Traccia di soluzione.** Usare il fatto che le carte locali dei due atlanti sono restrizioni di carte locali di  $M$  tra di loro compatibili.

**A.4.5. Soluzione.** Nelle ipotesi fatte, per il teorema A.2, per ogni punto  $p$  nell'aperto  $\phi(U \cap V)$ , c'è un intorno aperto  $O \subset \phi(U \cap V)$  di  $p$  che è trasformato in un aperto  $O' \subset \psi(U \cap V)$  da  $\psi \circ \phi^{-1}$ . Inoltre, su  $O'$ , l'inversa di  $(\psi \circ \phi^{-1})|_{U'}$ ,  $g$  è ben definita e di classe  $C^k$ . Dato che l'unica l'inversa di  $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  per ipotesi è  $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$ ,  $g$  deve coincidere con la restrizione di quest'ultima a  $O'$ . Dato che, al variare di  $p$ , gli intorni  $O'$  ricoprono  $\psi(U \cap V)$ , concludiamo che la restrizione di  $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$  ad un'intorno ( $O'$ ) di ogni suo punto nel dominio  $\psi(U \cap V)$  è di classe  $C^k$ . Ma allora  $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$  è di classe  $C^k$ .

### Esercizi A.5

**A.5.1.** Si considerino le coordinate locali  $x^1, \dots, x^n$  della carta  $(U, \phi)$  e le coordinate locali  $y^1, \dots, y^n$  della carta  $(V, \psi)$  con  $U \cap V \neq \emptyset$ . L'identità

$$id_{\phi(U \cap V)} = (\phi \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \phi^{-1}),$$

usando le coordinate ed essendo  $\psi \circ \phi^{-1}$  scrivibile come  $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$  e  $\phi \circ \psi^{-1}$  scrivibile come  $x^i = x^i(y^1, \dots, y^n)$ , si riscrive:

$$x^i = x^i(y^1(x^1, \dots, x^2), \dots, y^n(x^1, \dots, x^2)), \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{B.110})$$

Ammettendo che entrambe le funzioni  $\psi \circ \phi^{-1}$  e  $\phi \circ \psi^{-1}$  siano differenziabili (almeno  $C^1$ ) come segue dalla richiesta di compatibilità delle due carte, ed applicando la regola di derivazione di funzioni composte in (B.110), si ha, derivando rispetto a  $x^k$ :

$$\delta_k^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^k}.$$

Quest'equazione dice che il prodotto delle due matrici jacobiane quadrate che appaiono a secondo membro è la matrice identica. Quindi entrambe le matrici quadrate sono invertibili ed, in particolare, hanno determinante non nullo.

**A.5.2. Soluzione.** Passando dalle coordinate locali  $x^1, \dots, x^n$  della carta  $(U, \phi)$  attorno a  $p$  alle coordinate locali  $y^1, \dots, y^n$  della carta  $(V, \psi)$  attorno a  $p$  in cui il requisito di non singolarità è soddisfatto, vale:

$$\frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x^i} \Big|_{\phi^{-1}(p)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \Big|_{\phi^{-1}(p)} \frac{\partial f \circ \psi^{-1}}{\partial y^j} \Big|_{\psi^{-1}(p)}.$$

Dato che la matrice di coefficienti  $\frac{\partial y^j}{\partial x^i}|_{\phi^{-1}(p)}$  è non singolare per l'esercizio precedente, se il vettore riga di componenti  $\frac{\partial f \circ \psi^{-1}}{\partial y^j}|_{\psi^{-1}(p)}$  è non nullo, deve essere non nullo anche quello di coefficienti  $\frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x^i}|_{\phi^{-1}(p)}$ .

**A.5.3.** *Traccia di soluzione.* Si generalizzi il ragionamento che ha portato alla soluzione dell'esercizio precedente.