

Valter Moretti
Dipartimento di Matematica
Facoltà di Scienze M.F.N
Università di Trento

FISICA MATEMATICA I:
Elementi di Meccanica Razionale, Meccanica
Analitica e Teoria della Stabilità

Corsi di *Fondamenti di Fisica Matematica* per la Laurea Triennale in Matematica e
Meccanica Analitica per la Laurea Triennale in Fisica.
Facoltà di Scienze MFN, Università di Trento,
anno accademico 2010-2011

Indice

Scopi, prerequisiti matematici.	2
Inquadramento generale della meccanica (analitica) classica.	2
1 Lo Spaziotempo della Fisica Classica e Cinematica.	10
1.1 Lo spaziotempo della fisica classica: Tempo e Spazio assoluti e linee di universo.	10
1.2 Sistemi di riferimento.	14
1.2.1 *Una definizione alternativa di sistema di riferimento.	15
1.2.2 Sistemi di coordinate solidali.	17
1.3 Cinematica assoluta del punto materiale.	20
1.3.1 Derivazione di curve in spazi affini.	20
1.3.2 Grandezze cinematiche.	21
1.3.3 Cinematica per punti materiali vincolati a curve e superfici ferme.	22
1.4 Cinematica relativa del punto materiale.	28
1.4.1 Vettore ω e formule di Poisson.	29
1.4.2 Velocità ed accelerazione al variare del riferimento.	37
2 Dinamica del punto e dei sistemi di punti materiali.	41
2.1 Primo principio della dinamica.	41
2.1.1 Sistemi di riferimento inerziali.	41
2.1.2 Trasformazioni di Galileo.	43
2.1.3 Moto relativo di riferimenti inerziali.	46
2.2 Formulazione generale della dinamica classica dei sistemi di punti materiali.	48
2.2.1 Masse, Impulsi e Forze.	49
2.2.2 Sovrapposizione delle forze.	51
2.2.3 Problema fondamentale della dinamica e determinismo.	52
2.3 Situazioni dinamiche più generali.	54
2.3.1 Moto assegnato per un sottosistema: forze dipendenti dal tempo.	54
2.3.2 Vincoli geometrici: reazioni vincolari.	56
2.3.3 Dinamica in riferimenti non inerziali: forze inerziali.	60
2.4 Alcuni commenti sulla formulazione generale sulla dinamica newtoniana	64
2.4.1 Invarianza galileiana della meccanica classica.	64
2.4.2 Il fallimento del programma newtoniano.	68

2.4.3	Un commento sul cosiddetto “Principio di Mach”	68
3	Introduzione alla teoria delle equazioni differenziali ordinarie	70
3.1	Sistemi di equazioni differenziali	70
3.1.1	Riduzione al prim’ordine.	71
3.1.2	Problema di Cauchy.	72
3.1.3	Integrali primi.	73
3.2	Alcune nozioni e risultati preparatori per il teoremi di esistenza e unicità	73
3.2.1	Lo spazio di Banach $C^0(K; \mathbb{K}^n)$	73
3.2.2	Teorema del punto fisso in spazi metrici completi.	76
3.2.3	Funzioni lipschitziane.	78
3.3	Teoremi di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy.	80
3.3.1	Teorema di esistenza ed unicità locale per il problema di Cauchy.	81
3.3.2	Condizione per gli integrali primi.	86
3.3.3	Teorema di esistenza ed unicità globale per il problema di Cauchy.	87
3.3.4	Equazioni differenziali lineari.	90
3.3.5	Struttura dell’insieme delle soluzioni di un’equazione lineare.	92
3.3.6	Completezza di soluzioni massimali.	101
3.4	*Confronto tra equazioni differenziali, dipendenza dalle condizioni iniziali e da parametri.	104
3.4.1	Lemma di Gronwall e sue conseguenze.	104
3.4.2	Regolarità della dipendenza dai dati di Cauchy e questioni connesse.	107
3.5	*Problema di Cauchy su varietà differenziabili.	108
3.5.1	Problema di Cauchy, esistenza ed unicità globali.	109
3.5.2	Completezza delle soluzioni.	110
3.5.3	Gruppi di diffeomorfismi locali ad un parametro.	112
3.5.4	Esistenza di integrali primi funzionalmente indipendenti.	114
4	Leggi di bilancio ed integrali primi in Meccanica.	117
4.1	Equazioni cardinali per i sistemi di punti materiali, conservazione dell’impulso e del momento angolare	117
4.1.1	Massa totale, impulso totale, momento angolare totale, energia cinetica totale	118
4.1.2	Equazioni cardinali.	120
4.1.3	Leggi di bilancio/conservazione di impulso e momento angolare.	123
4.2	Energia meccanica	124
4.2.1	Teorema delle forze vive.	126
4.2.2	Forze conservative.	127
4.2.3	Bilancio e conservazione dell’energia meccanica.	129
4.3	*La necessità della descrizione in termini di continui e di campi in meccanica classica.	131

5	Introduzione alla meccanica dei Corpi Rigidi.	134
5.1	Corpi rigidi (il vincolo di rigidità).	134
5.1.1	Corpi rigidi.	134
5.1.2	Corpi rigidi continui.	136
5.2	Il tensore d'inerzia e le sue proprietà.	139
5.2.1	Il tensore d'inerzia	140
5.2.2	Terne principali d'inerzia.	142
5.2.3	Formula di Huygens-Steiner.	149
5.3	Introduzione alla teoria delle equazioni di Eulero.	150
5.3.1	Equazioni di Eulero.	150
5.3.2	Equazione di Poincot.	152
5.3.3	Rotazioni permanenti.	153
5.3.4	Moti alla Poincot per corpi giroscopici.	154
5.3.5	Moti alla Poincot per corpi non giroscopici.	156
6	Introduzione alla teoria della stabilità.	159
6.1	Punti singolari e configurazioni di equilibrio	159
6.1.1	Equilibrio stabile ed instabile.	161
6.1.2	Introduzione ai metodi di Liapunov per lo studio della stabilità.	164
6.1.3	*Ancora sulla stabilità asintotica.	169
6.1.4	Un criterio per l'instabilità basato sulla procedura di linearizzazione.	171
6.2	Applicazioni a sistemi di punti materiali con forze conservative.	174
6.2.1	Il teorema di Lagrange-Dirichlet.	175
6.2.2	Un criterio per l'instabilità	179
7	Fondamenti di Meccanica Lagrangiana.	183
7.1	Un esempio introduttivo.	184
7.2	Il caso generale: sistemi olonomi ed equazioni di Eulero-Lagrange.	188
7.2.1	Spaziotempo delle configurazioni in presenza di vincoli olonomi.	189
7.2.2	Grandezze cinematiche ed energia cinetica.	194
7.2.3	Spostamenti virtuali e vincoli ideali.	195
7.3	Equazioni di Eulero-Lagrange e loro proprietà elementari.	201
7.3.1	Normalità delle equazioni di Eulero-Lagrange.	205
7.3.2	Spaziotempo degli atti di moto ed invarianza delle equazioni di Eulero-Lagrange.	207
7.3.3	Lagrangiane.	211
7.3.4	Cambiamento di riferimento inerziale e non unicità della lagrangiana.	215
7.4	*Formulazione geometrico differenziale globale delle equazioni di Eulero-Lagrange.	219
7.4.1	La struttura di varietà fibrata di \mathbb{V}^{n+1} e di $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$.	219
7.4.2	Il campo vettoriale dinamico Z .	221

8	Alcuni argomenti più avanzati di Meccanica Lagrangiana.	223
8.1	Il cosiddetto “Principio di Minima Azione” per sistemi che ammettono lagrangiana.	223
8.1.1	Primi rudimenti di calcolo delle variazioni.	223
8.1.2	Il principio di minima azione.	225
8.2	I potenziali generalizzati.	228
8.2.1	Il caso della forza di Lorentz.	228
8.2.2	Generalizzazione della nozione di potenziale.	230
8.2.3	Condizioni per l’esistenza del potenziale generalizzato.	232
8.2.4	Potenziali generalizzati delle forze inerziali.	234
8.3	Configurazioni di equilibrio e stabilità.	237
8.3.1	Configurazioni di equilibrio rispetto ad un riferimento.	237
8.3.2	Equilibrio stabile ed instabile, teorema di Lagrange-Dirichlet.	243
8.4	Introduzione alla teoria delle piccole oscillazioni e delle coordinate normali.	247
8.4.1	Equazioni linearizzate e disaccoppiate: coordinate normali.	248
8.4.2	Pulsazioni normali (o proprie) e modi normali di oscillazione.	252
9	Simmetrie e leggi di conservazione: teoremi di Nöther e di Jacobi.	256
9.1	Il legame tra simmetria e leggi di conservazione: coordinate cicliche.	256
9.1.1	Coordinate cicliche e conservazione dei momenti coniugati.	256
9.1.2	Invarianza traslazionale e conservazione dell’impulso.	259
9.1.3	Invarianza rotazionale e conservazione del momento angolare.	260
9.2	Il legame tra simmetrie e leggi di conservazione: il teorema di Emmy Nöther.	262
9.2.1	Trasformazioni su $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$.	263
9.2.2	Il teorema di Nöther in forma locale elementare.	264
9.2.3	Invarianza dell’integrale primo di Nöther per trasformazione di coordinate.	269
9.2.4	Le trasformazioni di simmetria (debole) di un sistema lagrangiano trasformano soluzioni delle equazioni di E.-L. in soluzioni delle stesse.	270
9.3	L’integrale primo di Jacobi, invarianza sotto “traslazioni temporali” e conservazione dell’energia meccanica.	272
9.4	Commenti finali sul teorema di Nöther.	276
9.4.1	Invarianza sotto il gruppo di Galileo in meccanica lagrangiana.	276
9.4.2	Formulazione lagrangiana e teorema di Nöther oltre la meccanica classica.	277
9.5	*Formulazione generale e globale del Teorema di Nöther.	277
9.5.1	Il teorema di Nöther nella forma generale.	280
9.5.2	Il vettore di Runge-Lenz dal teorema di Nöther.	286
9.5.3	L’integrale primo di Jacobi come conseguenza del teorema di Nöther.	289
10	Fondamenti di Meccanica Hamiltoniana.	290
10.1	Lo spaziotempo delle fasi e le equazioni di Hamilton.	290
10.1.1	Lo spaziotempo delle Fasi $F(\mathbb{V}^{n+1})$.	292
10.1.2	Le equazioni di Hamilton.	295
10.2	Sistemi hamiltoniani su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$.	304

10.2.1	Sistemi hamiltoniani su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$.	304
10.2.2	Il gruppo simplettico ed i sistemi hamiltoniani.	305
10.2.3	Il teorema di Liouville su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$.	310
10.3	*La struttura di varietà fibrata di $F(\mathbb{V}^{n+1})$ e le equazioni di Hamilton come equazioni globali.	314
10.3.1	Lo spazio fibrato $F(\mathbb{V}^{n+1})$.	314
10.3.2	Trasformazione di Legendre globale come diffeomorfismo da $j^1(\mathbb{V}^{n+1})$ a $F(\mathbb{V}^{n+1})$.	316
10.3.3	Equazioni di Hamilton assegnate globalmente su $F(\mathbb{V}^{n+1})$ e campo vettoriale dinamico Z .	318
11	Alcuni argomenti più avanzati di Meccanica Hamiltoniana.	320
11.1	Trasformazioni canoniche e loro proprietà fondamentali.	320
11.1.1	Trasformazioni canoniche	321
11.1.2	Preservazione della forma delle equazioni di Hamilton.	323
11.1.3	*Struttura globale delle equazioni di Hamilton in riferimento all'atlante canonico di $F(\mathbb{V}^{n+1})$.	328
11.2	*Il teorema di Liouville in forma globale ed il teorema "del ritorno" di Poincaré.	329
11.2.1	Teorema di Liouville e l'equazione di Liouville.	329
11.2.2	Il teorema "del ritorno" (o "di ricorrenza") di Poincaré.	332
11.3	Simmetrie e leggi di conservazione in meccanica di Hamilton.	336
11.3.1	Parentesi di Poisson.	337
11.3.2	Gruppi locali ad un parametro di trasformazioni canoniche attive.	340
11.3.3	Simmetrie e leggi di conservazione.	344
A	Alcune nozioni matematiche rilevanti.	352
A.1	Elementi di Geometria Affine.	352
A.1.1	Spazi affini.	353
A.1.2	Spazi Euclidei.	355
A.1.3	Orientazione di spazi Euclidei.	357
A.2	Elementi di geometria differenziale.	359
A.2.1	Richiami di Topologia elementare.	360
A.2.2	Varietà differenziabili.	361
A.2.3	Varietà prodotto.	363
A.2.4	Funzioni differenziabili.	363
A.2.5	Sottovarietà embedded.	364
A.2.6	Spazio tangente e cotangente. Campi vettoriali covarianti e controvarianti.	368
A.2.7	Differenziali, curve e vettori tangenti.	371
A.2.8	Spazi affini come varietà differenziabili.	372
A.2.9	Pushforward, pullback, derivata di Lie.	375
A.2.10	Immersione di spazi tangenti per sottovarietà embedded.	376
A.2.11	Fibrato tangente e cotangente, varietà fibrate e sezioni.	377

B Soluzioni e/o suggerimenti per risolvere gli esercizi proposti.	381
B.1 Esercizi del Capitolo 1.	381
B.2 Esercizi del Capitolo 2.	388
B.3 Esercizi del Capitolo 3.	390
B.4 Esercizi del Capitolo 4.	394
B.5 Esercizi del Capitolo 6.	400
B.6 Esercizi del Capitolo 7.	402
B.7 Esercizi del Capitolo 10.	413
B.8 Esercizi dell'Appendice A.	420
C Alcuni esercizi d'esame svolti.	428

Scopi, prerequisiti matematici ed inquadramento generale.

Il fine di queste dispense è quello di introdurre gli studenti dei corsi di laurea in Matematica e in Fisica agli argomenti ed i metodi della fisica matematica classica (con particolare attenzione alla meccanica classica), della formulazione lagrangiana della meccanica classica, includendo un'introduzione alla teoria della stabilità ed alla formulazione hamiltoniana della meccanica classica. L'accento è posto in particolare sulla struttura logico-matematica delle teorie fisiche studiate che, per quanto possibile, sono presentate in modo assiomatico deduttivo partendo da un numero ridotto di ipotesi fisiche. Il linguaggio matematico usato è quello dell'analisi e della geometria differenziale elementare.

Queste dispense contengono abbondantemente il materiale didattico dei corsi di *Fisica Matematica I* per la Laurea Triennale in Matematica e di *Meccanica Analitica I* per la Laurea Triennale in Fisica.

I prerequisiti per l'utilizzo delle dispense consistono nel calcolo differenziale ed integrale di una e più variabili, delle nozioni elementari di geometria ed algebra lineare, delle nozioni elementari di topologia generale e dei fondamenti di fisica meccanica. Molte delle nozioni tecniche usate saranno brevemente richiamate prima del loro uso. *Gli esempi (che spesso sono esercizi svolti) e gli esercizi proposti sono parte integrante del corso.*



Le sezioni, i teoremi, le dimostrazioni e gli esercizi contrassegnati con un asterisco non sono strettamente fondamentali ai fini del corso in quanto si riferiscono ad argomenti (specialmente matematici) più avanzati. Sono spesso importanti per chi voglia approfondirne il formalismo.

Ringraziamento. Ringrazio colleghi Enrico Pagani e Gian Vittorio Luria per diversi suggerimenti e correzioni sui contenuti dei corsi a cui si rivolgono queste dispense. Ringrazio (in ordine alfabetico) Federico Franceschini, Marco Frego, Stefano Martin, Luca Guglielmi, Mattia Signoretto, Fabio Zanini e Chiara Zarpellon per avermi segnalato vari errori in diverse formule e negli esercizi presenti nel testo.

L'ultima sezione riporta le soluzioni o suggerimenti per le soluzioni degli esercizi proposti. Come testo generale di riferimento, per approfondimenti, complementi ed esercizi, si consigliano i testi [Goldstein50], [Fasano-Marmi] e [Arnold92].

Inquadramento generale della meccanica (analitica) classica.

Dal punto di vista fisico è importante sottolineare che la descrizione della realtà fisica presentata in queste dispense ha precisi limiti di applicabilità e, generalmente parlando, deve pensarsi come un'approssimazione di qualche teoria più fondamentale. Infatti essa risulta essere inadeguata in almeno due contesti.

(a) La descrizione classica cessa di valere nel regime di velocità comparabili con quelle della luce/forti campi gravitazionali/trattazioni della fisica cosmologica. In tali contesti la descrizione

più soddisfacente, al momento nota, è data dalla *Teoria della Relatività*¹, di cui la meccanica classica è approssimazione. La rivoluzione della Relatività ha mostrato che le strutture metriche classiche (lunghezze ed intervalli di tempo) sono in realtà *relative al sistema di riferimento*, ma al contempo sono parti di una struttura metrica spaziotemporale *assoluta* che ha particolari proprietà di simmetria (almeno fino a quando si trascura la descrizione relativistica dell'interazione gravitazionale) descritte dal cosiddetto gruppo di Lorentz-Poincaré. La geometria dello spaziotempo che ne consegue si è rivelata il linguaggio matematico per poter trattare argomenti di generale interesse fisico, come la nozione di causalità. Le implicazioni di questo nuovo punto di vista sono state incredibilmente feconde ed hanno avuto influenze fondamentali nello sviluppo di tutta la fisica del 1900. La teoria della relatività ha costruito, insieme alla meccanica quantistica, il *linguaggio stesso* ed il *paradigma* della fisica teorica di un secolo intero di ricerca.

(b) La descrizione classica cessa di essere adeguata anche, rozzamente parlando, in riferimento a sistemi microscopici (scale molecolari ed inferiori). In tali contesti la descrizione più adeguata è data dalla *Meccanica Quantistica* (e dalla teoria dei campi quantistica), di cui, un'altra volta, la meccanica classica è approssimazione. Mentre il linguaggio matematico delle teorie relativistiche è ancora quello della geometria differenziale, il linguaggio matematico delle teorie quantistiche è dato dall'analisi funzionale (degli spazi di Hilbert in particolare).

Dobbiamo doverosamente rimarcare che lo schema è ancora tutt'altro che completo, visto che le teorie quantistiche e quelle relativistiche non formano un corpus coerente, in particolare vi sono diversi problemi concettuali nel conciliare la descrizione quantistica con quella data dalla relatività generale. Al momento manca una descrizione completa della struttura fisica di ciò che esiste.

La meccanica classica, d'altra parte, funziona perfettamente per le applicazioni pratiche più comuni, ma non solo. Basti pensare che le missioni *Apollo* che hanno portato l'uomo sulla luna sono state concepite completamente nell'ambito della meccanica classica, attraverso la quale sono stati costruiti tutti i modelli e sono stati fatti i calcoli.

¹Problemi irrisolti anche nell'ambito delle Teorie Relativistiche rimangono aperti in cosmologia, in particolare in relazione al cosiddetto problema dell'*energia oscura*.