Geometria Differenziale

Foglio 1 - Curve nello spazio

Esercizio 1.1. Sia $\mathbf{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva

$$\mathbf{P}(t) = \left(\arctan t, \frac{\sqrt{2}}{2} \log(1+t^2), t - \arctan t \right).$$

Si verifichi che $\mathbf{P}$ è una curva di Frenet, e si calcolino una parametrizzazione a lunghezza d'arco, la curvatura, la torsione e la terna di Frenet della curva.

Esercizio 1.2. Sia $\mathbf{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva

$$\mathbf{P}(t) = (t^2, t - t^2, 2t).$$

Verificare che si tratta di una curva di Frenet, calcolarne la terna di Frenet, curvatura, torsione e piano osculatore nel generico punto $\mathbf{P}(t)$. Stabilire infine se essa è una curva piana.

Esercizio 1.3. Calcolare curvatura e torsione della curva $\mathbf{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\mathbf{P}(t) = \left(t, t^2, \frac{2t}{3} \right).$$

Determinare inoltre l'equazione cartesiana del piano osculatore alla curva nel generico punto.

Esercizio 1.4. Calcolare curvatura e torsione della curva $\mathbf{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{P}(t) = (t, t^2, t^3)$$

nel punto $\mathbf{P}(1)$.

Esercizio 1.5. Sia $\mathbf{P} : (-2\pi, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da

$$\mathbf{P}(t) = \left(1 + \cos t, \sin t, 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \right).$$

Verificare che $\mathbf{P}$ è regolare e che il suo supporto è contenuto nella sfera di centro nell'origine di raggio 2.

Esercizio 1.6. Sia $\mathbf{P}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ la curva definita da

$$\mathbf{P}(t)=\begin{cases}(t,0,e^{\frac{1}{t}}) & (-1/2,0)\\ (0,0,0) & t=0\\ (t,e^{-\frac{1}{t}},0) & t\in(0,1/2)\end{cases}$$

Si mostri che $\mathbf{P}$ è una curva regolare di classe $\mathcal{C}^\infty$, fortemente regolare ovunque tranne che per $t=0$, con torsione nulla in $(-1/2,1/2)\setminus\{0\}$, ma il cui sostegno non è contenuto in un piano.

Esercizio 1.7. Sia $\mathbf{P}:(0,+\infty)\to\mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$\mathbf{P}(t)=\left(8t,2t^2,\frac{t^3}{3}\right).$$

Si calcolino curvatura e torsione. Si trovi il piano rettificante in $\mathbf{P}(1)$.
Si mostri che $\mathbf{P}$ è un'elica e si trovi un versore $\mathbf{u}$ tale che $\mathbf{t}\cdot\mathbf{u}$ sia costante.

Esercizio 1.8. Sia $\mathbf{P}:J\to\mathbb{R}^3$ una curva di Frenet tale che tutte le rette normali ad essa passano per un punto fisso $\mathbf{Q}$. Dimostrare che il supporto di tale curva è un arco di circonferenza.

Esercizio 1.9. Sia $\mathbf{P}:J\to\mathbb{R}^3$ una curva di Frenet con torsione mai nulla, parametrizzata con il parametro arco, tale che $\kappa(s)+\tau(s)\equiv 1$, dove $\kappa(s)$ e $\tau(s)$ denotano rispettivamente la curvatura e la torsione di $\mathbf{P}$. Sia $\mathbf{Q}:J\to\mathbb{R}^3$ la curva definita ponendo $\mathbf{Q}(s)=\mathbf{P}(s)+\mathbf{n}(s)$, ove $\mathbf{n}(s)$ è il versore normale ad $\mathbf{P}$.
Si provi che il versore normale a $\mathbf{Q}(s)$ ha la stessa direzione del versore normale ad $\mathbf{P}(s)$ per ogni s e si calcoli la curvatura di $\mathbf{Q}$ in funzione della curvatura e della torsione di $\mathbf{P}$.

Esercizio 1.10. Sia $\mathbf{P}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ l'elica circolare definita dalle equazioni parametriche

$$\mathbf{P}(s)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(s),\sin(s),s).$$

e sia $\boldsymbol{\gamma}$ la curva tracciata dagli estremi dei versori tangenti a $\mathbf{P}$. Si calcoli la curvatura di $\boldsymbol{\gamma}$. Si mostri che $\boldsymbol{\gamma}$ è un'elica circolare.

Esercizio 1.11. Sia $\mathbf{P}:J\to\mathbb{R}^3$ una curva di Frenet. Mostrare che se tutti i piani osculatori a $\mathbf{P}$ passano per un punto, allora la curva è piana.

Esercizio 1.12. Sia $\mathbf{P}:J\to\mathbb{R}^3$ una curva di Frenet con parametro arco s, e con curvatura e torsione κ e τ costanti.
Sia $\mathbf{Q}:J\to\mathbb{R}^3$ la curva di equazioni

$$\mathbf{Q}(s)=-\frac{1}{\tau}\mathbf{n}+\int_0^s\mathbf{b}(h)dh,$$

ove $\mathbf{n}$ e $\mathbf{b}$ sono rispettivamente il versore normale e il versore binormale ad $\mathbf{P}$. Si trovino curvatura e torsione di $\mathbf{Q}$.

Per esame

Esercizio 1.13. Sia $\mathbf{P} : J \to \mathbb{R}^3$ una curva di Frenet. Mostrare che se tutti i piani normali a $\mathbf{P}$ passano per un punto, allora il supporto della curva giace su una sfera.

Esercizio 1.14. Sia $\mathbf{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da

$$\mathbf{P}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t).$$

- Si calcolino la lunghezza della curva tra $t = 0$ e $t = 1$, la curvatura e la torsione.
- Si verifichi che la curva ha supporto contenuto nel cono di equazione $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ed inoltre che per ogni punto p che sta sulla curva l'angolo tra la curva e la generatrice del cono passante per p è costante (l'angolo tra due curve in un punto è l'angolo fra le rispettive rette tangenti nel punto).

Esercizio 1.15. Siano $\mathbf{P}, \mathbf{Q} : J \to \mathbb{R}^3$ curve di Frenet, parametrizzate con parametro arco, tali che, per ogni $s \in J$ i versori normali $\mathbf{n}_{\mathbf{P}}(s)$ e $\mathbf{n}_{\mathbf{Q}}(s)$ siano paralleli. Si mostri che l'angolo tra $\mathbf{t}_{\mathbf{P}}(s)$ e $\mathbf{t}_{\mathbf{Q}}(s)$ è costante.
Si provi inoltre che, se la retta normale a $\mathbf{P}$ in $\mathbf{P}(s)$ e la retta normale a $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{Q}(s)$ coincidono per ogni $s \in J$ allora esiste una costante reale λ tale che

$$\mathbf{Q}(s) = \mathbf{P}(s) + \lambda \mathbf{n}_{\mathbf{P}}(s).$$