Geometria Differenziale

Foglio 2 - Curve piane

Esercizio 1. Calcolare la base di Frenet, la curvatura, l'evoluta delle seguenti curve piane:

- la spirale di Archimede così definita ($c \neq 0$ costante e $\theta \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} x = c\theta \cos\theta \\ y = c\theta \sin\theta \end{cases}$$

- la trattrice $\alpha(t) = (\cos t + \log\tan(t/2), \sin t)$ con $t \in (0, \pi)$;

- la spirale logaritmica così definita ($c > 0$ costante e $\theta \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} x = e^{c\theta} \cos\theta \\ y = e^{c\theta} \sin\theta \end{cases}$$

Esercizio 2. Si consideri la curva piana $\mathbf{P} : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$, definita ponendo

$$\mathbf{P}(t) = (3\cos t - \cos(3t), 3\sin t - \sin(3t))$$

Si calcolino la base di Frenet e la curvatura di $\mathbf{P}$, e si scriva l'equazione dell'evoluta di $\mathbf{P}$.

Esercizio 3. Sia $\mathbf{P} : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ la curva piana definita dalle equazioni parametriche

$$\mathbf{P}(t) = (2\cos(t) + \cos(2t), 2\sin(t) - \sin(2t)).$$

- Per quali valori di t la curva è regolare?
- Per i valori per cui la curva è regolare si calcoli la curvatura di $\mathbf{P}$.
- Si trovi l'equazione della retta tangente a $\mathbf{P}$ nel punto $\mathbf{P}(\pi/2)$.
- Si trovi l'equazione della circonferenza osculatrice a $\mathbf{P}$ nel punto $\mathbf{P}(\pi)$.

Esercizio 4. Sia $\mathbf{P} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva (chiusa semplice) data in coordinate polari da

$$\rho = 2(1 + \cos\vartheta).$$

Si provi che la curvatura di $\mathbf{P}$ è data da $\kappa(\vartheta) = \dfrac{3}{4\sqrt{\rho(\vartheta)}}$.

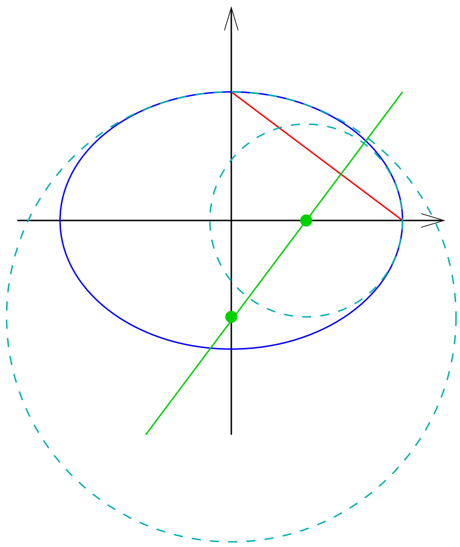
Esercizio 5. Sia $\mathbf{P} : (0, \pi/2) \to \mathbb{R}^2$ la curva piana definita dalle equazioni parametriche

$$\mathbf{P}(t) = \left(\frac{1}{4}(3\cos(t) - \cos(3t)), \frac{1}{4}(3\sin(t) - \sin(3t)) \right).$$

- Si calcoli la curvatura di $\mathbf{P}$.
- Si trovi l'evoluta di $\mathbf{P}$.
- Si mostri che l'angolo formato dal versore tangente con la direzione dell'asse x è $2t$ e che il punto $\mathbf{Q} = (\cos(t), \sin(t))$ appartiene alla retta tangente a $\mathbf{P}$ in $\mathbf{P}(t)$.

Esercizio 6. Sia Γ l'ellisse

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$



con $a, b \in \mathbb{R}^+$. Calcolare la base di Frenet, la curvatura e l'evoluta della curva.
Verificare che il rapporto tra le curvature in corrispondenza ai vertici $A = (a, 0), B = (0, b)$ è $\left(\frac{a}{b}\right)^3$, ed inoltre che i centri delle circonferenze osculatrici nei vertici A e B si trovano intersecando gli assi con la retta r perpendicolare al segmento $\overline{AB}$ e passante per il punto (a, b).

Esercizio 7. Si consideri una curva piana data in coordinate polari ρ, θ; si provi che, indicate con $\dot\rho$ ed $\ddot\rho$ le derivate prima e seconda di ρ rispetto a θ, la curvatura è data da

$$\kappa = \frac{2\dot\rho^2 - \rho\ddot\rho + \rho^2}{(\dot\rho^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$

Si calcoli la curvatura della spirale di Archimede di equazione

$$\rho = 2 \cos \theta.$$

Esercizio 8. Sia $\mathbf{P} : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare chiusa, di classe $\mathcal{C}^2$; si mostri che, per ogni direzione nel piano, esistono due rette tangenti alla curva che hanno tale direzione, con la proprietà che il sostegno della curva giace interamente in uno dei due semipiani chiusi individuati da esse.

Esercizio 9. Mostrare che la curvatura $\kappa(s)$ di una curva di Frenet $\mathbf{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ in un punto $\mathbf{P}(s_0)$ è uguale in modulo alla curvatura in $\mathbf{P}(s_0)$ della curva piana $\pi \circ \mathbf{P}$, dove π è la proiezione ortogonale di $\mathbf{P}$ sul piano osculatore in $\mathbf{P}(s_0)$.

Esercizio 10. Nel piano siano dati una retta ℓ, un punto O non sulla retta ed una distanza d. Sia P un punto della retta ℓ; la *concoide di Nicomede* è il luogo dei punti Q_1 e Q_2 sulla retta per O e P tali che la lunghezza dei segmenti PQ_1 e PQ_2 siano uguali a d, al variare del punto P sulla retta. Si trovino equazioni parametriche per la concoide, e se ne calcoli la curvatura,

Esercizio 11. Sia $\mathbf{P} : J \to \mathbb{R}^2$ una curva piana. La *pedale* (o podaria) di $\mathbf{P}$ rispetto ad un punto $\mathbf{Q} = (x_0, y_0)$, detto polo, è il luogo geometrico formato dalle proiezioni di $\mathbf{Q}$ sulle rette tangenti alla curva; si trovino equazioni parametriche della pedale in funzione delle equazioni parametriche di $\mathbf{P}$.

Esercizio 12. Sia $\mathbf{P} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la circonferenza $\mathbf{P}(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Si trovi la pedale (vedi esercizio precedente) di $\mathbf{P}$ rispetto al punto $(0, 1)$ e se ne calcoli la curvatura.

Esercizio 13. Sia $\mathbf{P} : J \to \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare con curvatura non costante tale che l'angolo tra $\mathbf{P}(t)$ e $\mathbf{t}(t)$ sia costante. Mostrare che $\mathbf{P}$ è una spirale logaritmica.

Esercizio 14. Sia $\mathbf{P} : J \to \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare semplice, con parametro arco, non passante per l'origine. Per ogni $s \in J$ sia $\mathbf{Q}(s)$ il punto simmetrico dell'origine rispetto alla retta tangente a $\mathbf{P}$ in $\mathbf{P}(s)$. Al variare di $s \in J$ i punti $\mathbf{Q}(s)$ descrivono una curvea, detta ortotomica di $\mathbf{P}$. Si mostri che, per ogni $s \in J$ il segmento che congiunge $\mathbf{Q}(s)$ e $\mathbf{P}(s)$ è normale a $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{Q}(s)$.