Geometria Differenziale

Foglio 3 - Superfici

Esercizio 1. Si considerino le seguenti applicazioni:

1. $\mathbf{P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{P}(u,v) = (u, u^2 - 2u^2v, v)$
2. $\mathbf{Q} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{Q}(u,v) = \frac{1}{1+u^2+v^2}(2u, 2v, u^2+v^2-1)$

Mostrare che $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ sono superfici elementari e calcolarne la prima forma fondamentale.

Esercizio 2. Sia $\mathbf{P} : \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3$ il catenoide, e sia $\boldsymbol{\gamma} : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3$ la curva contenuta nel catenoide, data da $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{P}(t,t)$; si calcoli la lunghezza della curva tra $t_0 = -\pi/2$ e $t_1 = \pi/2$, utilizzando la prima forma fondamentale.

Esercizio 3. Sia $\mathbf{P}' : \Omega' = J \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3$ un cono $\mathbf{P}'(U,V) = V\mathbf{Q}(U)$, dove supponiamo che $\mathbf{Q}$ sia liscia, regolare, semplice, giaccia in una semisfera aperta di raggio uno contenente l'origine e sia parametrizzata con parametro naturale. Determinare la prima forma fondamentale del piano privato dell'origine parametrizzato rispetto a coordinate polari e utilizzarla per mostrare che il cono è localmente isometrico al piano.

Esercizio 4. Si consideri la superficie elementare $\mathbf{P} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $\mathbf{P}(u,v) = (u^2, uv^2, v)$, con $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(u,0) \in \mathbb{R}^2 : u < 0\}$. Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale e determinare la natura dei punti.

Esercizio 5. Si consideri la superficie elementare definita dalla parametrizzazione $\mathbf{P} : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{P}(u,v) = (u\cos(v) + \sin(v), u\sin(v) - \cos(v), u + v)$$

1. Si calcoli l'area della regione R immagine di $[1,2] \times \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
2. Si determini la natura dei punti di $\mathbf{P}$.

Esercizio 6. Si consideri la superficie elementare $\mathbf{P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $\mathbf{P}(u,v) = (u, v, u^2 + 2v^2)$.

1. Si calcolino la prima e la seconda forma fondamentale e si determini la natura dei punti.

2. Si determinino le curvature principali e le direzioni principali nel punto $Q = (0, 0, 0)$.

3. Si determini la curvatura normale della superficie in Q lungo la direzione individuata dal vettore tangente di $T_Q S$ di coordinate $(1, 1)$.

Esercizio 7. Si consideri la superficie elementare $\mathbf{P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $\mathbf{P}(u, v) = (u, v, u^2 v^2)$. Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale. Dire se esistono punti ellittici e determinare il luogo dei punti parabolici. Determinare le curvature principali e le direzioni principali nei punti $\mathbf{P}(u, 0)$ con $u \in \mathbb{R}$, e nei punti $\mathbf{P}(0, v)$ con $v \in \mathbb{R}$.

Esercizio 8. Si consideri la superficie elementare $\mathbf{P} : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $\mathbf{P}(u, v) = (3u^2 \cos v, 3u^2 \sin v, e^{-u})$. Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale e determinare la natura dei punti. Calcolare le curvature principali e le direzioni principali in ogni punto della superficie. Stabilire se esistono punti umbilici.

Esercizio 9. Si considerino la curva $\boldsymbol{\alpha} : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}^3$, definita ponendo $\boldsymbol{\alpha}(t) = (t^2 - 2t, t^2 - 2t, t^2)$ e la superficie elementare $\mathbf{P} : \Omega = \{(u, v) : u + v > -2\} \to \mathbb{R}^3$, data da $\mathbf{P}(u, v) = (u^2 - 2v, v^2 - 2u, uv)$.

1. Verificare che il sostegno di $\boldsymbol{\alpha}$ è contenuto nel sostegno di $\mathbf{P}$, e che $\boldsymbol{\alpha}$ è una curva piana. Calcolarne la curvatura nel punto $\boldsymbol{\alpha}(0)$.

2. Determinare la natura dei punti della superficie che appartengono al supporto di $\boldsymbol{\alpha}$.

Esercizio 10. Si considerino la curva $\boldsymbol{\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $\boldsymbol{\alpha}(t) = (t, t, t^2 - t^3)$ e la superficie elementare $\mathbf{P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $\mathbf{P}(u, v) = (u, v, v^2 - u^3)$.

1. Determinare la natura dei punti della superficie.

2. Verificare che il sostegno di $\boldsymbol{\alpha}$ è contenuto nel sostegno di $\mathbf{P}$ e provare che esiste un solo punto Q in cui la curva non è fortemente regolare.

3. Per i punti diversi da Q trovare il piano osculatore della curva e stabilire se coincide con il piano tangente a $\mathbf{P}(\mathbb{R}^2)$.

4. Trovare, se esistono, le direzioni asintotiche in Q.

5. $\boldsymbol{\alpha}$ è una linea asintotica?

Esercizio 11. Si consideri la superficie elementare $\mathbf{P} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$\mathbf{P}(u, v) = ((1 + v)e^u, (1 - v)e^{-u}, (u + v)\sqrt{2}).$$

Determinare la natura dei punti della superficie. Trovare le direzioni principali e le direzioni asintotiche nei punti $\mathbf{P}(0, v)$. Calcolare l'area della regione $\mathbf{P}([0, 1] \times [1, 2])$.

Esercizio 12. Sia $\boldsymbol{\gamma}$ una curva piana regolare liscia nel piano $z = 0$, e sia S il cilindro su $\boldsymbol{\gamma}$ con generatrici parallele all'asse z. Trovare le curvature principali di S in funzione della curvatura di $\boldsymbol{\gamma}$.

Esercizio 13. Sia $\mathbf{P} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ una superficie elementare di sostegno S tale che tutte le rette normali ad S passano per un punto. Mostrare che S è una parte di sfera.

Esercizio 14. Sia S una superficie e p un suo punto. Siano $\mathbf{e}$ e $\mathbf{e}^\perp$ versori ortogonali in T_pS. Si mostri che

1. Se $k_n(\mathbf{e}) + k_n(\mathbf{e}^\perp) = 0$ allora la curvatura media di S in p è nulla.

2. Se $L(\mathbf{e}) \wedge L(\mathbf{e}^\perp) = 0$ allora la curvatura di Gauss di S in p è nulla.

Esercizio 15. Sia S una superficie in $\mathbb{R}^3$. Mostrare che se per ogni punto di S passano (almeno) tre rette contenute in S allora S è una parte di piano.

Esercizio 16. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie e p un punto non piatto di S. Si mostri che

$$H(p)^2 \geq K(p)$$

e vale l'uguaglianza se e solo se il punto è umbilico.

Esercizio 17. Si mostri che su una superficie rigata non esistono punti ellittici, senza calcolare esplicitamente la curvatura di Gauss o il determinante di B.

Esercizio 18. Sia $\mathbf{P} : \Omega \to \mathbf{R}^3$ una superficie elementare di supporto $\mathbf{P}(\Omega) = S$. Sia $\boldsymbol{\gamma} : J \to \Omega \to S$ una linea asintotica su S, parametrizzata con il parametro naturale, con curvatura $\kappa > 0$.

1. Si provi che il versore $\mathbf{b}_{\boldsymbol{\gamma}}$ binormale a γ è normale ad S, e se ne deduca che $L(\mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}}) = \pm\tau\mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}}$, ove $\mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}}$ e $\mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}}$ sono il versore tangente ed il versore normale a $\boldsymbol{\gamma}$, e τ è la torsione di $\boldsymbol{\gamma}$.

2. Si mostri che, nei punti di $\boldsymbol{\gamma}$ la curvatura di Gauss della superficie è data da $K = -\tau^2$. (Suggerimento: può essere utile scrivere le matrici G, B ed X su una base diversa da quella usuale).

Esercizio 19. Siano $\mathbf{P} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{Q} : \Omega' \to \mathbb{R}^3$ due superfici elementari, tali che $\mathbf{P}(\Omega) \cap \mathbf{Q}(\Omega')$ sia il sostengo di una curva regolare liscia $\boldsymbol{\gamma}$. Si supponga inoltre che l'angolo tra i versori normali $\mathbf{N}_{\mathbf{P}}$, $\mathbf{N}_{\mathbf{Q}}$ sia costante e non nullo lungo γ. Si provi che $\boldsymbol{\gamma}$ è una linea di curvatura per $\mathbf{P}$ se e solo se lo è per $\mathbf{Q}$.