Geometria Differenziale

Foglio 4 - Superfici

Esercizio 1. Si considerino la curva $\boldsymbol{\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $\boldsymbol{\alpha}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ e la superficie elementare $\mathbf{P} : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche $\mathbf{P}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 1 + v - u)$.

1. Verificare che il sostegno di $\boldsymbol{\alpha}$ è contenuto nel sostegno di $\mathbf{P}$.
2. Calcolare la curvatura normale e la curvatura geodetica di $\boldsymbol{\alpha}$ e stabilire se $\boldsymbol{\alpha}$ è una geodetica.

Esercizio 2. Si consideri la superficie elementare $\mathbf{P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $\mathbf{P}(u, v) = (2v - u, v - 2u, -2u^2 + 5uv - 2v^2)$.

1. Si determini la natura dei punti della superficie.
2. Si determinino le direzioni asintotiche nel punto $Q = \mathbf{P}(0, 0)$.
3. Sia C la curva intersezione della superficie con il piano $x + y = 0$; si determinino curvatura e torsione di C.
4. Si dimostri che la direzione tangente a C in Q è una delle direzioni principali e si determini l'altra.

Esercizio 3. Sia $\boldsymbol{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ una curva di fortemente regolare e $\mathcal{C}^\infty$ parametrizzata mediante il parametro lunghezza d'arco s.

1. Si consideri la superficie formata dal tubo che avvolge $\boldsymbol{\gamma}$, parametrizzata da:
$$\mathbf{P}(s, \vartheta) = \boldsymbol{\gamma}(s) + \cos\vartheta\, \mathbf{n}(s) + \sin\vartheta\, \mathbf{b}(s),$$
dove $s \in (-\varepsilon, \varepsilon), \theta \in (0, 2\pi)$, $\mathbf{n}$ indica il versore normale e $\mathbf{b}$ il versore binormale lungo $\boldsymbol{\gamma}$. Calcolare il versore normale e la prima forma fondamentale in funzione di ϑ, della curvatura e della torsione di $\boldsymbol{\gamma}$.
2. Dimostrare che, per ogni $s_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ la curva $\boldsymbol{\alpha}$ data da $s = s_0$ è una geodetica.

Esercizio 4. Si consideri la superficie elementare $\mathbf{P} : \mathbb{R}^+ \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$\mathbf{P}(u, v) = (\ln(u)\cos(v), \ln(u)\sin(v), v).$$

Determinare la natura dei punti della superficie. Trovare le direzioni principali e le direzioni asintotiche nel punto $\mathbf{P}(1, 0)$. La curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{P}(e^t, 0)$ è una geodetica?

Esercizio 5. Sia $\mathbf{P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ la superficie elementare definita dalle equazioni

$$\mathbf{P}(u, v) = (u, u^3 + v^3 + 2uv, v).$$

1. Si determini la natura dei punti della superficie.
2. Si determinino le coniche di Dupin della superficie nel punto $\mathbf{P}(0, 0)$.
3. La curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{P}(t, t)$ è una linea asintotica?
4. Si calcoli la torsione di $\boldsymbol{\gamma}$.

Esercizio 6. Sia $\mathbf{P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la superficie elementare definita dalle equazioni

$$\mathbf{P}(u, v) = (u - v, 3uv, u + v)$$

1. Si trovi la natura dei punti della superficie al variare di u e v.
2. Si trovino le curvature principali e le direzioni principali nel punto $Q = (0, 0, 0)$.
3. Si trovino le coniche di Dupin e le direzioni asintotiche nel punto $Q = (0, 0, 0)$.
4. Si stabilisca se le linee coordinate sono linee asintotiche e/o geodetiche.
5. Si mostri che la superficie è rigata e si stabilisca se è sviluppabile.

Esercizio 7. Sia $\mathbf{P} : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \to \mathbf{R}^3$ la superficie elementare definita dalle equazioni

$$\mathbf{P}(u, v) = (\sinh(u)\cos(v), \sinh(u)\sin(v), v)$$

1. Si determini la natura dei punti della superficie.
2. Si determinino le curvature e le direzioni principali della superficie nel punto $\mathbf{P}(0, \pi)$.
3. La curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\sinh(t)\cos(t), \sinh(t)\sin(t), t)$ è una linea di curvatura?
4. E' una geodetica?

Esercizio 8. Si consideri la superficie elementare: $\mathbf{P} : (-\pi, \pi) \times (0, 2) \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $\mathbf{P}(u, v) = (\sin u + v \cos u, u + v, \cos u - v \sin u)$.

1. Si determini la natura dei punti di S.
2. Si verifichi che per ogni punto di S esiste una sola direzione asintotica e la si determini.
3. Si provi che S è una superficie rigata e si dica se è sviluppabile.

Esercizio 9. Sia $\mathbf{P} : \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \times \mathbb{R}^+ \to \mathbf{R}^3$ la superficie elementare definita dalle equazioni

$$\mathbf{P}(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), 2 \sin(u))$$

1. Si trovi la natura dei punti di $S = \mathbf{P}\left(\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \times \mathbb{R}^+\right)$ al variare dei parametri u e v.
2. Si stabilisca se le curve $\mathbf{P}(u_0, v)$ sono linee di curvatura, linee asintotiche, geodetiche.
3. Si mostri che la superficie è rigata e si stabilisca se è sviluppabile.

Esercizio 10. Sia $\mathbf{P} : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbf{R}^3$ la superficie elementare definita dalle equazioni

$$\mathbf{P}(u, v) = (\sin u + 2) \cos v, (\sin u + 2) \sin v, u)$$

1. Si trovi la natura dei punti di $S = \mathbf{P}((0, 2\pi) \times (0, 2\pi))$ al variare dei parametri u e v.
2. Si trovino le direzioni asintotiche e le curvature principali nel punto $\mathbf{P}(\pi/2, \pi)$.
3. Le curve di equazioni $u = \pi/2$ e $u = \pi$ sono geodetiche?
4. Si calcolino i simboli di Christoffel Γ^1_{11} e Γ^2_{11} di $\mathbf{P}$.

Esercizio 11. Sia $\boldsymbol{\gamma}$ una curva fortemente parametrizzata con parametro arco su una superficie S, Si mostri che, se $\boldsymbol{\gamma}$ è una linea asintotica ed una geodetica, allora $\boldsymbol{\gamma}$ è una linea retta.

Esercizio 12. Sia $\boldsymbol{\gamma}$ una curva fortemente regolare parametrizzata con parametro arco su una superficie S. Si mostri che se $\boldsymbol{\gamma}$ è sia una linea di curvatura che una geodetica allora $\boldsymbol{\gamma}$ è piana. Inoltre si fornisca un esempio di una linea di curvatura che è una curva piana e non è una geodetica.

Esercizio 13. Sia $\boldsymbol{\gamma} : J \to \mathbb{R}^3$ una curva fortemente regolare, semplice e liscia, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Sia $\mathbf{P} : J \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$\mathbf{P}(u, v) = \boldsymbol{\gamma}(u) + v\mathbf{b}(u),$$

ove $\mathbf{b}$ indica il versore binormale a $\boldsymbol{\gamma}$. Sapendo che, per ε sufficientemente piccolo $\mathbf{P}$ è iniettiva, si mostri che $\mathbf{P}$ è una superficie elementare e che $\boldsymbol{\gamma}$ è una geodetica.

Esercizio 14. Sia $\mathbf{P} : \Omega \to \mathbf{R}^3$ una superficie elementare di supporto $\mathbf{P}(\Omega) = S$, priva di punti umbilici. Sia $\boldsymbol{\gamma} : J \to \Omega \to S$ una curva su S, parametrizzata con il parametro naturale, e sia p un punto del supporto di $\boldsymbol{\gamma}$.
In T_pS sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ la base ortonormale delle direzioni principali, e siano k_1 e k_2 le curvature principali. Sia $\mathbf{n}_g$ il versore in T_pS che forma una base ortonormale positivamente orientata con il versore tangente a $\boldsymbol{\gamma}$ in p, denotato con $\mathbf{t}$. Si definisca la *torsione geodetica* di $\boldsymbol{\gamma}$ come

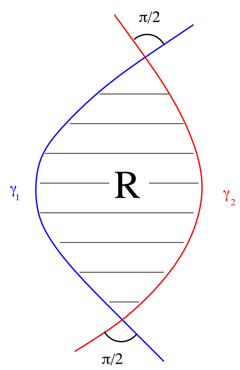
$$\tau_g := L(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{n}_g.$$

1. Si provi che $\tau_g = (k_2 - k_1) \cos\vartheta \sin\vartheta$, ove ϑ è l'angolo tra $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{t}$.
2. Si provi che τ_g è identicamente nulla se e solo se $\boldsymbol{\gamma}$ è una linea di curvatura.

Esercizio 15. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie e $p \in S$ un suo punto. Sia $\boldsymbol{\gamma} : J \to S$ una geodetica, parametrizzata con parametro naturale, tale che $\boldsymbol{\gamma}(0) = p$.

1. Si provi che, se la curvatura κ di $\boldsymbol{\gamma}$ in p non è nulla e $\boldsymbol{\gamma}$ è una curva piana, allora il versore tangente a $\boldsymbol{\gamma}$ in p, $\mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}}(0)$ è un autovettore dell'operatore di Weingarten.
2. Se ne deduca che se ogni geodetica di S è una curva piana allora S è contenuta in un piano o in una sfera.

Esercizio 16. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie i cui punti sono tutti iperbolici. Si provi che su S non possono esistere due geodetiche che sono il bordo di una regione semplice R come in figura.



Esercizio 17. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie differenziabile compatta che ha solo punti ellittici. Si provi che S è omeomorfa alla sfera.

Esercizio 18. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie differenziabile compatta, e sia $\bar{\mathbf{P}} \in S$ il punto la cui distanza dall'origine è massima. Si provi che il versore $\bar{\mathbf{P}}/||\bar{\mathbf{P}}||$ è normale ad S in $\bar{\mathbf{P}}$.
Si provi inoltre che $\bar{\mathbf{P}}$ è un punto ellittico. (Suggerimento: si mostri che le curvature normali in $\bar{\mathbf{P}}$ sono in modulo maggiori o uguali a $1/||\bar{\mathbf{P}}||$).

Esercizio 19. Si provi che non esiste una superficie differenziabile compatta $S \subset \mathbb{R}^3$ con curvatura media identicamente nulla.

Esercizio 20. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie differenziabile compatta omeomorfa alla sfera, tale che in ogni punto la sua curvatura di Gauss è maggiore di una costante positiva K_0. Qual è la massima area che può avere S?