# Geometria Differenziale

## Foglio 5 - Varietà differenziabili

**Esercizio 1.** Per ognuna delle seguenti applicazioni differenziabili trovare i punti in cui è immersiva e/o sommersiva e stabilire se è un'embedding:

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f((x, y)) = (\sin x, \sin 2x, y)$.
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, g(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$.
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, h(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t)$.

**Esercizio 2.** Si consideri l'applicazione $F : \mathbb{R} \to \mathbf{S}^1$ definita ponendo $F(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, dove la struttura differenziabile di $\mathbb{R}$ è data da $\{(\mathbb{R}, Id_{\mathbb{R}})\}$, e quella su $\mathbf{S}^1$ è definita da $\{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$.
Verificare che $F$ è differenziabile. Stabilire se $F$ è un'immersione e/o una sommersione e, se la sua restrizione a $(0, 1)$ è un'embedding.

**Esercizio 3.** Si consideri l'applicazione differenziabile $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ così definita

$$F(t) = \left(2\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right)$$

Mostrare che

- $F$ è un'immersione ma non è iniettiva;
- $F_{|(0,2\pi)}$ è un'immersione iniettiva ma non è un'embedding.

**Esercizio 4.** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione differenziabile così definita

$$f(x, y, z) = (yz, xz, xy)$$

Stabilire se $f$ è un'immersione, un'embedding e trovare gli eventuali punti in cui $f$ è un diffeomorfismo locale.

**Esercizio 5.** Si considerino le applicazioni differenziabili così definite:

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbf{S}^1 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \to & x \end{array} \qquad G : \begin{array}{ccc} \mathbf{S}^1 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \to & y \end{array}$$

dove la struttura differenziabile di $\mathbb{R}$ è data da $\{(\mathbb{R}, Id_{\mathbb{R}})\}$, e quella su $\mathbf{S}^1$ è definita da $\{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$. Per quali punti di $\mathbf{S}^1$ le applicazioni $F$ e $G$ sono dei diffeomorfismi locali?

**Esercizio 6.** Sia $n \geq 2$ e sia $p(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$.
Sia $X = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : p(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$. $X$ è detta *ipersuperficie algebrica di* $\mathbb{R}^n$. Un punto $q \in X$ è detto *singolare* se $\frac{\partial p}{\partial x_i}(q) = 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$; altrimenti $q$ è detto punto liscio. $X$ è *liscia* se ogni punto è non singolare. Verificare che se $X$ è un'ipersuperficie algebrica non singolare, allora è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^n$.

**Esercizio 7.** Dimostrare che l'insieme $S \subset \mathbb{R}^3$ definito da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 + y^3 + z^3 + x^2 + yz - 2 = 0\}$$

è una sottovarietà di $\mathbb{R}^3$.

**Esercizio 8.** Si verifichi che i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{RP}^2$ definiti dalle equazioni

- ${x_0}^2 - {x_1}^2 + {x_2}^2 = 0$
- ${x_0}^2 - {x_1}^2 + x_1 x_2 = 0$

sono due sottovarietà di $\mathbb{RP}^2$.

**Esercizio 9.** Sia $X = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici $2 \times 2$ a coefficienti reali, con la topologia indotta dall'identificazione $M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$ che fa corrispondere alla matrice

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

il vettore $(a, b, c, d)$. Siano poi $Y \subset X$ l'insieme delle matrici invertibili: $Y = \{A \in X \mid \det A \neq 0\}$ e $Z \subset X$ l'insieme delle matrici a determinante $+1$: $Z = \{A \in X \mid \det A = 1\}$. Si provi che le componenti connesse di $Y$ e $Z$ sono sottovarietà di $X$.

**Esercizio 10.** Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione differenziabile definita ponendo $g(x, y) = (x^2 - y^2, y)$, e sia $r$ la retta parallela all'asse delle $y$ passante per il punto $(1, 0)$. Provare che $g^{-1}(r)$ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^2$.

**Esercizio 11.** Si considerino le applicazioni differenziabili così definite:

- $F : \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{RP}^3$, $F([x_0 : x_1]) = [x_0^3 : x_0^2 x_1 : x_0 x_1^2 : x_1^3]$;
- $G : \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{RP}^2$, $G([x_0 : x_1]) = [x_0^3 : x_0^2 x_1 : x_1^3]$;

e si stabilisca se sono immersioni e/o embedding.

**Esercizio 12.** Provare che l'applicazione $f : \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{RP}^2$, definita ponendo

$$F([x_0 : x_1]) = \left[1 : \frac{x_0^2 - x_1^2}{x_0^2 + x_1^2} : \frac{x_0 x_1}{x_0^2 + x_1^2}\right]$$

è un'applicazione differenziabile e stabilire se è un'immersione.