GEOMETRIA DIFFERENZIALE - GENNAIO 2012

N.B.: Gli esercizi 1 e 1 bis sono ALTERNATIVI l'uno all'altro

Esercizio 1. (9 punti) Sia $\mathbf{P} : (0, \pi/2) \to \mathbb{R}^2$ la curva piana definita dalle equazioni parametriche

$$\mathbf{P}(t) = \left(\frac{1}{4}(3\cos(t) - \cos(3t)), \frac{1}{4}(3\sin(t) - \sin(3t))\right).$$

(1) Si calcoli la curvatura di $\mathbf{P}$.
(2) Si trovi l'evoluta di $\mathbf{P}$.
(3) Si mostri che l'angolo formato dal versore tangente con la direzione dell'asse x è $2t$ e che il punto $\mathbf{Q} = (\cos(t), \sin(t))$ appartiene alla retta tangente a $\mathbf{P}$ in $\mathbf{P}(t)$.

Esercizio 1.bis (9 punti) Sia $\mathbf{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ la sfera centrata nell'origine di raggio unitario. Si consideri l'applicazione differenziabile $F : \mathbf{S}^2 \to \mathbb{R}$ così definita:

$$F(x, y, z) = z$$

e si verifichi che essa è sommersiva tranne che nei poli di $\mathbf{S}^2$.

Esercizio 2. (12 punti) Sia $\mathbf{P} : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbf{R}^3$ la superficie elementare definita dalle equazioni

$$\mathbf{P}(u, v) = (\sin u + 2)\cos v, (\sin u + 2)\sin v, u)$$

(1) Si trovi la natura dei punti di $S = \mathbf{P}((0, 2\pi) \times (0, 2\pi))$ al variare dei parametri u e v.
(2) Si trovino le direzioni asintotiche e le curvature principali nel punto $\mathbf{P}(\pi/2, \pi)$.
(3) Le curve di equazioni $u = \pi/2$ e $u = \pi$ sono geodetiche?

Per ulteriori **3 punti**

4) Si calcolino i simboli di Christoffel Γ^1_{11} e Γ^2_{11} di $\mathbf{P}$.

Esercizio 3. (12 punti) Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie e $p \in S$ un suo punto. Sia $\boldsymbol{\gamma} : J \to S$ una geodetica, parametrizzata con parametro naturale, tale che $\boldsymbol{\gamma}(0) = p$.

(1) Si provi che, se la curvatura κ di $\boldsymbol{\gamma}$ in p non è nulla e $\boldsymbol{\gamma}$ è una curva piana, allora il versore tangente a $\boldsymbol{\gamma}$ in p, $\mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}}(0)$ è un autovettore dell'operatore di Weingarten.
(2) Se ne deduca che se ogni geodetica di S è una curva piana allora S è contenuta in un piano o in una sfera.

GEOMETRIA DIFFERENZIALE - GENNAIO 2012
TRACCIA DI SOLUZIONE

Esercizio 1. Sia $\mathbf{P} : (0, \pi/2) \to \mathbb{R}^2$ la curva piana definita dalle equazioni parametriche

$$\mathbf{P}(t) = \left(\frac{1}{4}(3\cos(t) - \cos(3t)), \frac{1}{4}(3\sin(t) - \sin(3t))\right).$$

(1) Si calcoli la curvatura di $\mathbf{P}$.
(2) Si trovi l'evoluta di $\mathbf{P}$.
(3) Si mostri che l'angolo formato dal versore tangente con la direzione dell'asse x è $2t$ e che il punto $\mathbf{Q} = (\cos(t), \sin(t))$ appartiene alla retta tangente a $\mathbf{P}$ in $\mathbf{P}(t)$.

Il vettore tangente a $\mathbf{P}$ è $\frac{3}{4}(-\sin(t) + \sin(3t), \cos(t) - \cos(3t))$. Osservando che

$$\begin{aligned} -\sin(t) + \sin(2t + t) &= -\sin(t) + 2\sin(t)\cos^2(t) + \sin(t)\cos(2t) \\ &= \sin(t)(-1 + \cos^2(t) + \cos(2t)) \\ &= 2\sin(t)\cos(2t) \end{aligned}$$

e, in modo analogo

$$\cos(t) - \cos(3t) = 2\sin(t)\sin(2t)$$

troviamo che $\dot{\mathbf{P}} = \frac{3}{2}\sin(t)(\cos(2t), \sin(2t))$, e quindi $\mathbf{t} = (\cos(2t), \sin(2t))$ e $\mathbf{n} = (-\sin(2t)), \cos(2t))$. Notiamo che da questa espressione del versore tangente risulta evidente che l'angolo formato dal versore tangente con l'asse x è $2t$. Ora possiamo calcolare la curvatura con le formule usuali, oppure osservare che, posto $\vartheta = 2t$, e ricordando che

$$\mathbf{t}\frac{1}{\kappa} = \frac{d\mathbf{P}}{d\vartheta} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}\frac{dt}{d\vartheta} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{P}}$$

si ha

$$\kappa = \frac{2}{||\dot{\mathbf{P}}||} = \frac{4}{3\sin t}.$$

Avendo trovato κ e $\mathbf{n}$ possiamo scrivere l'equazione dell'evoluta:

$$\mathbf{C} = \mathbf{P} + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}.$$

Esercizio 2. Sia $\mathbf{P} : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbf{R}^3$ la superficie elementare definita dalle equazioni

$$\mathbf{P}(u, v) = (\sin u + 2)\cos v, (\sin u + 2)\sin v, u)$$

(1) Si trovi la natura dei punti di $S = \mathbf{P}((0, 2\pi) \times (0, 2\pi))$ al variare dei parametri u e v.

La matrice B è

$$\frac{1}{||\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v||} \begin{bmatrix} \sin(u)(\sin(u)+2) & 0 \\ 0 & (\sin(u)+2)^2 \end{bmatrix},$$

e quindi i punti sono ellittici se $0 < u < \pi$, parabolici se $u = \pi$, iperbolici se $\pi < u < 2\pi$.

(2) Si trovino le direzioni asintotiche e le curvature principali nel punto $\mathbf{P}(\pi/2, \pi)$.

Il punto è ellittico, e quindi non esistono direzioni asintotiche.
La matrice X nel punto è

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

e quindi le curvature principali sono 1, 1/3.

(3) Le curve di equazioni $u = \pi/2$ e $u = \pi$ sono geodetiche?

Le due curve sono paralleli della superficie di rotazione. I paralleli sono geodetiche se solo se $f'(u_0) = 0$, quindi la prima curva è una geodetica, mentre la seconda non lo è.

(4) Si calcolino i simboli di Christoffel Γ^1_{11} e Γ^2_{11} di $\mathbf{P}$.

Si utilizzino le formule 2.7.4.

Esercizio 3. (12 punti) Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie e $p \in S$ un suo punto. Sia $\boldsymbol{\gamma} : J \to S$ una geodetica, parametrizzata con parametro naturale, tale che $\boldsymbol{\gamma}(0) = p$.

(1) Si provi che, se la curvatura κ di $\boldsymbol{\gamma}$ in p non è nulla e $\boldsymbol{\gamma}$ è una curva piana, allora il versore tangente a $\boldsymbol{\gamma}$ in p, $\mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}}(0)$ è un autovettore dell'operatore di Weingarten.

Poichè $\boldsymbol{\gamma}$ è una geodetica, il suo versore normale $\mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}}$ è diretto come il versore normale alla superficie $\mathbf{N}$. In particolare

$$-k\mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{n}'_{\boldsymbol{\gamma}} = \pm\dot{\mathbf{N}}(\gamma(s)) = \mp L(\mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}}).$$

(2) Se ne deduca che se ogni geodetica di S è una curva piana allora S è contenuta in un piano o in una sfera.

Basta osservare che, se esistono almeno tre direzioni diverse in cui la curvatura normale si annulla, allora il punto è piatto, mentre, se esistono tre direzioni diverse che sono principali a curvatura normale non nulla, allora il punto è umbilico, ed utilizzare la Proposizione 2.4.5.

GEOMETRIA DIFFERENZIALE - FEBBRAIO 2012

N.B.: Gli esercizi 1 e 1 bis sono ALTERNATIVI l'uno all'altro

Esercizio 1. (10 punti) Sia $\mathbf{P}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva definita dalle equazioni parametriche

$$\mathbf{P}(t) = (2 - \cosh(t), t + 1, 2\sinh(t)).$$

(1) Si mostri che $\mathbf{P}$ è un'elica generalizzata.
(2) Si trovi l'evoluta della proiezione di $\mathbf{P}$ sul piano $z = 0$.

Esercizio 1.bis (10 punti)
Si consideri l'applicazione differenziabile $F : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^3$ così definita:

$$F([x_0 : x_1 : x_2]) = ([x_0^2 : x_1^2 : x_2^2 : x_0x_1]).$$

(1) Si stabilisca se F è immersiva nel punto $[1 : 1 : 1]$.
(2) Si mostri che F non è un'embedding.

Esercizio 2. (14 punti) Sia $\mathbf{P}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la superficie elementare definita dalle equazioni

$$\mathbf{P}(u, v) = (u - v, 3uv, u + v)$$

(1) Si trovi la natura dei punti della superficie al variare di u e v.
(2) Si trovino le curvature principali e le direzioni principali nel punto $Q = (0, 0, 0)$.
(3) Si trovino le coniche di Dupin e le direzioni asintotiche nel punto $Q = (0, 0, 0)$.
(4) Si stabilisca se le linee coordinate sono linee asintotiche e/o geodetiche.
(5) Si mostri che la superficie è rigata e si stabilisca se è sviluppabile.

Esercizio 3. (12 punti) Sia $p \in S$ un punto iperbolico di una superficie.

(1) Si provi che le direzioni principali in p bisecano gli angoli formati dalle direzioni asintotiche in p.
(2) Si provi che la curvatura media in p è nulla se e solo se le direzioni asintotiche sono ortogonali.

GEOMETRIA DIFFERENZIALE - FEBBRAIO 2012
TRACCIA DI SOLUZIONE

N.B.: Gli esercizi 1 e 1 bis sono ALTERNATIVI l'uno all'altro

Esercizio 1. (10 punti) Sia $\mathbf{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva definita dalle equazioni parametriche

$$\mathbf{P}(t) = (2 - \cosh(t), t + 1, 2\sinh(t)).$$

(1) Si mostri che $\mathbf{P}$ è un'elica generalizzata.
(2) Si trovi l'evoluta della proiezione di $\mathbf{P}$ sul piano $z = 0$.

Il vettore tangente a $\mathbf{P}$ è $\dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(-\dfrac{\sinh(t)}{\cosh(t)}, \dfrac{1}{\cosh(t)}, 2\right)$, e quindi forma un angolo costante con il versore $(0, 0, 1)$. Ciò prova che $\mathbf{P}$ è un'elica generalizzata.
La proiezione di $\mathbf{P}$ sul piano $z = 0$ è la curva piana $\Gamma(t) = (2-\cosh(t), t+1, 0)$. Con semplici calcoli si trova che la sua curvatura è $\dfrac{1}{\cosh^2(t)}$, e la sua evoluta è

$$C(t) = (-2\cosh(t) + 2, -\cosh(t)\sinh(t) + t + 1, 0).$$

Esercizio 1.bis (10 punti)
Si consideri l'applicazione differenziabile $F : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^3$ così definita:

$$F([x_0 : x_1 : x_2]) = ([x_0^2 : x_1^2 : x_2^2 : x_0x_1]).$$

(1) Si stabilisca se F è immersiva nel punto $[1 : 1 : 1]$.
(2) Si mostri che F non è un'embedding.

Esercizio 2. (14 punti) Sia $\mathbf{P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la superficie elementare definita dalle equazioni

$$\mathbf{P}(u, v) = (u - v, 3uv, u + v)$$

(1) Si trovi la natura dei punti della superficie al variare di u e v.
(2) Si trovino le curvature principali e le direzioni principali nel punto $Q = (0, 0, 0)$.
(3) Si trovino le coniche di Dupin e le direzioni asintotiche nel punto $Q = (0, 0, 0)$.
(4) Si stabilisca se le linee coordinate sono linee asintotiche e/o geodetiche.
(5) Si mostri che la superficie è rigata e si stabilisca se è sviluppabile.

La matrice B è data da

$$\frac{1}{||\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v||}\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix},$$

pertanto tutti i punti della superficie sono iperbolici, e le direzioni asintotiche sono le direzioni delle linee coordinate.

La matrice X nel punto richiesto è data

$$\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{3}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

pertanto le curvature principali so $\mp\frac{3}{2}$ e le direzioni principali (sulla base $\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v$) sono $[1,1]$ e $[-1,1]$ e le coniche di Dupin sono

$$3\eta^2 \mp 3\xi^2 = 2.$$

Le linee coordinate sono rette, e quindi geodetiche.

La superficie si può scrivere come $\mathbf{P}(u,v) = (u,0,u) + v(-1,3u,1)$, e quindi è rigata. Poiché i suoi punti sono iperbolici, essa non è sviluppabile.

Esercizio 3. (12 punti) Sia $p \in S$ un punto iperbolico di una superficie.

(1) Si provi che le direzioni principali in p bisecano gli angoli formati dalle direzioni asintotiche in p.
(2) Si provi che la curvatura media in p è nulla se e solo se le direzioni asintotiche sono ortogonali.

Si consideri in T_pS il sistema di riferimento individuato dalle direzioni principali $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, e si scriva in generico versore tangente come $\mathbf{e}_\vartheta = \mathbf{e}_1 \cos\vartheta + \mathbf{e}_2 \sin\vartheta$. La curvatura normale nelle direzione di $\mathbf{e}_\vartheta$ è data da

$$II(\mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\vartheta) = k_1 \cos^2\vartheta + k_2 \sin^2\vartheta$$

e si annulla quindi per $\tan\vartheta = \mp\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}$, mostrando la prima parte.

La curvatura media è nulla se e solo se $k_1 = -k_2$, e questo accade se e solo se $\tan\vartheta = \mp 1$, cioè se e solo se $\vartheta = \pi/4 + k\pi$.

GEOMETRIA DIFFERENZIALE - GENNAIO 2013

Svolgere al più tre esercizi tra i seguenti

Esercizio 1. (8 punti) Si verifichi che $F : \mathbf{S}^1 \to \mathbb{RP}^1$ data da

$$F(x,y) = \begin{cases} [1-y : x] & y \neq 1 \\ [x : 1+y] & y \neq -1 \end{cases}$$

è ben definita ed è un diffeomorfismo locale.

Esercizio 2. (10 punti) Sia $\mathbf{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ l'elica circolare definita dalle equazioni parametriche

$$\mathbf{P}(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(s), \sin(s), s).$$

e sia $\boldsymbol{\gamma}$ la curva tracciata dagli estremi dei versori tangenti a $\mathbf{P}$. Si calcoli la curvatura di $\boldsymbol{\gamma}$.

Esercizio 3. (12 punti) Sia $\mathbf{P} : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \to \mathbf{R}^3$ la superficie elementare definita dalle equazioni

$$\mathbf{P}(u,v) = (\sinh(u)\cos(v), \sinh(u)\sin(v), v)$$

(1) Si determini la natura dei punti della superficie.
(2) Si determinino le curvature e le direzioni principali della superficie nel punto $\mathbf{P}(0,\pi)$.
(3) La curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\sinh(t)\cos(t), \sinh(t)\sin(t), t)$ è una linea di curvatura?
(4) E' una geodetica?

Esercizio 4. (14 punti) Siano $\mathbf{P} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{Q} : \Omega' \to \mathbb{R}^3$ due superfici elementari, tali che $\mathbf{P}(\Omega) \cap \mathbf{Q}(\Omega')$ sia il sostengo di una curva regolare liscia $\boldsymbol{\gamma}$. Si supponga inoltre che l'angolo tra i versori normali $\mathbf{N_P}$, $\mathbf{N_Q}$ sia costante e non nullo lungo γ. Si provi che $\boldsymbol{\gamma}$ è una linea di curvatura per $\mathbf{P}$ se e solo se lo è per $\mathbf{Q}$.

GEOMETRIA DIFFERENZIALE - GENNAIO 2013
TRACCIA DI SOLUZIONE

Esercizio 1. (8 punti) Si verifichi che $F : \mathbf{S}^1 \to \mathbb{RP}^1$ data da

$$F(x,y) = \begin{cases} [1-y : x] & y \neq 1 \\ [x : 1+y] & y \neq -1 \end{cases}$$

è ben definita ed è un diffeomorfismo locale.

Supponiamo che $y \neq -1, 1$. $F(x,y) = [1-y : x] = [x : 1+y]$ se e solo se

$$\frac{x}{1+y} = \frac{x}{1+y} \Leftrightarrow 1 - y^2 = x^2,$$

quindi F è ben definita. Consideriamo su $\mathbf{S}^1$ l'aperto $U_N = \mathbf{S}^1 \setminus (0,1)$, con la proiezione stereografica. L'immagine di questo spero è contenuta nell'aperto V_0 di $\mathbb{RP}^1$ dei punti di $\mathbb{RP}^1$ la cui prima coordinata è diversa da zero.
L'espressione locale di F in tali carte è

$$t \mapsto \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \mapsto \left[\frac{2}{1+t^2} : \frac{2t}{1+t^2}\right] \mapsto t.$$

Analoga è la verifica per l'altra espressione locale di F.

Esercizio 2. (10 punti) Sia $\mathbf{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ l'elica circolare definita dalle equazioni parametriche

$$\mathbf{P}(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(s), \sin(s), s).$$

e sia $\boldsymbol{\gamma}$ la curva tracciata dagli estremi dei versori tangenti a $\mathbf{P}$. Si calcoli la curvatura di $\boldsymbol{\gamma}$.

Osservando che $\mathbf{P}$ ha il parametro naturale curvatura e torsione di $\mathbf{P}$ si calcolano facilmente (Cfr. Esempio 1.2.5) come

$$\kappa = \frac{a}{a^2+b^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tau = \frac{b}{a^2+b^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Il versore tangente di $\mathbf{P}$ è $\mathbf{t} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin(s), \cos(s), 1)$, il versore normale è $\mathbf{n} = (-\cos(s), \sin(s), 0)$ e il versore binormale è $\mathbf{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(s), -\cos(s), 1)$.
La curva $\mathbf{Q}$ da considerare è $\mathbf{Q} = \mathbf{P} + \mathbf{t}$, quindi possiamo calcolare

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{t} + \kappa\mathbf{n} \qquad \ddot{\mathbf{Q}} = \kappa\mathbf{n} - \kappa^2\mathbf{t} + \kappa\tau\mathbf{b}$$

e quindi

$$||\dot{\mathbf{Q}}|| = \sqrt{1+\kappa^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\dot{\mathbf{Q}} \wedge \ddot{\mathbf{Q}} = \kappa^2\tau\mathbf{t} + \kappa\tau\mathbf{n} + (\kappa+\kappa^3)\mathbf{b} = \frac{\sqrt{2}}{4}\mathbf{t} - \frac{1}{2}\mathbf{n} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\mathbf{b}$$

$$||\dot{\mathbf{Q}} \wedge \ddot{\mathbf{Q}}|| = \sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{9}{8}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

da cui si ricava

$$\kappa_{\mathbf{Q}} = \frac{2}{3}.$$

Esercizio 3. (12 punti) Sia $\mathbf{P} : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \to \mathbf{R}^3$ la superficie elementare definita dalle equazioni

$$\mathbf{P}(u, v) = (\sinh(u)\cos(v), \sinh(u)\sin(v), v)$$

(1) Si determini la natura dei punti della superficie.
(2) Si determinino le curvature e le direzioni principali della superficie nel punto $\mathbf{P}(0, \pi)$.
(3) La curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\sinh(t)\cos(t), \sinh(t)\sin(t), t)$ è una linea di curvatura?
(4) E' una geodetica?

(1) Si determini la natura dei punti della superficie.

La matrice B è

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

e quindi tutti i punti sono iperbolici.

(2) Si determinino le curvature e le direzioni principali della superficie nel punto $\mathbf{P}(0, \pi)$.

La matrice X nel punto è

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

e quindi le direzioni principali sono $[1, 1]$ e $[1, -1]$.

(3) La curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\sinh(t)\cos(t), \sinh(t)\sin(t), t)$ è una linea di curvatura?

Il vettore tangente a $\gamma = \mathbf{P}(t, t)$ è $[1, 1]$. La matrice X nei punti della curva è

$$-\frac{1}{\cosh^2(t)} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

e quindi si verifica che γ è una linea di curvatura.

(4) E' una geodetica?

Se γ fosse anche una geodetica, sarebbe una curva piana (Cf. Esercizio IV 10). Calcolando $\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}$ si verifica che tale vettore non ha direzione costante, e quindi che la curva non è piana.

Esercizio 4. (14 punti) Siano $\mathbf{P} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{Q} : \Omega' \to \mathbb{R}^3$ due superfici elementari, tali che $\mathbf{P}(\Omega) \cap \mathbf{Q}(\Omega')$ sia il sostengo di una curva regolare liscia $\boldsymbol{\gamma}$. Si supponga inoltre che l'angolo tra i versori normali $\mathbf{N_P}$, $\mathbf{N_Q}$ sia costante e non nullo lungo γ. Si provi che $\boldsymbol{\gamma}$ è una linea di curvatura per $\mathbf{P}$ se e solo se lo è per $\mathbf{Q}$.

Poiché $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ è tangente sia a $\mathbf{P}$ che a $\mathbf{Q}$ abbiamo $\mathbf{N_P} \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{N_Q} \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}} = 0$. La direzione tangente a $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ è quindi l'unica direzione comune ai piani tangenti delle due superfici elementari.
Se la curva $\boldsymbol{\gamma}$ è una linea di curvatura per $\mathbf{P}$ allora $\dot{\mathbf{N}}_\mathbf{P} = -L_\mathbf{P}(\dot{\boldsymbol{\gamma}})$ è parallelo a $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$, quindi in tal caso

$$\mathbf{N_Q} \cdot \dot{\mathbf{N}}_\mathbf{P} = 0 \tag{1}$$

Derivando la relazione $\mathbf{N_P} \cdot \mathbf{N_Q} =$ cost. troviamo che la (2) è implica che

$$\dot{\mathbf{N}}_\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N_P} = 0 \tag{2}$$

Pertanto $\dot{\mathbf{N}}_\mathbf{Q}$ è ortogonale a $\mathbf{N_P}$ e a $\mathbf{N_Q}$, ed è quindi parallelo a $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$. Segue che $\boldsymbol{\gamma}$ è una linea di curvatura per $\mathbf{Q}$.

GEOMETRIA DIFFERENZIALE - FEBBRAIO 2013

Svolgere al più tre esercizi tra i seguenti:

Esercizio 1. (8 punti) Sia $\mathbf{P} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva (chiusa semplice) data in coordinate polari da

$$\rho = 2(1 + \cos\vartheta).$$

Si provi che la curvatura di $\mathbf{P}$ è data da $\kappa(\vartheta) = \dfrac{3}{4\sqrt{\rho(\vartheta)}}$.

Esercizio 2. (10 punti) Si consideri il piano proiettivo $\mathbb{RP}^2$, con coordinate $[y_0 : y_1 : y_2]$; siano (U_i, φ_i) le carte usuali su $\mathbb{RP}^2$ e sia p il punto $[1 : 1 : 2]$. Siano $\mathcal{B}_0$ e $\mathcal{B}_1$ le basi di $T_p\mathbb{RP}^2$ associate alle carte (U_0, φ_0) e (U_1, φ_1). Si trovi la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}_0$ a $\mathcal{B}_1$.

Esercizio 3. (12 punti) Sia $\mathbf{P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ la superficie elementare definita dalle equazioni

$$\mathbf{P}(u, v) = (u, u^3 + v^3 + 2uv, v).$$

(1) Si determini la natura dei punti della superficie.
(2) Si determinino le coniche di Dupin della superficie nel punto $\mathbf{P}(0, 0)$.
(3) La curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{P}(t, t)$ è una linea asintotica?
(4) Si calcoli la torsione di $\boldsymbol{\gamma}$.

Esercizio 4. (14 punti) Sia $\mathbf{P} : J \to \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare semplice, con parametro arco, non passante per l'origine. Per ogni $s \in J$ sia $\mathbf{Q}(s)$ il punto simmetrico dell'origine rispetto alla retta tangente a $\mathbf{P}$ in $\mathbf{P}(s)$. Al variare di $s \in J$ i punti $\mathbf{Q}(s)$ descrivono una curve, detta ortotomica di $\mathbf{P}$. Si mostri che, per ogni $s \in J$ il segmento che congiunge $\mathbf{Q}(s)$ e $\mathbf{P}(s)$ è normale a $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{Q}(s)$.

GEOMETRIA DIFFERENZIALE - FEBBRAIO 2013
TRACCIA DI SOLUZIONE

Esercizio 1. (8 punti) Sia $\mathbf{P} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva (chiusa semplice) data in coordinate polari da

$$\rho = 2(1 + \cos\vartheta).$$

Si provi che la curvatura di $\mathbf{P}$ è data da $\kappa(\vartheta) = \dfrac{3}{4\sqrt{\rho(\vartheta)}}$.

Come nell'Esercizio II.5 si ricava la formula

$$\kappa = \frac{2\dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho} + \rho^2}{(\dot{\rho}^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$

dalla quale, con semplici calcoli, si ottiene l'espressione cercata per la curvatura.

Esercizio 2. (10 punti) Si consideri il piano proiettivo $\mathbb{RP}^2$, con coordinate $[y_0 : y_1 : y_2]$; siano (U_i, φ_i) le carte usuali su $\mathbb{RP}^2$ e sia p il punto $[1 : 1 : 2]$. Siano $\mathcal{B}_0$ e $\mathcal{B}_1$ le basi di $T_p\mathbb{RP}^2$ associate alle carte (U_0, φ_0) e (U_1, φ_1). Si trovi la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}_0$ a $\mathcal{B}_1$.

Esercizio 3. (12 punti) Sia $\mathbf{P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ la superficie elementare definita dalle equazioni

$$\mathbf{P}(u, v) = (u, u^3 + v^3 + 2uv, v).$$

(1) Si determini la natura dei punti della superficie.
(2) Si determinino le coniche di Dupin della superficie nel punto $\mathbf{P}(0, 0)$.
(3) La curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{P}(t, t)$ è una linea asintotica?
(4) Si calcoli la torsione di $\boldsymbol{\gamma}$.

(1) Si determini la natura dei punti della superficie.
La matrice B è

$$\frac{1}{||\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v||} \begin{bmatrix} -6u & -2 \\ -2 & -6v \end{bmatrix},$$

e quindi i punti sono

$$\begin{cases} \text{ellittici} & uv > 1/9 \\ \text{parabolici} & uv = 1/9 \\ \text{iperbolici} & uv < 1/9 \end{cases}$$

(2) Si determinino le coniche di Dupin della superficie nel punto $\mathbf{P}(0,0)$.
La matrice X nel punto $\mathbf{P}(0,0)$ è

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix},$$

quindi le curvature principali sono -2 e 2, e le coniche di Dupin hanno equazioni

$$2\xi^2 - 2\eta^2 = \mp 1.$$

(3) La curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{P}(t,t)$ è una linea asintotica? La curva in questione giace nella regione dei punti ellittici per $t > 1/3$, quindi non può essere una linea asintotica.

(4) Si calcoli la torsione di $\boldsymbol{\gamma}$.
la curva $\boldsymbol{\gamma}$ giace nel piano $x = z$, quindi la sua torsione è nulla.

Esercizio 4. (14 punti) Sia $\mathbf{P} : J \to \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare semplice, con parametro arco, non passante per l'origine. Per ogni $s \in J$ sia $\mathbf{Q}(s)$ il punto simmetrico dell'origine rispetto alla retta tangente a $\mathbf{P}$ in $\mathbf{P}(s)$. Al variare di $s \in J$ i punti $\mathbf{Q}(s)$ descrivono una curve, detta ortotomica di $\mathbf{P}$. Si mostri che, per ogni $s \in J$ il segmento che congiunge $\mathbf{Q}(s)$ e $\mathbf{P}(s)$ è normale a $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{Q}(s)$.

Dalla definizione segue che $\mathbf{Q} = 2(\mathbf{P} \cdot \mathbf{n_P})\mathbf{n_P}$; pertanto la direzione tangente a $\mathbf{Q}$ è data da

$$\dot{\mathbf{Q}} = -2\kappa_{\mathbf{P}}((\mathbf{P} \cdot \mathbf{t_P})\mathbf{n} + (\mathbf{P} \cdot \mathbf{n_P})\mathbf{t_P})$$

Il prodotto scalare tra $\dot{\mathbf{Q}}$ e $\mathbf{Q} - \mathbf{P} = 2(\mathbf{P} \cdot \mathbf{n_P})\mathbf{n_P} - \mathbf{P}$ è nullo, quindi $\mathbf{Q} - \mathbf{P}$ è normale a $\mathbf{Q}$.

GEOMETRIA DIFFERENZIALE - GENNAIO 2014

Svolgere al più tre esercizi tra i seguenti

Esercizio 1. (10 punti) Sia $F : S^2 \to S^2$ una rotazione di angolo ϑ intorno ad un asse che passa per il centro della sfera. Si verifichi che F è un'applicazione liscia, scrivendo le sue espressioni locali in coordinate opportune.

[S: Si utilizzino le proiezioni stereografiche dai punti nei quali l'asse di rotazione interseca la sfera su un piano equatoriale perpendicolare. In tali coordinate l'espressione locale di F è una rotazione del piano.]

Esercizio 2. (8 punti) Sia $\mathbf{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da

$$\mathbf{P}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t).$$

(1) Si calcolino la lunghezza della curva tra $t = 0$ e $t = 1$, la curvatura e la torsione. [R: $\ell = \sqrt{3}(e-1), \kappa = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t}, \tau = \frac{1}{3}e^{-t}$].

(2) Si verifichi che la curva ha supporto contenuto nel cono di equazione $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ed inoltre che per ogni punto p che sta sulla curva l'angolo tra la curva e la generatrice del cono passante per p è costante. [S: Si calcoli $\mathbf{P}/||\mathbf{P}|| \cdot \mathbf{t}$.]

Esercizio 3. (12 punti) Si consideri la superficie elementare $\mathbf{P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $\mathbf{P}(u, v) = (\cos(v) - u \sin v, \sin v + u \cos v, v)$.

(1) Si determini la natura dei punti della superficie. [R: Iperbolici]

(2) Si determinino le curvature principali nel punto $\mathbf{Q} = \mathbf{P}(0, 0)$. [R:$\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}$]

(3) Si stabilisca se le linee coordinate sono geodetiche. [R: Solo $u = 0$].

(4) Si mostri che l'immagine della curva $2u + v = 0$ è una linea asintotica.

Esercizio 4. (14 punti) Siano $\mathbf{P} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ una superficie elementare e $\boldsymbol{\gamma} : J \to \mathbb{R}^3$ una curva di Frenet semplice il cui sostegno è contenuto nel sostegno di $\mathbf{P}$.

Per ogni punto del sostegno di $\boldsymbol{\gamma}$ si consideri la terna ortonormale costituita dal versore $\mathbf{t}$ tangente a $\boldsymbol{\gamma}$, dal versore $\mathbf{N}$ normale alla superficie e dal versore $\mathbf{V} = \mathbf{N} \wedge \mathbf{t}$.

(1) Si provi che

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{V}' \\ \mathbf{N}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ -k_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix}.$$

ove k_n è la curvatura normale, k_g è la curvatura geodetica e τ_g, detta *torsione geodetica*, è definita da queste equazioni.

(2) Si provi che $\boldsymbol{\gamma}$ è una linea di curvatura se e solo se $\tau_g \equiv 0$.

[S: Poiché $\mathbf{t}, \mathbf{N}$ e $\mathbf{V}$ sono versori le entrate sulla diagonale sono nulle. Si noti inoltre che la terna considerata è ortonormale. $\mathbf{t}' \cdot \mathbf{V} = k_g$ e $\mathbf{t}' \cdot \mathbf{N} = k_n$ per definizione di curvatura geodetica e di curvatura normale.
$\mathbf{V}' = \mathbf{N}' \wedge \mathbf{t} + \mathbf{N} \wedge \mathbf{t}'$; il primo addendo è normale alla superficie, ed il secondo è tangente. Il primo addendo può quindi essere scritto come $\tau_g \mathbf{N}$.
Inoltre $\mathbf{V}' \cdot \mathbf{t} = \mathbf{N} \wedge \mathbf{t}' \cdot \mathbf{t} = -\mathbf{t}' \wedge \mathbf{N} \cdot \mathbf{t} = -k_g$. Scrivendo $\mathbf{N} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{V}$, derivando e utilizzando le formule già calcolate si ottengono le rimanenti.

Abbiamo già osservato che $\boldsymbol{\gamma}$ è una linea di curvatura se e solo se $\mathbf{N}'$ è parallelo a $\mathbf{t}$. Poiché $\mathbf{N}' = -k_n \mathbf{t} + \tau_g \mathbf{V}$, otteniamo la tesi.]

GEOMETRIA DIFFERENZIALE - 28 GENNAIO 2014

Esercizio 1. (8 punti) Sia $\mathbf{P} : (0, \pi/2) \to \mathbb{R}^2$ la curva piana definita dalle equazioni parametriche

$$\mathbf{P}(t) = (2\cos^3 t, 2\sin^3 t).$$

- Si calcoli la curvatura di $\mathbf{P}$. $[\kappa = -1/(6\cos t \sin t)]$
- Si trovi l'evoluta di $\mathbf{P}$. $[6\sin^2 t \cos t + 2\cos^3 t, 6\cos^2 t \sin t + 2\sin^3 t]$
- Si trovi l'equazione della circonferenza osculatrice nel punto $\mathbf{P}(\pi/6)$. [Centro:$(0, -2)$, raggio $3\sqrt{3}/2$, quindi $x^2 + (y+2)^2 = 27/4$].

Esercizio 2. (10 punti) Si consideri il piano proiettivo $\mathbb{RP}^2$, con coordinate $[y_0 : y_1 : y_2]$; siano (U_i, φ_i) le carte usuali su $\mathbb{RP}^2$ e sia p il punto $[1 : 1 : 2]$. Siano $\mathcal{B}_0$ e $\mathcal{B}_1$ le basi di $T_p\mathbb{RP}^2$ associate alle carte (U_0, φ_0) e (U_1, φ_1). Si trovi la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}_0$ a $\mathcal{B}_1$.
[La matrice cercata è la Jacobiana della funzione di transizione φ_{10}, che manda (t_1, t_2) in $(1/t_1, t_2/t_1)$.]

Esercizio 3. (14 punti) Sia $\mathbf{P} : (0, 2\pi)\times(0, 2\pi) \to \mathbf{R}^3$ la superficie elementare definita dalle equazioni

$$\mathbf{P}(\vartheta, \varphi) = ((2 + \cos\vartheta)\cos\varphi, (2 + \cos\vartheta)\sin\varphi, 2 + \sin\vartheta)$$

(1) Si calcoli l'area della regione $\mathbf{P}(Q)$, ove

$$Q := \left\{ (\vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

[Area$= 2\pi(\pi - 1)$].

(2) Si trovi la natura dei punti di $S = \mathbf{P}((0, 2\pi) \times (0, 2\pi))$ al variare dei parametri ϑ e φ. [Per $\vartheta \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$ punti ellittici, per $\vartheta = \pi/2, 3\pi/2$ punti parabolici, per $\vartheta \in (\pi/2, 3\pi/2)$ punti iperbolici]

(3) Si stabilisca se le linee coordinate sono linee di curvatura, linee asintotiche, geodetiche.

[Linee di curvatura: sì. Linee asintotiche: solo $\vartheta = \pi/2$ e $\vartheta = 3\pi/2$. Geodetiche: solo $\varphi = \varphi_0$ e $\vartheta = \pi$.]

Esercizio 4. (12 punti) Sia $\mathbf{P} : J \to \mathbb{R}^3$ una curva di Frenet. Mostrare che se tutti i piani normali a $\mathbf{P}$ passano per un punto, allora il supporto della curva giace su una sfera.

Assumiamo, senza perdita di generalità, che tutti i piani normali passino per l'origine. Esistono funzioni $\lambda, \mu : J \to \mathbb{R}$ tali che:

$$\mathbf{0} = \mathbf{P}(s) + \lambda(s)\mathbf{n}(s) + \mu(s)\mathbf{b}(s). \tag{1}$$

Prendendo i prodotti scalari con $\mathbf{n}$ e $\mathbf{b}$ troviamo che $\lambda = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$, $\mu = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{b}$, e quindi le due funzioni sono $\mathcal{C}^1$. Derivando la (1) otteniamo

$$\mathbf{0} = \mathbf{t} + \lambda'\mathbf{n} + \lambda(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) + \mu'\mathbf{b} - \tau\mu\mathbf{n}. \tag{2}$$

Annullando i coefficienti di $\mathbf{t}, \mathbf{n}$ e $\mathbf{b}$ otteniamo

$$\lambda = \frac{1}{\kappa}, \quad \mu = -\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}, \quad \mu' = -\frac{\tau}{\kappa}.$$

In particolare

$$\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)' = \frac{\tau}{\kappa},$$

e la curva è sferica per la Proposizione 1.5.8.