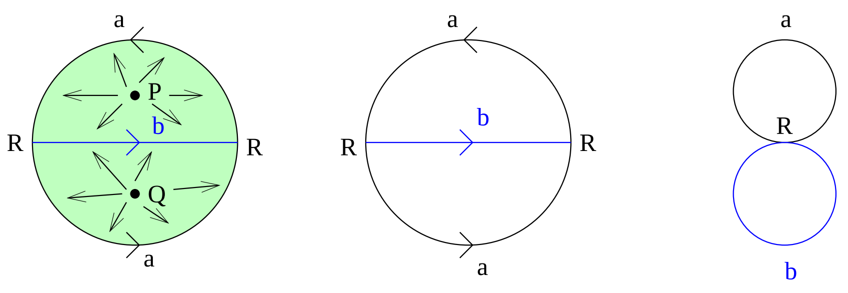
Gianluca Occhetta - Elisa Tasso

Esercizi di Geometria

IV unità didattica



Università di Trento
Dipartimento di Matematica
Via Sommarive 14
38050 - Povo (TN)

Indice

1

Topologia generale

1) *Sia $\mathbb{R}$ la retta reale con la topologia euclidea, e sia $A = \{a, b\}$ un insieme formato da due elementi distinti con la topologia banale. Sia infine $Y = \mathbb{R} \times A$ lo spazio prodotto.*

a) Si stabilisca se Y è di Hausdorff, se è connesso, se è connesso per archi e se è compatto.
b) Si considerino i seguenti sottoinsiemi di Y:

$$Z = ((-1, 1) \times \{a\}) \cup ([-2, 2] \times \{b\}),$$

$$W = ((-1, 1) \times \{a\}) \cup ((-2, 2) \times \{b\}).$$

Si stabilisca se Z e W sono compatti.
c) Si costruisca un cammino in Z che congiunge il punto di coordinate $(0, a)$ con il punto di coordinate $(0, b)$.

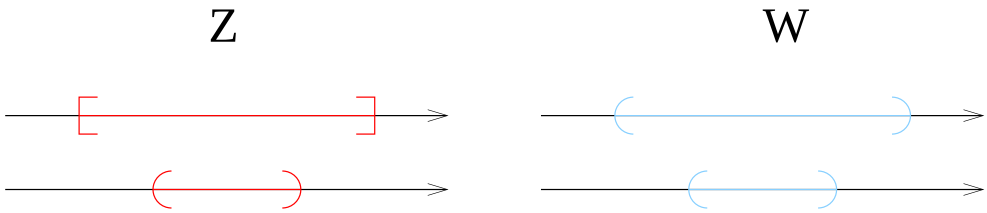
a) Utilizzeremo il risultato generale per cui due spazi topologici X_1 e X_2 sono di Hausdorff (risp. connessi, connessi per archi, compatti) se e solo se $X_1 \times X_2$ è di Hausdorff (risp. connesso, connesso per archi, compatto).
Pertanto, essendo $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ di Hausdorff, connesso e connesso per archi, dobbiamo verificare se $(A = \{a, b\}, \{\emptyset, A\})$ soddisfa o meno tali proprietà.

- A non è di Hausdorff perché l'unico intorno di a è A, lo stesso per b; perciò Y non è di Hausdorff.
- A è connesso perché i soli aperti e contemporaneamente chiusi di A sono A stesso e $\emptyset$; quindi Y è connesso.
- Un arco tra a e b è dato dall'applicazione continua $f : I \to A$ definita da $f(t) = a$ se $t \neq 1$,$f(1) = b$, di conseguenza A è connesso per archi e anche Y lo è.
- Poiché $\mathbb{R}$ non è compatto, Y non è compatto.

b) Le topologie su Z e W sono indotte da quella di Y. Pertanto U è aperto di Z se e solo se esiste V aperto di $\mathbb{R}$ tale che $U = (V \times A) \cap Z$.
Ovvero U è dato da $((V \cap (-1,1)) \times \{a\}) \cup ((V \cap [-2,2]) \times \{b\})$. Sia dunque $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di Z, dove

$$U_i = ((V_i \cap (-1,1)) \times \{a\}) \cup ((V_i \cap [-2,2]) \times \{b\}).$$

Allora $\{V_i \cap [-2,2]\}_i$ è un ricoprimento aperto di $[-2,2]$ che è compatto in quanto intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$. Possiamo quindi estrarre un sottoricoprimento finito di $[-2,2]$: $\mathcal{V} = \{V_{i_k} \cap [-2,2]\}_{k \in K}$.
Dall'essere $(-1,1) \subset [-2,2]$, otteniamo che i corrispondenti U_{i_k} sono un sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$ e quindi Z è compatto.



W non è compatto. Sia infatti $\{U_i\}_i$ il ricoprimento aperto ottenuto ponendo $V_i = (-2 + \frac{1}{i}, 2 - \frac{1}{i})$, essendo $U_i = (V_i \times A) \cap W$, per ogni $i \in \mathbb{N}, i \neq 0$; da esso non è possibile estrarre un sottoricoprimento finito.
Alternativamente, si può concludere che W non è compatto perché la sua immagine in $\mathbb{R}$ mediante la proiezione sul primo fattore (che è continua) non è compatta.

c) Sia $h : I \to Z$ definita da $h(t) = (0,a)$, se $t \neq 1$, mentre sia $h(1) = (0,b)$. L'applicazione h risulta essere continua, sia infatti $B \subset Z$ un aperto dato da $B = (V \times A) \cap Z$, con V aperto di $\mathbb{R}$. Se $0 \notin V$ allora $h^{-1}(B) = \emptyset$, altrimenti $h^{-1}(B) = I$ e h è pertanto un cammino in Z tra i punti $(0,a)$ e $(0,b)$.

---

2) *Nello spazio $\mathbb{R}^3$, dotato della topologia euclidea, si considerino i sottospazi: $X = \mathbf{S}^2 \setminus \{N\}$, dove $N = (0,0,1)$ ed $E = \{(x,y,z) \in \mathbf{S}^2 | z = 0\}$.*
Sia $Y = X/E$ lo spazio quoziente ottenuto per contrazione di E ad un punto e sia $\pi : X \to Y$ la proiezione sul quoziente.

a) Si provi che π è chiusa, ma non aperta.
b) Y è uno spazio compatto?
c) Y è uno spazio connesso?
d) $Y \setminus \pi(E)$ è uno spazio connesso?
e) Si determini una relazione di equivalenza $\sim$ su X in modo che lo spazio quoziente $X/\sim$ sia omeomorfo ad $\mathbf{S}^2$.

---

a) π è chiusa se e solo se per ogni $V \subset X$ chiuso si ha $\pi(V) \subset Y$ chiuso.
Per la topologia quoziente, $\pi(V)$ è chiuso in Y se e solo se $\pi^{-1}(\pi(V))$ è chiuso in X. Se $V \cap E = \emptyset$ allora $\pi^{-1}(\pi(V)) = V$ è chiuso, mentre se $V \cap E \neq \emptyset$ allora $\pi^{-1}(\pi(V)) = V \cup E$ è unione di due chiusi quindi è chiuso.

π non è aperta, consideriamo ad esempio l'aperto U di X, $U = \mathbf{S}^2 \cap \{x > 1/2\}$; in tal caso si ha $\pi^{-1}(\pi(U)) = U \cup E$ che non è aperto, basta prendere un punto p in $E \setminus U$ per non trovare un intorno del punto contenuto in $U \cup E$.

b) Y non è compatto, prendiamo ad esempio come ricoprimento aperto

$$\{\pi(X \cap \{z < \varepsilon\})\}_{0<\varepsilon<1};$$

da esso infatti non è possibile estrarre un sottoricoprimento finito.

c) Y è connesso perché il quoziente di un connesso è connesso e X è connesso perché è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

d) $Y \setminus \pi(E)$ non è connesso perché è unione di due aperti non vuoti e disgiunti, $\pi(X \cap \{z > 0\})$ e $\pi(X \cap \{z < 0\})$.

e) Una relazione d'equivalenza su X che rende il quoziente omeomorfo a $\mathbf{S}^2$ è ad esempio quella che identifica i punti di $X \cap \{z \geq 0\}$ ad un punto.

---

3) *Si consideri* $\mathbb{R}$ *con la topologia* τ *i cui aperti non banali sono gli intervalli* $(-a, a)$ $\quad a > 0$. *Sia* $\mathbf{I}$ *l'intervallo* $[0, 1]$ *dotato della topologia euclidea, e sia* $\mathbf{J}$ *lo stesso intervallo con la topologia indotta da* τ*; sia infine* $\mathbf{Q} = \mathbf{I} \times \mathbf{J}$ *con la topologia prodotto.*

a) Si dimostri che $\mathbf{J}$ *è compatto.*

b) L'applicazione $f : \mathbf{J} \to \mathbf{S}^1$ *definita ponendo* $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ *è continua?*

c) Sia $g : \mathbf{Q} \to \mathbb{R}$ *una funzione continua non costante; si provi che* $g(\mathbf{Q})$ *è un intervallo chiuso e limitato di* $\mathbb{R}$.

d) Sia $\sim$ *la relazione di equivalenza su* $\mathbf{J}$ *che identifica* 0 *con* 1*; si descriva la topologia quoziente su* $\mathbf{J}/\sim$.

---

a) Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$ un ricoprimento aperto di $\mathbf{J}$. Con la topologia indotta da τ, gli aperti non banali di $\mathbf{J}$ sono dati dagli intervalli $[0, a)$, con $0 < a < 1$. Per ricoprire il punto 1 abbiamo dunque bisogno che l'aperto $[0, 1]$ stia in $\mathcal{U}$, quindi esiste un sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$ costituito da $\{[0, 1]\}$ e $\mathbf{J}$ è compatto.
Oppure, poiché $\varepsilon \succeq \tau$, l'identità $Id : \mathbf{I} \to \mathbf{J}$ è continua ed essendo $\mathbf{I}$ compatto (chiuso e limitato con la topologia euclidea), la sua immagine, $\mathbf{J}$, è un compatto.

b) f non è continua perché l'archetto (aperto) su $\mathbf{S}^1$ individuato dai punti tra $(1, 0)$ e $(0, 1)$ e ottenuto percorrendo la circonferenza in senso antiorario a partire da $(1, 0)$ ha come controimmagine l'intervallo $(0, 1/4)$ che non è un aperto di $\mathbf{J}$.

c) $\mathbf{Q}$ è compatto perché è prodotto di compatti; l'immagine di un compatto tramite un'applicazione continua è un compatto, quindi $g(\mathbf{Q})$ è un compatto di $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$, ovvero un intervallo chiuso e limitato, non potendo essere un punto.

d) Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbf{J}/\sim$ è aperto se e solo se $\pi^{-1}(A)$ è aperto di $\mathbf{J}$, dove $\pi : \mathbf{J} \to \mathbf{J}/\sim$ è la proiezione sul quoziente.
Poiché un aperto di $\mathbf{J}$ deve contenere 0, un aperto A di $\mathbf{J}/\sim$ deve contenere la classe $[0] = [1]$ e quindi $\pi^{-1}(A)$ dev'essere un aperto di $\mathbf{J}$ che contiene 0 e 1.
Poiché l'unico aperto di $\mathbf{J}$ che contiene 1 è $[0, 1]$, la topologia su $\mathbf{J}/\sim$ è la topologia banale.

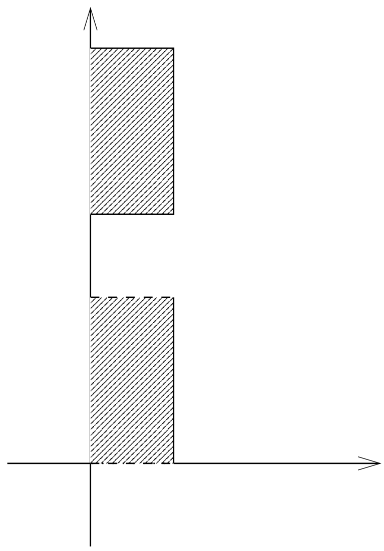
---

4) *Si considerino i seguenti spazi topologici*

- $X = \mathbb{R}$ *con la topologia euclidea* ε.
- $Y = \mathbb{R}$ *con la topologia* τ *i cui aperti non banali sono le semirette* $(-\infty, h)$.
- $Z = \mathbb{R}$ *con la topologia* η *i cui aperti non banali sono le semirette* $(k, +\infty)$.

e siano $(X \times Y, \tau' = \varepsilon \times \tau)$ *e* $(X \times Z, \eta' = \varepsilon \times \eta)$ *gli spazi topologici prodotto.*
In $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *si consideri il sottoinsieme* $S = [0, 1] \times ((0, 2) \cup [3, 5])$ *con le topologie indotte da* τ' *e* η'

a) (S, τ') *è di Hausdorff?*
b) (S, τ') *e* (S, η') *sono compatti?*
c) Si provi che (S, τ') *è connesso.*
d) Si costruisca un cammino in (S, τ') *che congiunga i punti* $A = (0, 1)$ *e* $B = (1, 4)$.



a) Un prodotto di spazi è di Hausdorff se e solo se ciascuno spazio è di Hausdorff. Poiché $([0, 1], \varepsilon)$ è sottospazio di $(\mathbb{R}, \varepsilon)$, esso è di Hausdorff. Pertanto, per stabilire se lo spazio $(S = [0, 1] \times ((0, 2) \cup [3, 5]), \tau' = \varepsilon \times \tau)$ sia di Hausdorff, dobbiamo vedere se $(T = ((0, 2) \cup [3, 5]), \tau)$ è di Hausdorff.
(T, τ) non è di Hausdorff. Siano infatti x e y due punti distinti di T, $(0, h_x) \cap T$ e $(0, h_y) \cap T$ due loro rispettivi intorni (nel caso $x = 5$ l'unico intorno è T). Allora la loro intersezione è sempre non vuota, $((0, h_x) \cap T) \cap ((0, h_y) \cap T) =$

$(0, \min\{h_x, h_y\}) \cap T$.

b) Poiché un prodotto di spazi è compatto se e solo se è prodotto di spazi compatti, studieremo la compattezza di $[0,1]$ e $(0,2) \cup [3,5]$ con le relative topologie.
Lo spazio $([0,1], \varepsilon)$ è compatto perché intervallo chiuso e limitato di $(\mathbb{R}, \varepsilon)$.

• Consideriamo ora un ricoprimento aperto di (T, τ). Poiché l'unico intorno del punto 5 in τ è T stesso, per poter ricoprire T necessariamente T apparterrà al ricoprimento, di conseguenza troviamo un sottoricoprimento finito, $\{T\}$. Risulta che (T, τ) è compatto e quindi anche (S, τ') è compatto.

• Mostriamo ora che $(S, \eta' = \varepsilon \times \eta)$ non è compatto provando che (T, η) non è compatto. Ogni aperto non banale di T sarà del tipo $(k, 5] \cap T$ per $k > 0$. Il ricoprimento aperto di T dato da $\{(\frac{1}{n}, 2) \cup [3,5]\}_{n \geq 1}$ non ammette sottoricoprimenti finiti.

c) Anche per la connessione usiamo il fatto che un prodotto di spazi è connesso se e solo se ciascuno spazio lo è. $([0,1], \varepsilon)$ è connesso perché è un intervallo di $(\mathbb{R}, \varepsilon)$.
Per quanto visto al punto a), presi due punti qualunque in (T, τ) non è possibile trovare due loro intorni aperti disgiunti, in particolare non è possibile scrivere $T = A_1 \cup A_2$ con A_1, A_2 aperti non vuoti e disgiunti. Ne segue che (T, τ) è connesso.

d) Definiamo due cammini in (S, τ'), il primo tra i punti $(0,1)$ e $(1,1)$, il secondo tra i punti $(1,1)$ e $(1,4)$. Il cammino prodotto tra i due costituirà il cammino cercato.
Sia $f : (I, \varepsilon) \to (S, \tau') : t \to (t, 1)$. Per la "proprietà universale dei prodotti" f è continua (la prima componente è l'identità, la seconda è un'applicazione costante), inoltre $f(0) = (0,1)$ e $f(1) = (1,1)$.
Sia $g : (I, \varepsilon) \to (S, \tau')$ l'applicazione definita da

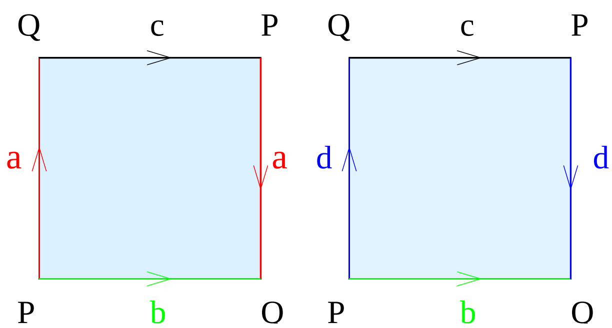
$$g(t) = \begin{cases} (1, 2t+1) & t \in [0, 1/2) \\ (1, 2t+2) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Per provare la continuità di g utilizziamo nuovamente la "proprietà universale dei prodotti" e quindi ci riconduciamo a verificare la continuità della seconda componente che denotiamo con g_2.
Sia $U \subset T$ un aperto non banale, allora U sarà del tipo $U_1 = (0, s)$ per $0 < s \leq 2$ oppure del tipo $U_2 = (0,2) \cup [3, s)$ per $3 < s \leq 5$. Poiché $g_2^{-1}(U_1) = [0, \frac{s-1}{2})$ se $s > 1$, $g_2^{-1}(U_1) = \emptyset$ se $s \leq 1$, $g_2^{-1}(U_2) = [0, \frac{s-2}{2})$ se $s \leq 4$ e $g_2^{-1}(U_2) = I$ se $s > 4$, le controimmagini di aperti di T sono aperti di I e quindi g_2 è continua.

2

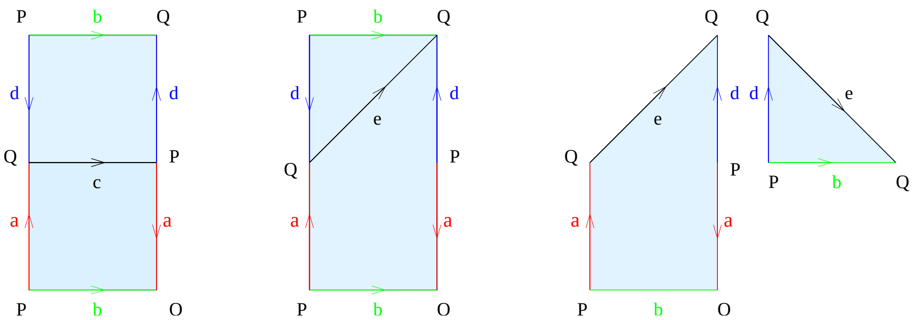
Topologia algebrica

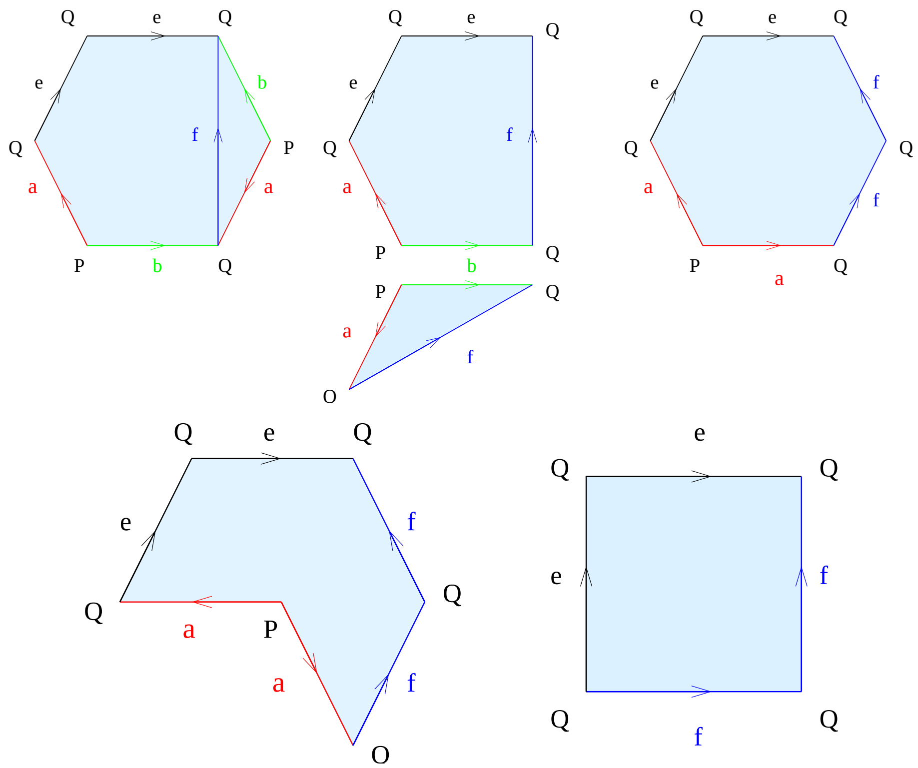
1) *Sia X lo spazio ottenuto dai due quadrati in figura per identificazione dei lati con lo stesso nome.*



a) Si calcoli il gruppo fondamentale di X.
b) X è una superficie topologica?

Ripercorrendo i passi del teorema di classificazione otteniamo

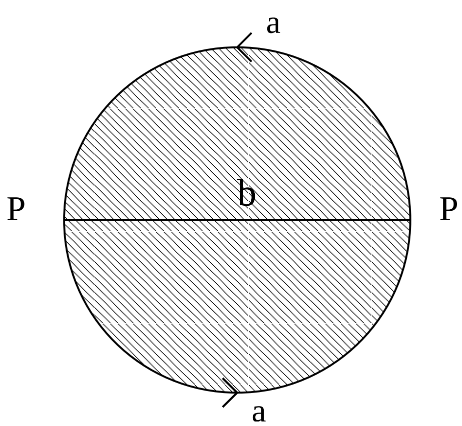




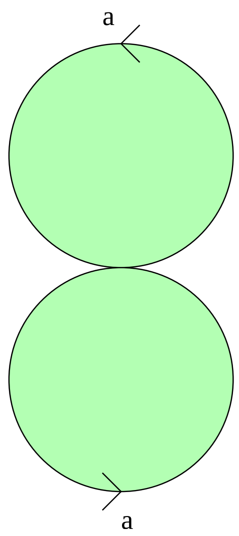
Per il teorema di classificazione delle superfici compatte risulta che lo spazio X è omeomorfo a U_2 e ha pertanto gruppo fondamentale $\pi(X) =< e, g | e^2 g^2 = 1 >$, dove abbiamo posto $g = f^{-1}$.

---

2) *Sia $X = \mathbb{RP}^2$ il piano proiettivo reale, e sia Z lo spazio topologico ottenuto contraendo ad un punto il sottospazio b mostrato in figura. Si calcoli il gruppo fondamentale di Z.*



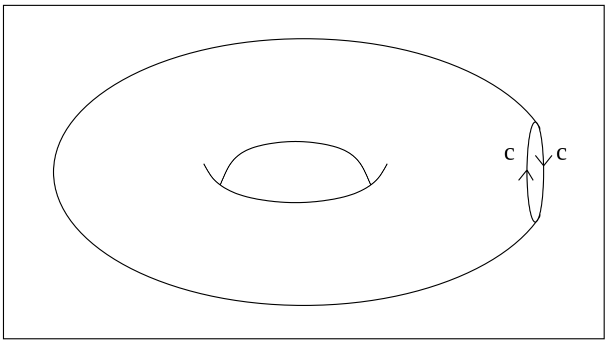
Possiamo rappresentare Z nel seguente modo



Appare chiaro che Z è omeomorfo a $\mathbf{S}^2$, infatti i due dischi uniti in P si incollano lungo il bordo dando origine ad una sfera. Il gruppo fondamentale è perciò banale.

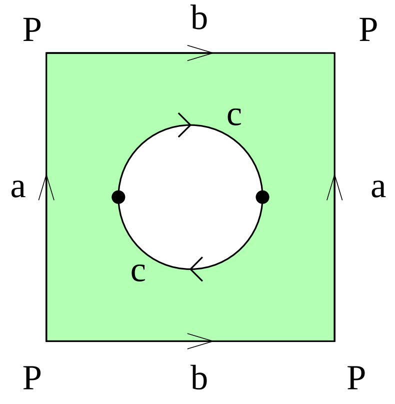
---

3) *Sia T il toro, e X lo spazio ottenuto rimuovendo dal toro un disco aperto e identificando il bordo come in figura.*

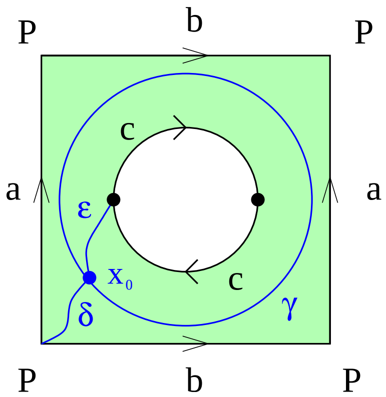


Si calcoli il gruppo fondamentale di X.

Possiamo rappresentare X con il seguente poligono:



Siano x_0 un punto interno al poligono, δ un cammino che congiunge x_0 al vertice del poligono P, ε un cammino che congiunge x_0 a c e γ una circonferenza attorno a c passante per x_0 come indicato.



Siano $U_1 = X \setminus c$, $U_2 = X \setminus \{a, b\}$, allora U_1, U_2 e $U_1 \cap U_2$ sono aperti non vuoti e connessi per archi.
L'aperto U_1 ha come retratto forte di deformazione il bordo esterno del poligono perciò

$$\pi(U_1, x_0) =< \alpha, \beta | \emptyset >$$

dove $\alpha = \delta i_* a \bar{\delta}$, $\beta = \delta i_* b \bar{\delta}$ e i_* è l'isomorfismo tra il gruppo fondamentale del bordo esterno di X e quello di U_1.
La curva c è un retratto forte di deformazione di U_2 quindi

$$\pi(U_2, x_0) =< \Gamma | \emptyset >$$

dove $\Gamma = \varepsilon j_* c \bar{\varepsilon}$ e j_* è l'isomorfismo tra il gruppo fondamentale di c e quello di U_2.
La circonferenza γ è un retratto forte di deformazione di $U_1 \cap U_2$ per cui

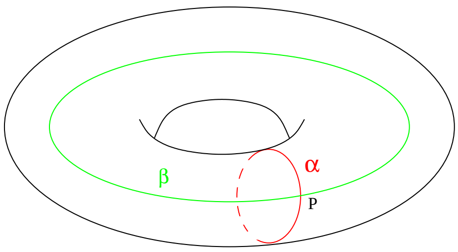
$$\pi(U_1 \cap U_2, x_0) =< \gamma | \emptyset >$$

Definite i_{1*} e i_{2*} le mappe da $\pi(U_1 \cap U_2)$ a $\pi(U_1)$ e a $\pi(U_2)$ rispettivamente, si trova $i_{1*}(\gamma) = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$, $i_{2*}(\gamma) = \Gamma^2$.
Dal teorema di Seifert-Van Kampen segue

$$\pi(X, x_0) =< \alpha, \beta, \Gamma \mid \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = \Gamma^2 >$$

---

4) *Sia T il toro pieno $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^2$, α e β cammini come in figura e $\mathbf{D}$ il disco piano chiuso il cui bordo è α.*



Si stabilisca se i seguenti sottospazi sono retratti e/o retratti di deformazione di T

a) La circonferenza α.
b) La circonferenza β.
c) Il disco $\mathbf{D}$.

---

a) In generale, si ha che se un sottospazio $A \overset{i}{\subset} T$ è un retratto allora, preso un punto $x_0 \in A$, la mappa $i_* : \pi(A, x_0) \to \pi(T, x_0)$ è iniettiva.
Il gruppo fondamentale $\pi(\alpha, P)$ è generato dalla classe del cammino α, e $i_*[\alpha]$ non è altro che la classe del cammino α in $\pi(T, P)$. Poiché in T il cammino α è contraibile, si ha $i_*[\alpha] = [\varepsilon_P]$, quindi i_* non è iniettiva e α non è retratto di T, e quindi non è neppure retratto di deformazione.
b) Possiamo identificare la circonferenza β con un sottospazio di T del tipo $\mathbf{S}^1 \times \{\bar{y}\}$; la mappa $r : T \to \beta$ che manda (x, y) in $(x, \bar{y})$, continua per la proprietà universale dei prodotti, è una retrazione.
Poichè il segmento che unisce (x, y) a $r(x, y)$ è contenuto in T per ogni (x, y), β è un retratto di deformazione di T.
c) Il disco $\mathbf{D}$ non è un retratto di deformazione di T in quanto il gruppo fondamentale del disco è banale, mentre quello di T è isomorfo a $\mathbb{Z}$.
Il disco è un retratto di T, come si può vedere utilizzando come retrazione la proiezione sul secondo fattore seguita da un omeomorfismo tra $\mathbf{D}^2$ e $\mathbf{D} \cong \{\bar{x}\} \times \mathbf{D}^2$.

3

Temi d'esame

21 novembre 2002

---

1) *Sia* $\mathbf{I}$ *l'intervallo* $[0,1]$ *con la topologia euclidea, e sia* $\mathbf{J}$ *l'intervallo* $[0,1]$ *con la topologia i cui aperti non banali sono gli intervalli* $[0,k)$ *con* $0 < k \leq 1$. *Sia* $X = \mathbf{J} \times \mathbf{I}$ *con la topologia prodotto.*

a) Stabilire se X *è di Hausdorff.*
b) Fornire un esempio di sottoinsieme infinito di X *che sia compatto, ma non chiuso.*
c) Dimostrare che $Z = \{0,1\} \times \mathbf{I}$ *è connesso per archi.*
d) Dimostrare che $W = \mathbf{J} \times \{0,1\}$ *non è connesso.*

---

a) $X = \mathbf{J} \times \mathbf{I}$ è di Hausdorff se e solo se lo sono entrambi gli spazi $\mathbf{J}$ e $\mathbf{I}$.
Poiché $\mathbf{I}$ è sottospazio dello spazio di Hausdorff $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$, anche esso è di Hausdorff.
Lo spazio $\mathbf{J}$ con la topologia i cui aperti non banali sono $[0,k)$ con $0 < k \leq 1$ non è di Hausdorff, infatti, ad esempio, due intorni qualunque dei punti $1/3$ e $1/2$ si intersecano almeno in $[0,1/3] \neq \emptyset$.

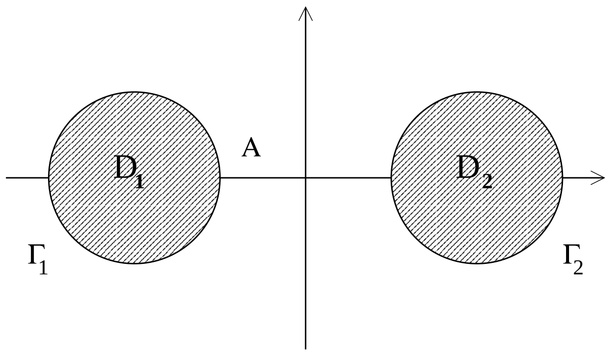
b) Un esempio di sottoinsieme infinito di X compatto ma non chiuso è l'intervallo $[0,1/2] \times \mathbf{I}$.
Dalla compattezza di $\mathbf{I}$, intervallo chiuso e limitato di $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$, segue che è sufficiente verificare la compattezza di $[0,1/2]$.
Ora, ogni suo ricoprimento aperto deve contenere un aperto del tipo $([0,k) \cap [0,1/2])$, con $k > 1/2$. Dunque $\{[0,1/2]\}$ è un sottoricoprimento finito.
Inoltre $[0,1/2]$ non è chiuso perché il suo complementare in $\mathbf{J}$, $(1/2,1]$ non è aperto. Di conseguenza $[0,1/2] \times \mathbf{I}$ non è chiuso nella topologia prodotto.

c) Un prodotto di spazi è connesso per archi se e solo se gli spazi lo sono.
$\mathbf{I}$ è connesso per archi, quindi verifichiamo la proprietà per $\{0,1\}$ con la topologia indotta da quella di $\mathbf{J}$.
Gli aperti non banali di $\{0,1\}$ si ottengono intersecando l'insieme con gli intervalli $[0,k)$ con $0 < k \leq 1$ da cui risulta l'unico aperto $\{0\}$.
Un arco in $\{0,1\}$ tra 0 e 1 è dato dall'applicazione $f : \mathbf{I} \to \{0,1\}$ che associa 0 a $t \neq 1$, 1 a $t = 1$. Infatti $f^{-1}(0) = [0,1)$ è aperto di $\mathbf{I}$.

d) Lo spazio $\{0,1\}$ con la topologia indotta da $\mathbf{I}$ non è connesso, essa infatti è equivalente a quella discreta su $\{0,1\}$ per cui $\{0,1\} = \{0\} \cup \{1\}$ è unione di due aperti non vuoti e disgiunti.
Ne segue che il prodotto $W = \mathbf{J} \times \{0,1\}$ non è connesso.

---

2) *Nel piano $\mathbb{R}^2$, dotato della topologia euclidea, si considerino i seguenti sottospazi: $D_1 = \{(x,y) | (x+2)^2 + y^2 \leq 1\}$, $D_2 = \{(x,y) | (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$, $\Gamma_1 = \partial D_1$, $\Gamma_2 = \partial D_2$, $A = (-1,0)$.*



Siano $X = D_1 \cup D_2$, $Y = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ e sia $X^* = X/Y$; si denoti con $\pi : X \to X^*$ la proiezione sul quoziente.

a) Si provi che π è chiusa, ma non aperta.
b) Si stabilisca se X^* è compatto, connesso, di Hausdorff.
c) $X^* \setminus \pi(A)$ è connesso?
d) $\pi(\mathring{D}_2 \cup A)$ è compatto?

Identificando ciascun disco con un emisfero di $\mathbf{S^2}$, abbiamo che il quoziente X^* è omeomorfo a $\mathbf{S^2} \vee \mathbf{S^2}$.

a) La proiezione π è chiusa se e solo se per ogni $V \subset X$ chiuso si ha $\pi(V) \subset X^*$ chiuso.
Nella topologia quoziente, $\pi(V)$ è chiuso se e solo se $\pi^{-1}(\pi(V))$ è chiuso.
Se $V \cap (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = \emptyset$ allora $\pi^{-1}(\pi(V)) = V$, mentre se $V \cap (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \neq \emptyset$ allora $\pi^{-1}(\pi(V)) = V \cup (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ è unione di tre chiusi ($\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ è la frontiera di X) quindi è chiuso.
π non è aperta, consideriamo ad esempio un aperto di X ottenuto come intersezione di un disco aperto U di $\mathbb{R}^2$ tagliato da Γ_1, $U = \{(x,y) | (x+1)^2 + y^2 < 1\}$.
In tal caso si ha $\pi^{-1}(\pi(U \cap X)) = (U \cap X) \cup (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ e tale insieme non è aperto, basta prendere un punto in $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \setminus (U \cap X)$ per non trovare un intorno del punto contenuto in $(U \cap X) \cup (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$.

b) X^* è compatto, perché quoziente di un compatto. X infatti risulta essere compatto perché è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$, perciò compatto per un corollario alla proposizione "chiuso di compatto".

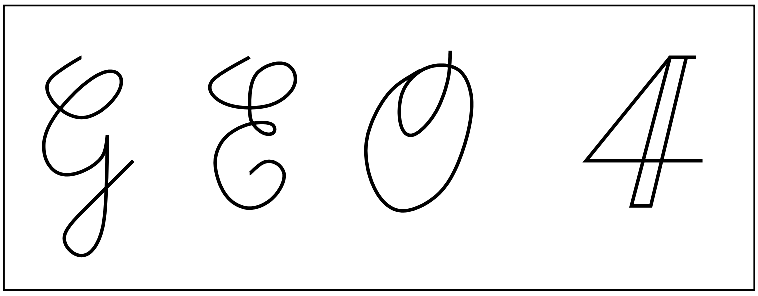
X^* è connesso. Infatti $X^* \simeq (\mathbf{S^2} \vee \mathbf{S^2})$ e quest'ultimo spazio si può ottenere come quoziente di $\mathbf{S^2}$ contraendo l'equatore ad un punto. Poiché $\mathbf{S^2}$ è connesso, il quoziente di un connesso è connesso e poiché la connessione è una proprietà invariante per omeomorfismi segue che X^* è connesso.
(In altro modo, $\mathbf{S^2} \vee \mathbf{S^2}$ è connesso per archi, quindi connesso.)
X^* è di Hausdorff, perché X è compatto e di Hausdorff e la proiezione è chiusa.

c) Mostriamo che $X^* \setminus \pi(A)$ non è connesso:
$\pi(A) = \pi(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ e dunque $X^* \setminus \pi(A) = \pi(X \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2))$; $\pi(D_1 \setminus \Gamma_1)$ e $\pi(D_2 \setminus \Gamma_2)$ sono aperti non vuoti e disgiunti di $X^* \setminus \pi(A)$ e $X^* \setminus \pi(A) = \pi(D_1 \setminus \Gamma_1) \cup \pi(D_2 \setminus \Gamma_2)$.

d) $\pi(\overset{\circ}{D}_2) \simeq \mathbf{S^2} \setminus \{N\}$ e $\pi(\overset{\circ}{D}_2 \cup A) \simeq \mathbf{S^2}$, poiché $\mathbf{S^2}$ è compatto perchè chiuso e limitato di $\mathbb{R}^3$ e poiché la compattezza è una proprietà invariante per omeomorfismi, $\pi(\overset{\circ}{D}_2 \cup A)$ è compatto.
(In alternativa si può vedere $\pi(\overset{\circ}{D}_2 \cup A)$ come complementare in X^* di $\pi(\overset{\circ}{D}_1)$ che è aperto e usare il fatto che X^* è compatto con la proposizione "chiuso di compatto".)

---

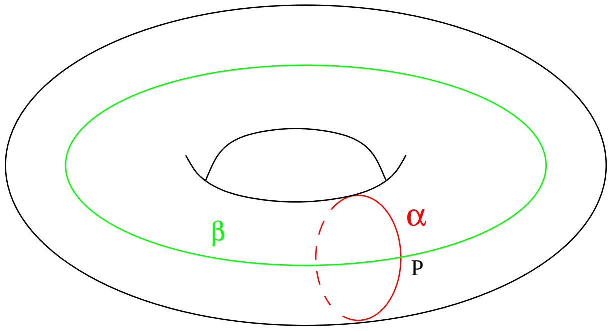
3) *Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$, con la topologia indotta da quella euclidea, e li si suddividano in classi di omeomorfismo e di equivalenza omotopica.*



$\mathcal{G}$ e $\mathcal{E}$ sono omeomorfi, e quindi omotopicamente equivalenti, perché possiamo mandare con continuità i punti di uno sull'altro e viceversa.
Su $\mathcal{E}$ ci sono due punti (i due nodi) che sconnettono lo spazio in tre componenti connesse mentre su $\mathcal{O}$ non ci sono tali punti quindi $\mathcal{E}$ (e $\mathcal{G}$) non è omeomorfo a $\mathcal{O}$; analogamente per 4.
$\mathcal{E}$ (e quindi $\mathcal{G}$) ha peró lo stesso tipo di omotopia di $\mathcal{O}$ poiché entrambi hanno l'omotopia di due circonferenze unite in un punto.
Infine 4 non è omeomorfo a $\mathcal{O}$ né ha lo stesso tipo di omotopia di $\mathcal{O}$ o $\mathcal{E}$ perché il suo gruppo fondamentale è generato da 3 elementi mentre gli altri hanno gruppo fondamentale generato da due elementi.

---

4) *Sia T il toro, e α e β cammini sul toro come in figura.*

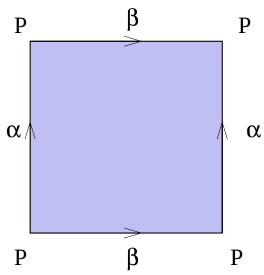


Sia X lo spazio topologico ottenuto contraendo a un punto α, sia Y lo spazio topologico ottenuto contraendo ad un punto β e sia Z lo spazio topologico ottenuto contraendo ad un punto $\alpha \cup \beta$.

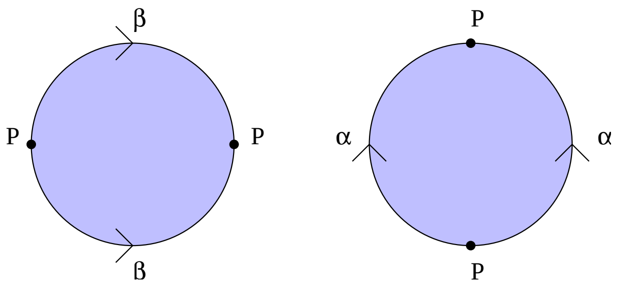
a) Si calcolino i gruppi fondamentali di X, di Y e di Z rispetto al punto immagine del punto P tramite le proiezioni sui quozienti.

b) X, Y e Z hanno lo stesso tipo di omotopia? Sono omeomorfi?

Rappresentiamo il toro con il poligono piano seguente



Contraendo α o β otteniamo rispettivamente:



da cui è evidente che X e Y sono omeomorfi, e quindi anche omotopicamente equivalenti. Applichiamo il teorema di Seifert-Van Kampen per calcolare il gruppo fondamentale di X. Siano dunque $U_1 = X \setminus \{x\}$ e $U_2 = X \setminus \{\beta\}$, dove $x \notin \beta$ è un punto di X.
Il bordo di X è un retratto forte di deformazione di U_1 perciò $\pi(U_1) =< \beta|\emptyset >$; U_2 ha gruppo fondamentale banale, $\pi(U_2) = 1$; $U_1 \cap U_2$ si retrae su una circonferenza γ attorno a x e pertanto $\pi(U_1 \cap U_2) =< \gamma|\emptyset >$. L'immagine di γ in $\pi(U_1)$ è $\beta\beta^{-1}$ mentre è il cammino banale in $\pi(U_2)$, quindi

$$\pi(X) =< \beta|\beta\beta^{-1} = 1 >=< \beta|\emptyset >$$

Procediamo in maniera analoga per Y e otteniamo

$$\pi(Y) =< \alpha|\alpha\alpha^{-1} = 1 >=< \alpha|\emptyset >$$

Lo spazio Z è omeomorfo ad un disco con il bordo identificato a un punto, ovvero è omeomorfo a una sfera $\mathbf{S}^2$ e pertanto $\pi(Z) =< \emptyset \mid \emptyset >$. Il gruppo fondamentale di Z non è isomorfo a quello di X (né a quello di Y) quindi Z non è omeomorfo né ha lo stesso tipo di omotopia di X o Y.

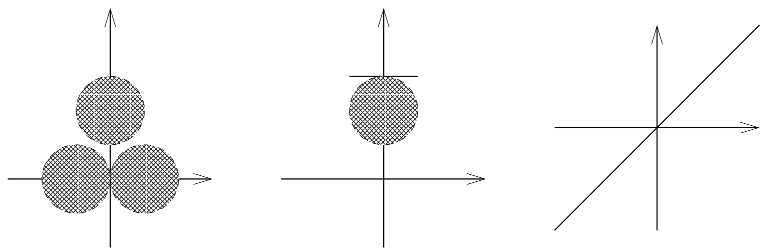
6 febbraio 2003

---

1) *Sia X la retta reale con la topologia euclidea, e sia Y la retta reale con la topologia i cui aperti non banali sono gli intervalli $(-a,a)$ con $a > 0$ e sia $Z = X \times Y$ con la topologia prodotto. In Z si considerino i seguenti sottospazi con la topologia indotta:*

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y) \in Z \mid (x+1)^2 + y^2 < 1\} \\ D_2 &= \{(x,y) \in Z \mid x^2 + (y-2)^2 < 1\} \\ D_3 &= \{(x,y) \in Z \mid (x-1)^2 + y^2 < 1\} \\ I &= [-1,1] \times \{3\} \\ \Delta &= \{(x,y) \in Z \mid y = x\}. \end{aligned}$$

a) Si stabilisca se qualcuno dei sottospazi $U_1 = D_1 \cup D_2$, $U_2 = D_1 \cup D_3$, $U_3 = D_2 \cup D_3$ è connesso.
b) Il sottospazio D_2 è compatto? Il sottospazio $D_2 \cup I$ è compatto?
c) Il sottospazio Δ è chiuso? Quale topologia è indotta su Δ dalla topologia di Z?



---

a) U_1 è connesso. Supponiamo infatti per assurdo che non lo sia, allora si avrebbe $U_1 = A \cup B$, con A e B aperti non vuoti e disgiunti di U_1. Allora $D_1 = (A \cap D_1) \cup (B \cap D_1)$ è una decomposizione di D_1 in aperti disgiunti. La topologia euclidea su $\mathbb{R}^2$ è più fine della topologia di Z quindi $Id : \mathbb{R}^2 \to Z$ è continua ed essendo $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ connesso, $D_1 \subset Z$ è connesso. Possiamo supporre allora $D_1 = A \cap D_1$. Analogamente procediamo per D_2, deducendo $D_2 = B \cap D_2$ (se fosse $D_2 = A \cap D_2$ avremmo $A = U_1$). Allora $A = D_1$ e $B = D_2$, ma D_2 non è aperto di U_1 perché ogni aperto di Z che contiene D_2, contiene necessariamente anche $D_1 \cap \{-1 < x < 0\}$.
Con un ragionamento analogo si dimostra che U_3 è connesso.
Invece U_2 non è connesso perché D_1 e D_3 sono aperti non vuoti e disgiunti di U_2.

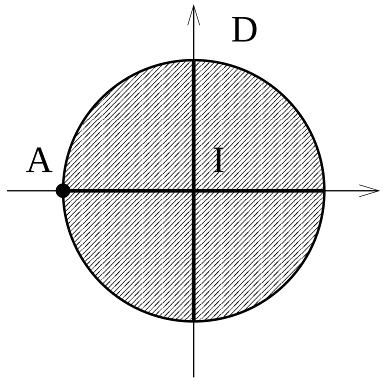
b) D_2 non è compatto, infatti la sua immagine tramite la prima proiezione è un intervallo aperto in $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea, e tale insieme non è compatto. Vediamo che $D_2 \cup I$ è compatto. Ogni ricoprimento aperto di $D_2 \cup I$, $\{(D_2 \cup I) \cap \big(A \times (-a,a)\big)\}_{a,A}$, dà origine ad un ricoprimento aperto di I, $\{I \cap \big(A \times (-a,a)\big)\}_{a,A}$. I è compatto in Z perché lo è in $\mathbb{R}^2$ e quindi è possibile estrarre un sottoricoprimento finito per I. Gli aperti $A \times (-a,a)$ associati al sottoricoprimento per I forniscono anche un corrispondente sottoricoprimento finito per $D_2 \cup I$.

c) Sia $z = (x, y) \in Z \setminus \Delta$ tale che $(y - x)(y + x) > 0$ e sia A un aperto elementare di Z che contiene z. Allora $A = B \times (-a, a)$, con B aperto di X e $a > 0$, perciò $A \cap \Delta \neq \emptyset$. Segue allora che $Z \setminus \Delta$ non è aperto, ovvero Δ non è chiuso.
La topologia su Δ indotta da Z è quella euclidea, infatti le intersezioni $\Delta \cap \big((x_1, x_2) \times (-a, a)\big)$ sono degli intervallini su Δ, cosí come le intersezioni con dischi aperti di $\mathbb{R}^2$.

---

2) *Nel piano $\mathbb{R}^2$, dotato della topologia euclidea, si considerino i sottospazi*

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$
$$I = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup ([-1, 1] \times \{0\})$$
$$A = (-1, 0)$$



Sia $D^* = D/I$; si denoti con $\pi : D \to D^*$ la proiezione sul quoziente.

a) Si provi che π è chiusa, ma non aperta.
b) Si stabilisca se D^* è uno spazio di Hausdorff.
c) $D^* \setminus \pi(A)$ è connesso?
d) Si determini un sottospazio $E \subset D$ tale che $D/(I \cup E)$ sia omeomorfo all'unione a un punto di quattro sfere.

---

a) Sia $V \subset D$ un chiuso. Se $V \cap I = \emptyset$ allora $\pi^{-1}(\pi(V)) = V$ e quindi nella topologia quoziente $\pi(V)$ è chiuso. Se $V \cap I \neq \emptyset$ allora $\pi^{-1}(\pi(V)) = V \cup I$ è unione di due chiusi di D quindi è chiuso. Di conseguenza π è chiusa.
Se $U \subset D$ è un aperto che non interseca I oppure che contiene I allora $\pi^{-1}(\pi(U)) = U$ e perciò $\pi(U)$ è aperto, se invece $U \cap I \neq \emptyset$ e $I \not\subseteq U$ allora $\pi^{-1}(\pi(U)) = U \cup I$ non è aperto (prendendo un punto di $I \setminus U$ non si può trovare un intorno del punto tutto contenuto in $U \cup I$) e nella topologia quoziente $\pi(U)$ non è aperto, quindi π non è aperta.

b) D è di Hausdorff perché è sottospazio di $\mathbb{R}_\varepsilon$ che è di Hausdorff. Poiché D è compatto e di Hausdorff e la proiezione π è chiusa, abbiamo che D^* è di Hausdorff.

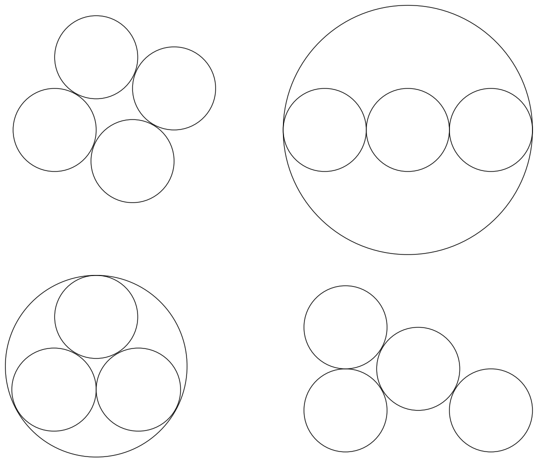
c) Mostriamo che $D^* \setminus \pi(A)$ non è connesso. Siano $D_1 = D \cap \{x, y > 0\}$, $D_2 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$, $D_3 = D \cap \{x < 0, y > 0\}$ e $D_4 = D \cap \{x, y < 0\}$.

Allora $D^* \setminus \pi(A) = D^* \setminus \pi(I) = \bigcup_{i=1}^{4} \pi(D_i)$ e ciascun $\pi(D_i)$ è aperto perché D_i è aperto di D che non interseca I. In particolare possiamo scrivere $D^* \setminus \pi(A) = \big(\pi(D_1) \cup \pi(D_2)\big) \cup \big(\pi(D_3) \cup \pi(D_4)\big)$ come unione di due aperti disgiunti.

d) Osserviamo anzitutto che D^* è omeomorfo a quattro dischi uniti in un punto. Considerando $E = \mathbf{S}^1$ otteniamo che $D/(I \cup E)$ è omeomorfo all'unione a un punto di quattro sfere, infatti su ciascun disco il bordo viene a corrispondere a un punto e $\mathbf{D}^2/\mathbf{S}^1 \simeq \mathbf{S}^2$.

---

3) *Nel piano euclideo $\mathbb{R}^2$ si considerino gli spazi topologici dati da unioni di* <u>*circonferenze*</u> *come in figura*



e li si suddividano in classi di omotopia e di omeomorfismo.

Il primo e il secondo spazio sono omeomorfi e dunque omotopicamente equivalenti. Infatti tagliando temporaneamente in un punto non di intersezione una delle circonferenze del primo e ricucendo il taglio dalla parte opposta rispetto alle altre tre circonferenze si ottiene il secondo spazio (si fa uso del teorema 5.5 a pag. 38 del Kosniowski).
Il terzo ha il gruppo fondamentale generato da 7 elementi mentre gli altri 3 spazi hanno 5 generatori, quindi il terzo non è omeomorfo né omotopicamente equivalente agli altri tre spazi.
Il quarto non è omeomorfo ai precedenti perché, a differenza degli altri spazi, ha un punto che sconnette in due componenti connesse. È però omotopicamente equivalente ai primi due in quanto sono retratti forte di deformazione di $\mathbb{R}^2 \setminus \{5 \text{ punti}\}$.

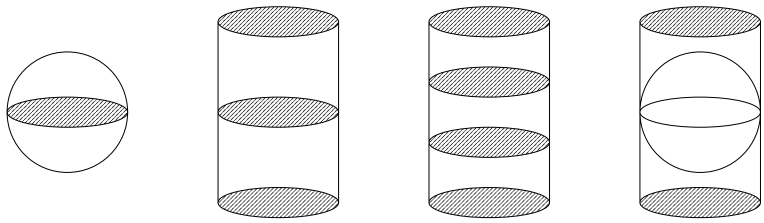
---

4) *Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ e nel piano euclideo $\mathbb{R}^2$ si condiderino i seguenti sottospazi:*

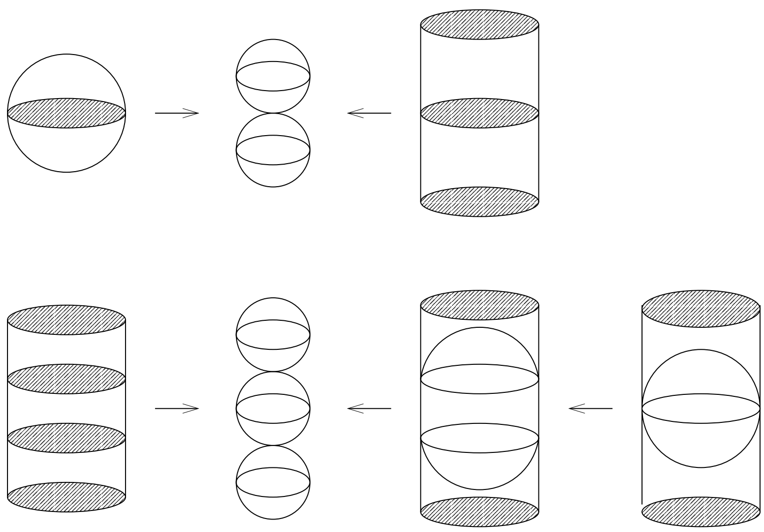
$$\mathbf{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$$
$$\mathbf{D}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$$
$$\Gamma = \partial\mathbf{D}^2 \times [-3/2, 3/2] \subset \mathbb{R}^3$$

Si calcolino i gruppi fondamentali dei seguenti spazi topologici:

1. $X_1 = \mathbf{S}^2 \cup (\mathbf{D}^2 \times \{0\})$.
2. $X_2 = \Gamma \cup (\mathbf{D}^2 \times \{-3/2, 0, 3/2\})$.
3. $X_3 = \Gamma \cup (\mathbf{D}^2 \times \{-3/2, -1/2, 1/2, 3/2\})$.
4. $X_4 = \Gamma \cup (\mathbf{D}^2 \times \{-3/2, 3/2\}) \cup \mathbf{S}^2$.



X_1 e X_2 sono omotopicamente equivalenti a due sfere unite in un punto, mentre X_3 e X_4 sono omotopicamente equivalenti a tre sfere come in figura.



Applicando l'osservazione contenuta nel secondo esempio di applicazione del teorema di Seifert-Van Kampen possiamo concludere che tutti gli spazi considerati hanno gruppo fondamentale banale.

14 aprile 2003

---

1) *Sia X l'intervallo $[-1, 1]$ con la topologia τ così definita: U è aperto non banale di X se e solo se U non contiene il punto $\{0\}$ oppure U contiene l'intervallo $(-1, 1)$.*

a) (X, τ) è uno spazio di Hausdorff?
b) (X, τ) è uno spazio connesso?
c) (X, τ) è uno spazio di compatto?
d) Il sottospazio $X \backslash \{0\}$ con la topologia indotta da τ è compatto?

---

a) (X, τ) non è di Hausdorff, infatti se consideriamo il punto 0 e un punto $x \neq 1, -1$, poiché un qualunque intorno U di 0 deve contenere $(-1, 1)$, ovvero deve essere $(-1, 1)$ oppure $[-1, 1)$ oppure $(-1, 1]$ o tutto X, segue che $x \in U$ e quindi non esistono intorni di 0 e x disgiunti.
b) (X, τ) non è connesso: scrivendo $X = \{-1\} \cup (-1, 1]$ otteniamo una decomposizione di X in due aperti non vuoti e disgiunti.
c) Mostriamo che (X, τ) è compatto. Ogni ricoprimento di X deve contenere un intorno di 0 che per quanto osservato in a) conterrà $(-1, 1)$. Inoltre nel ricoprimento ci saranno almeno un intorno di -1 e un intorno di 1. Questi tre aperti danno luogo ad un sottoricoprimento finito del ricoprimento iniziale.
d) Il sottospazio $X \setminus \{0\}$ non è compatto, perché la topologia indotta su tale sottoinsieme (infinito) è la topologia discreta.

---

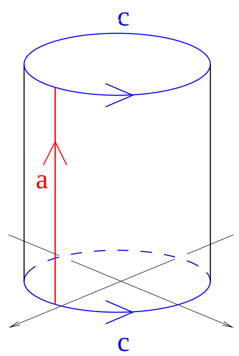
2) *Sia (X, τ) uno spazio topologico, e sia $(X \times X, \tau \times \tau)$ lo spazio prodotto.*
Si provi che (X, τ) è di Hausdorff se e solo se il sottospazio $\Delta \subset X \times X$ definito in questo modo $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ è chiuso.
Sia poi $\mathbb{R}$ la retta reale con la topologia euclidea; si forniscano un esempio di un sottospazio $Y \subset \mathbb{R}$ tale che $\mathbb{R}/Y$ sia di Hausdorff e un esempio di un sottospazio $Z \subset \mathbb{R}$ tale che $\mathbb{R}/Z$ non sia di Hausdorff.

Supponiamo che lo spazio (X, τ) sia di Hausdorff e consideriamo un punto $(x, y) \in \Delta^c$, vale a dire $x \neq y$. Allora esistono intorni di x e y disgiunti: U_x,U_y con $U_x \cap U_y = \emptyset$. In altri termini, $(U_x \times U_y) \cap \Delta = \emptyset$. In $(X \times X, \tau \times \tau)$, $U_x \times U_y \subset \Delta^c$ è un intorno aperto di (x, y) quindi Δ^c è aperto.
Viceversa, sia Δ chiuso in $X \times X$ e siano x e y due punti distinti di X. Poiché Δ^c è aperto, esiste $V_{(x,y)} \subset \Delta^c$ intorno aperto di (x, y). Allora, indicate con π_1 e π_2 le proiezioni di $X \times X$ sul primo e sul secondo fattore rispettivamente, $\pi_1(V_{(x,y)})$ e $\pi_2(V_{(x,y)})$ sono aperti di X, rispettivamente intorni di x e di y (le proiezioni sono applicazioni aperte). Poiché $\Delta \cap V_{(x,y)} = \emptyset$ si ha che $\pi_1(V_{(x,y)}) \cap \pi_2(V_{(x,y)}) = \emptyset$ e quindi X è uno spazio di Hausdorff.

Consideriamo ora $\mathbb{R}$ e i sottospazi $Y = [0,1]$ e $Z = [0,1)$.
Il quoziente $\mathbb{R}/Y$ è di Hausdorff, infatti due punti non appartenenti a Y hanno intorni disgiunti (per intorni "piccoli" la situazione è omeomorfa a quella in $\mathbb{R}$), un punto $[x] = x \in Y^c$ e il punto $[y] = [0]$, con $y \in Y$, pure (per esempio, se $x < 0$, possiamo prendere $(x - \delta/3, x + \delta/3)$ e $(-\delta/3, 1 + \delta)$, dove $\delta = |x|$).
Invece il quoziente $\mathbb{R}/Z$ non è di Hausdorff, perché se consideriamo le classi distinte $[0]$ e $[1]$, un qualunque intorno di $[1]$ deve intersecare Z in $\mathbb{R}$ e quindi la classe $[0]$ in $\mathbb{R}/Z$.

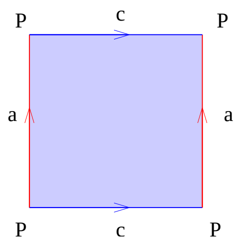
---

3) *Sia X il cilindro $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{I}$ con la topologia usuale e si consideri Z, lo spazio quoziente di X ottenuto identificando le due circonferenze identicate con c e contraendo il segmento a ad un punto.*

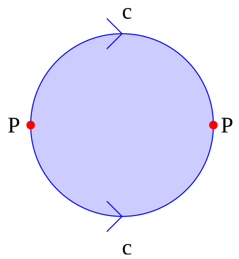


Si calcoli il gruppo fondamentale di Z.

Lo spazio quoziente di X in cui sono state identificate le circonferenze indicate con c è omeomorfo al toro,



pertanto Z, ottenuto contraendo a un punto il segmento a è rappresentato dal seguente poligono



Per calcolare il suo gruppo fondamentale, consideriamo gli aperti connessi per archi $U_1 = Z \setminus \{c\}$ e $U_2 = Z \setminus \{z\}$, dove z è un punto interno di Z. Si vede facilmente che $\pi(U_1) =< \emptyset \mid \emptyset >$, $\pi(U_2) =< c|\emptyset >$, essendo c un retratto forte di deformazione di U_2, e infine $\pi(U_1 \cap U_2) =< \gamma|\emptyset >$, dove γ è una circonferenza attorno a z.
L'immagine di γ in U_1 è il cappio banale, mentre in U_2 è cc^{-1}.
Dal teorema di Seifert-Van Kampen segue allora che

$$\pi(Z) =< c|cc^{-1} = 1 >=< c|\emptyset >$$

---

4) *Nello spazio euclideo* $\mathbb{R}^3$ *siano* O *il punto* $(0, 0, 0)$*,* r *la retta* $x = y = 0$ *e* Γ *la circonferenza* $x^2 + y^2 - 1 = 0 = z$*. Si considerino poi i seguenti sottospazi:*

1. $X_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$.
2. $X_2 = \mathbb{R}^3 \setminus \{r\}$.
3. $X_3 = \mathbb{R}^3 \setminus \{r \cup \Gamma\}$.

e li si suddividano in classi di omotopia e di omeomorfismo.
(Suggerimento: può essere utile trovare dei retratti di deformazione degli spazi X_i*).*

$\mathbf{S}^2$ è retratto di deformazione di X_1, $\mathbf{S}^1$ è retratto di deformazione di X_2 mentre il toro è retratto di deformazione di X_3, per cui $\pi(X_1) = \{0\}$, $\pi(X_2) = \mathbb{Z}$ e $\pi(X_3) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Avendo gruppi fondamentali non isomorfi, due qualunque dei tre spazi X_i non sono omeomorfi né omotopicamente equivalenti.

23 giugno 2003

---

1) *Sia $\mathbb{R}$ la retta reale, sia $Y = \{*\}$ un insieme con un solo elemento e sia $X^* = \mathbb{R} \cup Y$. Si consideri la famiglia τ di sottoinsiemi di X^* così definita: $U \subset X^* \in \tau$ se*

a) U non contiene $*$ e U è un aperto della topologia euclidea.
b) U contiene $*$ e U^c è compatto in $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea.

Si verifichi che τ è una topologia per X^* e si stabilisca se X^* è compatto, connesso, di Hausdorff.

Verifichiamo che τ è una topologia per X^*.

- Anzitutto $X^* \in \tau$ perché contiene $*$ e $\emptyset$ è compatto. Inoltre $\emptyset \in \tau$ per a).

- Sia $\{U_j\}_{j \in J}$ una famiglia di aperti. L'unione degli aperti non contenenti $*$ è un aperto di $\mathbb{R}$, mentre l'unione degli aperti contenenti $*$ ha come complementare un'intersezione di compatti di $\mathbb{R}$ che è un compatto (i compatti di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli i chiusi e limitati e un'intersezione di una famiglia qualunque di chiusi è chiusa). Quindi il problema si riduce a provare che $U_1 \cup U_2$ è aperto quando U_1 è aperto contenente $*$ e U_2 è aperto non contenente $*$. Allora $* \in U_1 \cup U_2$ e $(U_1 \cup U_2)^c = U_1^c \cap U_2^c$ è compatto di $\mathbb{R}$.

- Siano U e V aperti. Allora se $* \in U \cap V$, per b) $U \cap V$ è aperto. Se invece uno dei due aperti non contiene il punto, ad esempio $* \notin U$, allora $* \notin U \cap V$ e $U \cap V$ è aperto di $\mathbb{R}$. In ogni caso, $U \cap V$ è aperto di τ.

X^* è compatto perché un qualsiasi ricoprimento aperto deve contenere almeno un aperto di tipo b), cioè un aperto $U \ni *$ tale che U^c è compatto in $\mathbb{R}$ e dalla compattezza di U^c segue che dal ricoprimento possiamo estrarre un sottoricoprimento finito per U^c che assieme a U costituisce un sottoricoprimento finito di X^*.

Osserviamo che gli unici aperti e chiusi di X^* sono X^* stesso e l'insieme vuoto perché i chiusi di X^* sono i chiusi di $\mathbb{R}$ uniti a $*$ e i compatti di $\mathbb{R}$. Segue che X^* è connesso.

X^* è di Hausdorff perché se prendiamo due punti di $\mathbb{R}$ allora esistono intorni disgiunti di tipo a) mentre per un punto x di $\mathbb{R}$ e $*$ basta prendere ad esempio l'intervallo $(x-1, x+1)$ per il primo, $\{*\} \cup (-\infty, x-2) \cup (x+2, \infty)$ per il secondo.

---

2) *Si consideri lo spazio topologico $X = \mathbb{R}_\varepsilon \times \mathbb{R}_c$, dove $\mathbb{R}_\varepsilon$ è $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea e $\mathbb{R}_c$ è $\mathbb{R}$ con la topologia cofinita e sia $Q = [0,1] \times [0,1]$.*

Si determinino $\overset{\circ}{Q}$ e $\overline{Q}$; si dica inoltre se Q è compatto in X e se Q, con la topologia indotta da X, è uno spazio topologico di Hausdorff.

Utilizzando gli aperti elementari assieme alla definizione di interno e chiusura, si vede facilmente che $\overset{\circ}{(A \times B)} = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$ e che $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

Nel nostro caso, sappiamo che l'interno e la chiusura di $[0,1]$ con la topologia euclidea sono rispettivamente $(0,1)$ e $[0,1]$. Vediamo quindi il caso della topologia cofinita.
Ora, in $\mathbb{R}_c$, $\overset{\circ}{[0,1]} = \emptyset$, infatti gli aperti non banali di $\mathbb{R}_c$ sono complementari di un numero finito di punti e nessuno di questi può essere contenuto in $[0,1]$ perché $\mathbb{R} \setminus [0,1]$ ha infiniti punti, quindi $\emptyset$ è il più grande aperto di $\mathbb{R}_c$ contenuto in $[0,1]$. Inoltre $\overline{[0,1]} = \mathbb{R}$, infatti i chiusi non banali sono costituiti da un numero finito di punti e quindi l'unico chiuso (e perciò minimo) di $\mathbb{R}_c$ contenente $[0,1]$ è $\mathbb{R}$.

Abbiamo allora che $\overset{\circ}{Q} = (0,1) \times \emptyset = \emptyset$ e $\overline{Q} = [0,1] \times \mathbb{R}$.

Un prodotto di spazi è compatto se e solo se gli spazi lo sono. Essendo $[0,1]$ un compatto di $\mathbb{R}_\varepsilon$ perché è chiuso e limitato, segue che Q è compatto se e solo se $[0,1]$ con la topologia cofinita è compatto. Consideriamo dunque un ricoprimento aperto di $[0,1]_c$ e sia U_i un aperto del ricoprimento. Se U_i non è banale sia k_i il numero di punti in $[0,1]$ che non appartengono a U_i. Per ognuno di questi punti possiamo trovare un aperto del ricoprimento che lo contiene e otteniamo un sottoricoprimento finito con al più $k_i + 1$ aperti; segue allora la compattezza di $[0,1]$ e quindi di Q.

Q non è di Hausdorff perché $[0,1]$ nella topologia cofinita non lo è, in particolare si ha che non è possibile trovare intorni disgiunti per una qualsiasi coppia di punti. Supponiamo infatti per assurdo che esistano x e y in $[0,1]$ con intorni aperti disgiunti, $U_x \cap U_y = \emptyset$. Allora, prendendo i complementari in $[0,1]$, si ha $U_x^c \cup U_y^c = [0,1]$ ma U_x^c e U_y^c sono insiemi finiti, di qui l'assurdo.

---

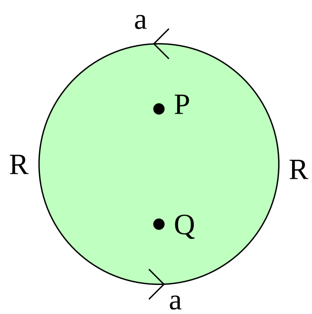
3) *Sia $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ il cilindro $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\}$ e siano $A = (1,0,0)$, $B = (1,0,1)$ e $C = (0,1,0)$.*
Sia Σ una circonferenza, e siano P, Q due suoi punti distinti.
Sia X lo spazio topologico ottenuto identificando A con P e B con Q, e sia Y lo spazio topologico ottenuto identificando A con P e C con Q.
X e Y sono omeomorfi? Hanno lo stesso tipo di omotopia?

X e Y non sono omeomorfi. Infatti un omeomorfismo tra X e Y sarebbe anche un omemorfismo locale in tutti i punti e in particolare manderebbe un intorno di $B \in X$ omeomorficamente in un intorno di A o C in Y, di qui l'assurdo.

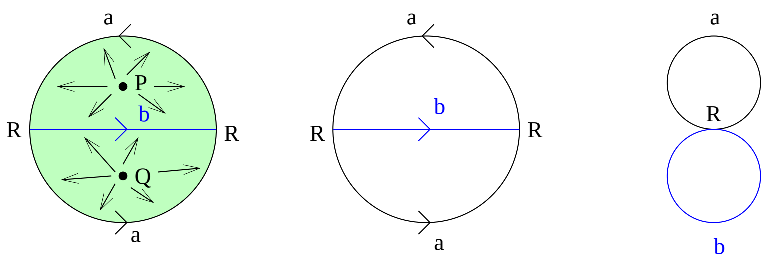
X e Y hanno lo stesso tipo di omotopia perché Y è retratto forte di deformazione di uno spazio omeomorfo a X.

4) *Sia* $X = \mathbb{RP}^2 \setminus \{P, Q\}$ *il piano proiettivo reale privato di due punti. Si calcoli il gruppo fondamentale di* X *e si mostri che esso è un gruppo libero.*

Rappresentiamo X tramite il seguente poligono piano



Denotiamo con b il diametro orizzontale; il poligono ha come retratto di deformazione $a \cup b$ come in figura



e quindi il gruppo fondamentale è $\pi(X) =< a, b \mid \emptyset >$ ed è perciò un gruppo libero su due generatori.

14 luglio 2003

---

1) *Sulla retta reale $\mathbb{R}$ si consideri la famiglia τ di sottoinsiemi così definita: un sottoinsieme $U \in \tau$ se e solo se $U = \emptyset$ oppure U^c è compatto nella topologia euclidea.*
Si verifichi che τ è una topologia e la si confronti, se possibile, con quella euclidea. Si stabilisca poi se lo spazio topologico $(\mathbb{R}, \tau)$ è compatto, connesso, di Hausdorff.

Mostriamo che τ è una topologia:

- $\mathbb{R}$ e $\emptyset \in \tau$;
- Sia $\{U_i\}_i$ una famiglia di sottoinsiemi di τ, allora $\bigcup_i U_i \in \tau$ perché $(\bigcup_i U_i)^c = \bigcap_i U_i^c$ è un'intersezione di chiusi euclidei e perció è un chiuso e inoltre $\bigcap_i U_i^c \subset U_{i_0}$ è un insieme limitato, quindi compatto.
- Siano $U_1, U_2 \in \tau$, allora $U_1 \cap U_2 \in \tau$ perché $(U_1 \cap U_2)^c = U_1^c \cup U_2^c$ è unione di due chiusi e quindi è chiuso ed è limitato perchè entrambi lo sono, ed è quindi compatto.

Se $U \in \tau$ allora U^c è compatto di $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ quindi chiuso e U è aperto di τ_ε quindi $\tau \preceq \tau_\varepsilon$ (τ_ε è piú fine di τ). L'inclusione è stretta perché ad esempio l'intervallo $(0,1) \in \tau_\varepsilon$ ma $(0,1) \notin \tau$. Segue quindi che l'identitá $id : (\mathbb{R}, \tau_\varepsilon) \to (\mathbb{R}, \tau)$ è continua.
Poiché l'immagine di uno spazio connesso tramite un'applicazione continua è un connesso, $(\mathbb{R}, \tau)$ è connesso perché $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ lo è.

$(\mathbb{R}, \tau)$ non è di Hausdorff, in quanto non esistono due aperti U_1, U_2 disgiunti. Se infatti fosse $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ si avrebbe $U_1^c \cup U_2^c = \mathbb{R}$, ma ciò è impossibile, perché U_1^c e U_2^c sono compatti in $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ e quindi limitati.

Infine $(\mathbb{R}, \tau)$ è compatto: se $\{U_i\}_i$ è un ricoprimento aperto e $U \in \{U_i\}_i$, allora U^c è un compatto di $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ e quindi è compatto in $(\mathbb{R}, \tau)$ perché l'immagine di un compatto tramite un'applicazione continua è compatta; allora da $\{U_i \cap U^c\}_i$ possiamo estrarre un sottoricoprimento finito che ricopre U^c, tale sottoricoprimento assieme a U è un sottoricoprimento finito di $\{U_i\}_i$.

---

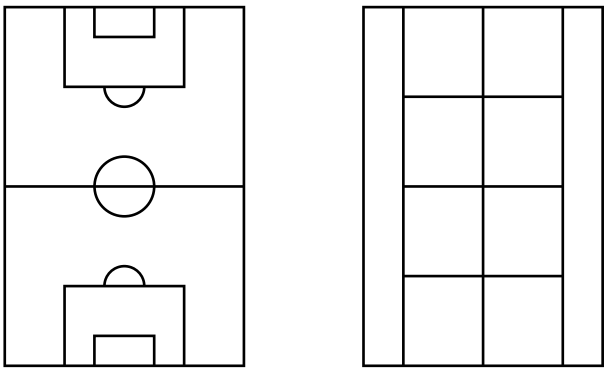
2) *Si considerino su $\mathbb{R}$ le seguenti topologie:*

a) τ_1 = *Topologia euclidea.*
b) τ_2 = *Topologia i cui aperti non banali sono gli intervalli* $(-a, a)$ *con* $a \in \mathbb{R}_+$.
c) τ_3 = *Topologia i cui aperti non banali sono le semirette* $(-\infty, a)$ *con* $a \in \mathbb{R}_+$.

e sia $X_i = (\mathbb{R}, \tau_i)$. Si considerino le applicazioni $f_i : X_i \to [0, +\infty)$ definite ponendo $f_i(x) = |x|$ e si denoti con σ_i la topologia quoziente su $[0, +\infty)$ relativa all'applicazione f_i e con Y_i lo spazio topologico $([0, +\infty), \sigma_i)$.
Si stabilisca se gli spazi Y_i sono di Hausdorff e se sono compatti.

Utilizzando la definizione di topologia quoziente non è difficile vedere che σ_1 è la topologia euclidea, σ_2 è la topologia i cui aperti non banali sono gli intervalli $[0, a)$ e σ_3 è la topologia banale.
Pertanto Y_1 è di Hausdorff ma non compatto, Y_2 non è né compatto né di Hausdorff e Y_3 è compatto ma non di Hausdorff.

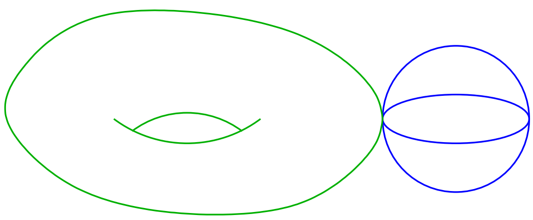
3) *Si considerino i seguenti sottospazi del piano euclideo con la topologia indotta da quella euclidea, e si stabilisca se sono omeomorfi e/o omotopicamente equivalenti.*



Se esistesse un omeomorfismo tra i due spazi, esso sarebbe anche un omeomorfismo locale in tutti i punti, in particolare punti con intorni "a croce" verrebbero mappati nello stesso tipo di punti. Nel primo spazio ci sono 2 punti "a croce" mentre nel secondo ce ne sono 3, pertanto i due spazi non sono omeomorfi. Sono però omotopicaente equivalenti perché hanno lo stesso tipo di omotopia di $\mathbb{R}^2 \setminus \{10 \text{ punti}\}$.

4) *Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino il toro T ottenuto ruotando attorno all'asse z la circonferenza del piano (y, z) di centro $(2, 0)$ e raggio 1 e il piano π di equazione $y = 2$. Sia X l'unione di T e π. Si calcoli il gruppo fondamentale di X.*

Poiché il piano π è contraibile, X ha lo stesso tipo di omotopia di X/π, ovvero un toro e una sfera uniti in un punto



Poiché il punto di contatto ha un intorno contraibile sia sul toro che sulla sfera, essendo $\pi(T) =< \alpha, \beta | \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1 >$ e $\pi(\mathbf{S}^2) =< \emptyset \mid \emptyset >$, il gruppo fondamentale di X è

$$\pi(X) =< \alpha, \beta | \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1 >$$

17 settembre 2003

---

1) *Sia* $X = M_2(\mathbb{R})$ *lo spazio delle matrici* 2×2 *a coefficienti reali, con la topologia indotta dall'identificazione* $M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$ *che fa corrispondere alla matrice* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *il vettore* (a, b, c, d)*. Siano poi* $Y \subset X$ *l'insieme delle matrici invertibili:* $Y = \{A \in X \mid \det A \neq 0\}$*, e* $Z \subset X$ *l'insieme delle matrici ortogonali:* $Z = \{A \in X \mid AA^t = I\}$*. Si provi che* Y *è aperto e che* Z *è compatto. (Suggerimento: può essere utile considerare l'applicazione (continua?) determinante* $\det : X \to \mathbb{R}$*).*

Consideriamo l'applicazione $\det : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \det(A)$. Attraverso l'identificazione $M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$, possiamo riscrivere det come applicazione polinomiale $\det : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} : (a, b, c, d) \mapsto ad - cb$. Poiché i polinomi sono applicazioni continue e $\{0\}$ è un chiuso di $\mathbb{R}_\varepsilon$, $\det^{-1}(0)$ è un chiuso di $\mathbb{R}^4_\varepsilon$ per cui $Y = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$ è un aperto di $M_2(\mathbb{R})$.
La condizione sulle matrici di Z, $AA^t = I$, in $\mathbb{R}^4$ corrisponde al sistema

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

Considerando l'applicazione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : (a, b, c, d) \mapsto (a^2+b^2, ac+bd, c^2+d^2)$, che risulta continua perché le componenti lo sono, otteniamo che $Z = f^{-1}((1, 0, 1))$ è chiuso. Inoltre $|(a, b, c, d)| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ è uguale a $\sqrt{2}$ nei punti di Z quindi Z è limitato e quindi compatto perché i compatti di $\mathbb{R}^4$ (e di $\mathbb{R}^n$ in generale) sono tutti e soli i sottoinsiemi chiusi e limitati.

---

2) *Sia* X *l'insieme* $[0, 1] \cup \{2\}$ *con la topologia i cui aperti non banali sono gli aperti euclidei di* $[0, 1]$ *e gli insiemi della forma* $(a, 1) \cup \{2\}$ *con* $a \in [0, 1)$*.*
Si consideri l'applicazione $f : [-1, 1] \to X$ *definita ponendo*

$$f(x) = \begin{cases} |x| & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

Si stabilisca se tale applicazione è continua quando $[-1, 1]$ *ha rispettivamente la topologia grossolana, la topologia cofinita, la topologia euclidea o la topologia discreta. Si stabilisca poi se lo spazio topologico* X *è o meno di Hausdorff, compatto, connesso.*

Se $[-1, 1]$ è dotato della topologia grossolana, f non è continua, basta considerare $f^{-1}((0, 1/2)) = (-1/2, 0) \cup (0, 1/2)$, esso non è aperto perché non è $\emptyset$ né $[-1, 1]$.

Nemmeno con la topologia cofinita, l'esempio precedente mostra che la controimmagine dell'aperto $(0, 1/2)$ non è il complementare di un numero finito di punti di $[-1, 1]$.
Quando dotiamo $[-1, 1]$ della topologia euclidea le controimmagini degli aperti di X sono date da

$$\begin{aligned}
&f^{-1}((a, b)) = (-b, -a) \cup (a, b) \\
&f^{-1}([0, b)) = (-b, b) \\
&f^{-1}((a, 1]) = [-1, -a) \cup (a, 1) \\
&f^{-1}((a, 1) \cup \{2\}) = (-1, -a) \cup (a, 1]
\end{aligned}$$

e in ogni caso otteniamo un aperto di $[-1, 1]$.
Se infine $[-1, 1]$ ha la topologia discreta, allora f è continua perché ogni sottoinsieme di $[-1, 1]$ è aperto.

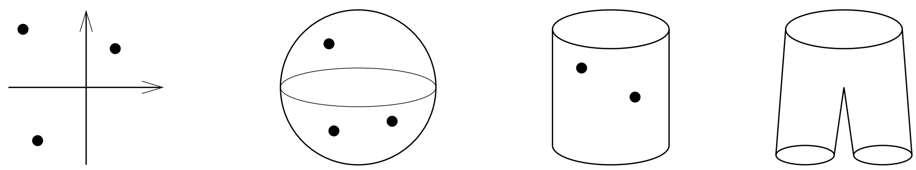
- X non è di Hausdorff, perché i punti 1 e 2 non hanno intorni disgiunti, infatti gli intorni (piccoli) di 1 sono del tipo $(b, 1]$, quelli di 2 sono del tipo $(a, 1) \cup \{2\}$ e la loro intersezione è $(\max\{a, b\}, 1) \neq \emptyset$.

- X è compatto, perché ogni suo ricoprimento aperto deve contenere un intorno del punto 2, ovvero un aperto del tipo $(a, 1) \cup \{2\}$, il cui complementare, $[0, a] \cup \{1\}$, è un compatto in $X \setminus \{2\}$, per cui è possibile estrarre un sottoricoprimento finito per $[0, a] \cup \{1\}$ e quindi per X. (oppure: quando $[-1, 1]$ è dotato della topologia euclidea, f è continua e quindi dalla compattezza di $[-1, 1]$ segue che X è compatto).

- X è connesso. Infatti quando $[-1, 1]$ è dotato della topologia euclidea f è continua e inoltre $[-1, 1]$ è connesso. Poiché l'immagine di uno spazio connesso tramite un'applicazione continua è connessa, segue che X è connesso.

---

3) *Si suddividano i seguenti spazi topologici in classi di equivalenza omotopica e se ne calcoli il gruppo fondamentale:*



$\mathbb{R}^2 \setminus$ {*3 pti*} $\mathbf{S}^2 \setminus$ {*3 pti*} $(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{I}) \setminus$ {*2 pti*} *I "calzoni".*

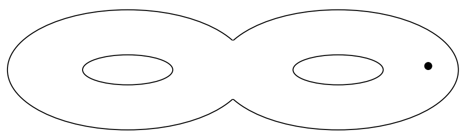
Osserviamo inizialmente che $\mathbf{S}^2 \setminus \{1 \text{ punto}\}$ è omeomorfo al piano $\mathbb{R}^2$ e inoltre che se S e T sono due sottoinsiemi di $\mathbf{S^2}$ costituiti da n punti ciascuno allora esiste un omeomorfismo $f : \mathbf{S^2} \to \mathbf{S^2}$ tale che $f(S) = T$.

Il cilindro $(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{I}) \setminus \{2 \text{ punti}\}$ si può vedere come retratto di un cilindro aperto $\mathbf{S}^1 \times (-2, 2)$ privato di 2 punti. Il cilindro aperto è omeomorfo a $\mathbf{S}^2 \setminus \{2 \text{ punti}\}$ e quindi $(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{I}) \setminus \{2 \text{ punti}\}$ ha lo stesso tipo di omotopia di $\mathbb{R}^2 \setminus \{3 \text{ punti}\}$. Poiché $\mathbb{R}^2 \setminus \{3 \text{ punti}\}$ ha come retratto forte di deformazione 3 circonferenze unite in un punto, $\pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{3 \text{ punti}\}) = \mathbb{Z}^{*3}$.

I "calzoni" sono retratto di deformazione di calzoni senza bordo, i quali sono omeomorfi a $\mathbf{S}^2 \setminus \{3 \text{ punti}\}$. Il secondo spazio e i calzoni hanno dunque lo stesso tipo di omotopia di $\mathbb{R}^2 \setminus \{2 \text{ punti}\}$, ovvero di 2 circonferenze unite in un punto e perciò il loro gruppo fondamentale è $\mathbb{Z}^{*2}$.

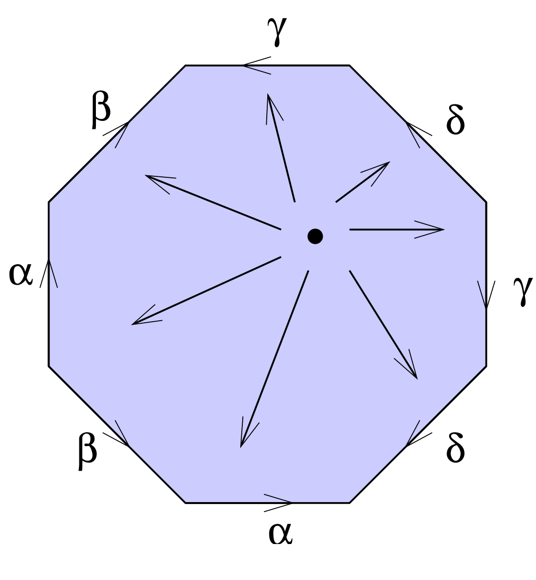
---

4) *Sia X lo spazio topologico ottenuto facendo la somma connessa di due tori e togliendo un punto. Si calcoli il gruppo fondamentale di X.*
(Suggerimento: si consideri un modello piano di X).



---

4) Possiamo rappresentare X tramite il seguente poligono piano:



Il bordo del poligono è retratto di deformazione di X perciò

$$\pi(X) = < \alpha, \beta, \gamma, \delta | \emptyset >$$

ovvero il gruppo fondamentale di X è un gruppo libero con 4 generatori.


MISS SWANSON, NON CAPISCO IL QUARTO PROBLEMA
VERAMENTE, NON CAPISCO BENE NEANCHE GLI ALTRI TRE ...
IN REALTÀ, NON CAPISCO AFFATTO LA MATEMATICA
PARLIAMOCI CHIARO... NON CAPISCO NEMMENO LA SCUOLA !