Setup
Curve razionali
Fibrati uniformi
Criterio di spezzamento
Soglia
Curve razionali e sottofibrati
Mappe in $\mathbb{G}(k, n)$
Applicazioni

Fibrati vettoriali uniformi su varietà di Fano

Gianluca Occhetta

con R. Muñoz e L.E. Solá Conde

Bologna, 16 settembre 2011

Setup
Curve razionali
Fibrati uniformi
Criterio di spezzamento
Soglia
Curve razionali e sottofibrati
Mappe in $\mathbb{G}(k, n)$
Applicazioni

Notazioni

Notazioni

- X varietà di Fano complessa con $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}\langle H_X \rangle$;

Notazioni

- X varietà di Fano complessa con $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}\langle H_X \rangle$;
- $\mathcal{E}$ fibrato vettoriale su X di rango r;

Notazioni

- X varietà di Fano complessa con $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}\langle H_X \rangle$;
- $\mathcal{E}$ fibrato vettoriale su X di rango r;
- $\mathcal{M}$ famiglia propria di curve razionali che coprono X;

Notazioni

- X varietà di Fano complessa con $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}\langle H_X \rangle$;
- $\mathcal{E}$ fibrato vettoriale su X di rango r;
- $\mathcal{M}$ famiglia propria di curve razionali che coprono X;
- $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to X$ proiezione naturale.

Setup
Curve razionali
Fibrati uniformi
Criterio di spezzamento
Soglia
Curve razionali e sottofibrati
Mappe in $\mathbb{G}(k, n)$
Applicazioni

Curve razionali

Una **famiglia di curve razionali** $\mathcal{M}$, è $\mathcal{M} \subset \mathrm{Ratcurves}^{\mathrm{n}}(\mathrm{X})$ irriducibile;

Curve razionali

Una **famiglia di curve razionali** $\mathcal{M}$, è $\mathcal{M} \subset \mathrm{Ratcurves}^{\mathrm{n}}(\mathrm{X})$ irriducibile; sia $\mathcal{U}$ la famiglia universale

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"'] & X \\ \mathcal{M} & \end{tikzcd}$$

Curve razionali

Una **famiglia di curve razionali** $\mathcal{M}$, è $\mathcal{M} \subset \mathrm{Ratcurves}^{\mathrm{n}}(\mathrm{X})$ irriducibile; sia $\mathcal{U}$ la famiglia universale

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"'] & X \\ \mathcal{M} & \end{tikzcd}$$

- $\mathcal{M}$ è **dominante** se i è dominante;

Curve razionali

Una **famiglia di curve razionali** $\mathcal{M}$, è $\mathcal{M} \subset \mathrm{Ratcurves}^{\mathrm{n}}(\mathrm{X})$ irriducibile; sia $\mathcal{U}$ la famiglia universale

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"'] & X \\ \mathcal{M} & \end{tikzcd}$$

- $\mathcal{M}$ è **dominante** se i è dominante;
- $\mathcal{M}$ è **non spezzante** se è propria.

Curve razionali

Una **famiglia di curve razionali** $\mathcal{M}$, è $\mathcal{M} \subset \mathrm{Ratcurves}^{\mathrm{n}}(\mathrm{X})$ irriducibile; sia $\mathcal{U}$ la famiglia universale

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"'] & X \\ \mathcal{M} & \end{tikzcd}$$

- $\mathcal{M}$ è **dominante** se i è dominante;
- $\mathcal{M}$ è **non spezzante** se è propria.

Dato $x \in X$, sia $\mathcal{M}_x = p(i^{-1}(x))$.

Curve razionali

Una **famiglia di curve razionali** $\mathcal{M}$, è $\mathcal{M} \subset \mathrm{Ratcurves^n(X)}$ irriducibile; sia $\mathcal{U}$ la famiglia universale

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"'] & X \\ \mathcal{M} & \end{tikzcd}$$

- $\mathcal{M}$ è **dominante** se i è dominante;
- $\mathcal{M}$ è **non spezzante** se è propria.

Dato $x \in X$, sia $\mathcal{M}_x = p(i^{-1}(x))$.

L'immagine del morfismo $\mathcal{M}_x \to \mathbb{P}(T_X|_x^\vee)$ che manda una curva per x nella sua direzione tangente è detta **VMRT** (**Variety of Minimal Rational Tangents**) di x.

VMRT

Esempi

VMRT

Esempi

X	$VMRT$
$\mathbb{P}^n$	$\mathbb{P}^{n-1}$
$\mathbb{Q}^n$	$\mathbb{Q}^{n-2}$
$\mathbb{G}(k,n)$	$\mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^{n-k-1}$
$\mathbb{G}_Q(m-1, 2m-1)$	$\mathbb{G}(1, m-1)$
$\mathbb{G}_L(m-1, 2m-1)$	$v_2(\mathbb{P}^{m-1})$
$\mathbb{OP}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{R}$	$\mathbb{G}_Q(4,9)$

VMRT

Esempi

X	$VMRT$
$\mathbb{P}^n$	$\mathbb{P}^{n-1}$
$\mathbb{Q}^n$	$\mathbb{Q}^{n-2}$
$\mathbb{G}(k,n)$	$\mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^{n-k-1}$
$\mathbb{G}_Q(m-1, 2m-1)$	$\mathbb{G}(1, m-1)$
$\mathbb{G}_L(m-1, 2m-1)$	$v_2(\mathbb{P}^{m-1})$
$\mathbb{OP}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{R}$	$\mathbb{G}_Q(4,9)$

Se $X \subset \mathbb{P}^N$ e $\mathcal{M}$ è una famiglia di rette, allora $\mathcal{M}_x$ si identifica con la *VMRT* di x. Lo assumeremo d'ora in poi per semplicità di esposizione.

Uniformità

$\ell \subset X$ retta;

Uniformità

$\ell \subset X$ retta; la restrizione di $\mathcal{E}$ si spezza come

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_r).$$

Uniformità

$\ell \subset X$ retta; la restrizione di $\mathcal{E}$ si spezza come

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_r).$$

Diciamo che $\mathcal{E}$ ha **tipo di spezzamento** $(a_1, \ldots, a_r)$ rispetto ad ℓ.

Uniformità

$\ell \subset X$ retta; la restrizione di $\mathcal{E}$ si spezza come

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_r).$$

Diciamo che $\mathcal{E}$ ha **tipo di spezzamento** $(a_1, \ldots, a_r)$ rispetto ad ℓ.
Diciamo che $\mathcal{E}$ è **uniforme** rispetto a una famiglia dominante di rette $\mathcal{L}$ se il tipo di spezzamento di $\mathcal{E}$ non dipende dalla retta scelta.

Uniformità

$\ell \subset X$ retta; la restrizione di $\mathcal{E}$ si spezza come

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_r).$$

Diciamo che $\mathcal{E}$ ha **tipo di spezzamento** $(a_1, \ldots, a_r)$ rispetto ad ℓ.
Diciamo che $\mathcal{E}$ è **uniforme** rispetto a una famiglia dominante di rette $\mathcal{L}$ se il tipo di spezzamento di $\mathcal{E}$ non dipende dalla retta scelta.

Teorema (Andreatta-Wiśniewski)
Se $\mathcal{E}$ è uniforme con tipo di spezzamento $(a, \ldots, a)$, allora $\mathcal{E}$ si decompone come somma di fibrati lineari.

Uniformità

$\ell \subset X$ retta; la restrizione di $\mathcal{E}$ si spezza come

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_r).$$

Diciamo che $\mathcal{E}$ ha **tipo di spezzamento** $(a_1, \ldots, a_r)$ rispetto ad ℓ.
Diciamo che $\mathcal{E}$ è **uniforme** rispetto a una famiglia dominante di rette $\mathcal{L}$ se il tipo di spezzamento di $\mathcal{E}$ non dipende dalla retta scelta.

Teorema (Andreatta-Wiśniewski)
Se $\mathcal{E}$ è uniforme con tipo di spezzamento $(a, \ldots, a)$, allora $\mathcal{E}$ si decompone come somma di fibrati lineari.

In particolare, se $\mathcal{E}$ è uniforme e il suo tipo di spezzamento non è $(a, \ldots, a)$, a meno di dualizzare e tensorizzare per un fibrato lineare possiamo assumere che il tipo di spezzamento di $\mathcal{E}$ sia $(a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_r)$ con

$$0 = a_1 = \cdots = a_k < a_{k+1} \leq \cdots \leq a_r \qquad k \leq [r/2].$$

Soglia di spezzamento

X come sopra, coperta da rette.

Soglia di spezzamento

X come sopra, coperta da rette.

La **soglia di spezzamento** $u(X)$ di è il massimo intero tale che ogni fibrato vettoriale $\mathcal{L}$-uniforme su X di rango $< u(X)$ si decompone come somma di fibrati lineari.

Soglia di spezzamento

X come sopra, coperta da rette.

La **soglia di spezzamento** $u(X)$ di è il massimo intero tale che ogni fibrato vettoriale $\mathcal{L}$-uniforme su X di rango $< u(X)$ si decompone come somma di fibrati lineari.

Teorema (Van de Ven, Sato, Elencwajg, Hirschowitz, Schneider)
$u(\mathbb{P}^n) = n$ e vale l'uguaglianza solo per $T_{\mathbb{P}^n}$ (a meno di dualizzare o tensorizzare per un fibrato lineare).

Soglia di spezzamento

X come sopra, coperta da rette.

La **soglia di spezzamento** $u(X)$ di è il massimo intero tale che ogni fibrato vettoriale $\mathcal{L}$-uniforme su X di rango $< u(X)$ si decompone come somma di fibrati lineari.

Teorema (Van de Ven, Sato, Elencwajg, Hirschowitz, Schneider)
$u(\mathbb{P}^n) = n$ e vale l'uguaglianza solo per $T_{\mathbb{P}^n}$ (a meno di dualizzare o tensorizzare per un fibrato lineare).

Teorema (Kachi-Sato, Ballico)
$u(\mathbb{Q}^n) \geq n - 1$ se n è dispari, $u(\mathbb{Q}^n) \geq n - 2$ se n è pari.

Soglia di spezzamento

X come sopra, coperta da rette.

La **soglia di spezzamento** $u(X)$ di è il massimo intero tale che ogni fibrato vettoriale $\mathcal{L}$-uniforme su X di rango $< u(X)$ si decompone come somma di fibrati lineari.

Teorema (Van de Ven, Sato, Elencwajg, Hirschowitz, Schneider)
$u(\mathbb{P}^n) = n$ e vale l'uguaglianza solo per $T_{\mathbb{P}^n}$ (a meno di dualizzare o tensorizzare per un fibrato lineare).

Teorema (Kachi-Sato, Ballico)
$u(\mathbb{Q}^n) \geq n - 1$ se n è dispari, $u(\mathbb{Q}^n) \geq n - 2$ se n è pari.

Teorema (Guyot)
Sia $\mathbb{G} := \mathbb{G}(k, n)$, $k \leq n - k - 1$; allora $u(\mathbb{G}) = k + 1$ e vale l'uguaglianza solo per il fibrato quoziente universale $\mathcal{Q}$ (a meno di dualizzare o tensorizzare per un fibrato lineare).

Criterio di spezzamento

Idea: utilizzare la geometria della famiglia di rette per provare lo spezzamento di fibrati di rango “abbastanza basso”.

Criterio di spezzamento

Idea: utilizzare la geometria della famiglia di rette per provare lo spezzamento di fibrati di rango "abbastanza basso".

Teorema
Sia $r \leq -K_X \cdot \mathcal{L} - 2$ un intero positivo.

Criterio di spezzamento

Idea: utilizzare la geometria della famiglia di rette per provare lo spezzamento di fibrati di rango "abbastanza basso".

Teorema
Sia $r \leq -K_X \cdot \mathcal{L} - 2$ *un intero positivo. Se per ogni* $x \in X$ *e per ogni* $s \leq [r/2]$ *si ha* $\dim H^{2s}(\mathcal{L}_x, \mathbb{C}) = 1$

Criterio di spezzamento

Idea: utilizzare la geometria della famiglia di rette per provare lo spezzamento di fibrati di rango "abbastanza basso".

Teorema
Sia $r \leq -K_X \cdot \mathcal{L} - 2$ un intero positivo. Se per ogni $x \in X$ e per ogni $s \leq [r/2]$ si ha $\dim H^{2s}(\mathcal{L}_x, \mathbb{C}) = 1$ allora $r < u(X)$.

Criterio di spezzamento

Idea: utilizzare la geometria della famiglia di rette per provare lo spezzamento di fibrati di rango "abbastanza basso".

Teorema
Sia $r \leq -K_X \cdot \mathcal{L} - 2$ un intero positivo. Se per ogni $x \in X$ e per ogni $s \leq [r/2]$ si ha $\dim H^{2s}(\mathcal{L}_x, \mathbb{C}) = 1$ allora $r < u(X)$.

Si procede induttivamente sul rango, costruendo una successione esatta di fibrati uniformi

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}_0 \to 0.$$

Criterio di spezzamento

Idea: utilizzare la geometria della famiglia di rette per provare lo spezzamento di fibrati di rango "abbastanza basso".

Teorema
Sia $r \leq -K_X \cdot \mathcal{L} - 2$ un intero positivo. Se per ogni $x \in X$ e per ogni $s \leq [r/2]$ si ha $\dim H^{2s}(\mathcal{L}_x, \mathbb{C}) = 1$ allora $r < u(X)$.

Si procede induttivamente sul rango, costruendo una successione esatta di fibrati uniformi

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}_0 \to 0.$$

Poiché X è di Fano, se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{E}_0$ sono decomponibili, lo è anche $\mathcal{E}$.

Criterio di spezzamento

Idea: utilizzare la geometria della famiglia di rette per provare lo spezzamento di fibrati di rango "abbastanza basso".

Teorema
Sia $r \leq -K_X \cdot \mathcal{L} - 2$ un intero positivo. Se per ogni $x \in X$ e per ogni $s \leq [r/2]$ si ha $\dim H^{2s}(\mathcal{L}_x, \mathbb{C}) = 1$ allora $r < u(X)$.

Si procede induttivamente sul rango, costruendo una successione esatta di fibrati uniformi

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}_0 \to 0.$$

Poiché X è di Fano, se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{E}_0$ sono decomponibili, lo è anche $\mathcal{E}$.
Il fibrato $\mathcal{E}_0$ viene costruito geometricamente, utilizzando le sezioni minime sulle rette.

- Per il Teorema AW Possiamo assumere che $\mathcal{E}$ abbia tipo di spezzamento $(a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_r)$ con

- Per il Teorema AW Possiamo assumere che $\mathcal{E}$ abbia tipo di spezzamento $(a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_r)$ con

$$0 = a_1 = \cdots = a_k < a_{k+1} \leq \cdots \leq a_r \quad \text{e} \quad k \leq [r/2].$$

- Per il Teorema AW Possiamo assumere che $\mathcal{E}$ abbia tipo di spezzamento $(a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_r)$ con

$$0 = a_1 = \cdots = a_k < a_{k+1} \leq \cdots \leq a_r \quad \text{e} \quad k \leq [r/2].$$

- Consideriamo la famiglia $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ delle sezioni sulle curve di $\mathcal{L}$ corrispondenti alle suriezioni $\mathcal{E}|_\ell \to \mathcal{O}_\ell$

- Per il Teorema AW Possiamo assumere che $\mathcal{E}$ abbia tipo di spezzamento $(a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_r)$ con

$$0 = a_1 = \cdots = a_k < a_{k+1} \leq \cdots \leq a_r \quad \text{e} \quad k \leq [r/2].$$

- Consideriamo la famiglia $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ delle sezioni sulle curve di $\mathcal{L}$ corrispondenti alle suriezioni $\mathcal{E}|_\ell \to \mathcal{O}_\ell$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}_{\mathcal{E}} \arrow[rr, "\widetilde{p_1}"] \arrow[dr] \arrow[dd, "\widetilde{p_2}"'] & & \mathbb{P}(\mathcal{E}) \arrow[d, "\pi"] \\
& \mathcal{U} \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & X \\
\mathcal{L}_{\mathcal{E}} \arrow[r] & \mathcal{L} &
\end{tikzcd}$$

- Per il Teorema AW Possiamo assumere che $\mathcal{E}$ abbia tipo di spezzamento $(a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_r)$ con

$$0 = a_1 = \cdots = a_k < a_{k+1} \leq \cdots \leq a_r \quad \text{e} \quad k \leq [r/2].$$

- Consideriamo la famiglia $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ delle sezioni sulle curve di $\mathcal{L}$ corrispondenti alle suriezioni $\mathcal{E}|_\ell \to \mathcal{O}_\ell$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{U}_{\mathcal{E}} \arrow[r, "\widetilde{p_1}"] \arrow[dr] \arrow[dd, "\widetilde{p_2}"'] & \mathbb{P}(\mathcal{E}) \arrow[d, "\pi"] \\
 & & \mathcal{U} \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & X \\
\mathbb{P}\big((p_{2*}p_1^*E^\vee)^\vee\big) \arrow[r, equal] & \mathcal{L}_{\mathcal{E}} \arrow[r] & \mathcal{L} &
\end{tikzcd}$$

- Per il Teorema AW Possiamo assumere che $\mathcal{E}$ abbia tipo di spezzamento $(a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_r)$ con

$$0 = a_1 = \cdots = a_k < a_{k+1} \leq \cdots \leq a_r \quad \text{e} \quad k \leq [r/2].$$

- Consideriamo la famiglia $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ delle sezioni sulle curve di $\mathcal{L}$ corrispondenti alle suriezioni $\mathcal{E}|_\ell \to \mathcal{O}_\ell$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}\big(p_2^*(p_{2*}p_1^*E^\vee)^\vee\big) \arrow[r, equal] & \mathcal{U}_{\mathcal{E}} \arrow[r, "\widetilde{p_1}"] \arrow[dd, "\widetilde{p_2}"'] \arrow[dr] & \mathbb{P}(\mathcal{E}) \arrow[d, "\pi"] \\
& & \mathcal{U} \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & X \\
\mathbb{P}\big((p_{2*}p_1^*E^\vee)^\vee\big) \arrow[r, equal] & \mathcal{L}_{\mathcal{E}} \arrow[r] & \mathcal{L}
\end{tikzcd}$$

- $\forall x \in X$ otteniamo mappe $\mathcal{L}_x \to \mathbb{G}(k-1, \mathbb{P}(\mathcal{E}_x))$, associando a ℓ il sottospazio lineare di $\mathbb{P}(\mathcal{E}_x)$ individuato dalle sezioni minime.

- $\forall x \in X$ otteniamo mappe $\mathcal{L}_x \to \mathbb{G}(k-1, \mathbb{P}(\mathcal{E}_x))$, associando a ℓ il sottospazio lineare di $\mathbb{P}(\mathcal{E}_x)$ individuato dalle sezioni minime.
- Se queste mappe sono costanti, possiamo costruire un quoziente $\mathcal{E}_0$ di $\mathcal{E}$ di rango k, uniforme di tipo $(0, 0, \ldots, 0)$ e quindi decomponibile.

- $\forall x \in X$ otteniamo mappe $\mathcal{L}_x \to \mathbb{G}(k-1, \mathbb{P}(\mathcal{E}_x))$, associando a ℓ il sottospazio lineare di $\mathbb{P}(\mathcal{E}_x)$ individuato dalle sezioni minime.
- Se queste mappe sono costanti, possiamo costruire un quoziente $\mathcal{E}_0$ di $\mathcal{E}$ di rango k, uniforme di tipo $(0, 0, \ldots, 0)$ e quindi decomponibile.
- Abbiamo una successione esatta

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}_0 \to 0.$$

- $\forall x \in X$ otteniamo mappe $\mathcal{L}_x \to \mathbb{G}(k-1, \mathbb{P}(\mathcal{E}_x))$, associando a ℓ il sottospazio lineare di $\mathbb{P}(\mathcal{E}_x)$ individuato dalle sezioni minime.
- Se queste mappe sono costanti, possiamo costruire un quoziente $\mathcal{E}_0$ di $\mathcal{E}$ di rango k, uniforme di tipo $(0, 0, \ldots, 0)$ e quindi decomponibile.
- Abbiamo una successione esatta

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}_0 \to 0.$$

- Anche $\mathcal{F}$ è uniforme, e quindi decomponibile perché ha rango minore di $\mathcal{E}$, quindi anche $\mathcal{E}$ è decomponibile (X è di Fano).

Mappe nella Grassmanniana

Resta da mostrare che le mappe $\mathcal{L}_x \to \mathbb{G}(k-1, \mathbb{P}(\mathcal{E}_x))$ sono costanti, nelle ipotesi fatte su $\mathcal{L}_x$.

Mappe nella Grassmanniana

Resta da mostrare che le mappe $\mathcal{L}_x \to \mathbb{G}(k-1, \mathbb{P}(\mathcal{E}_x))$ sono costanti, nelle ipotesi fatte su $\mathcal{L}_x$.

1. Data $\phi : \mathcal{L}_x \to \mathbb{G}(k-1, r-1)$ abbiamo la successione esatta universale

Mappe nella Grassmanniana

Resta da mostrare che le mappe $\mathcal{L}_x \to \mathbb{G}(k-1, \mathbb{P}(\mathcal{E}_x))$ sono costanti, nelle ipotesi fatte su $\mathcal{L}_x$.

1. Data $\phi : \mathcal{L}_x \to \mathbb{G}(k-1, r-1)$ abbiamo la successione esatta universale

$$0 \to \phi^* \mathcal{S}^\vee \to \mathcal{O}^{\oplus r} \to \phi^* \mathcal{Q} \to 0.$$

Mappe nella Grassmanniana

Resta da mostrare che le mappe $\mathcal{L}_x \to \mathbb{G}(k-1, \mathbb{P}(\mathcal{E}_x))$ sono costanti, nelle ipotesi fatte su $\mathcal{L}_x$.

1. Data $\phi : \mathcal{L}_x \to \mathbb{G}(k-1, r-1)$ abbiamo la successione esatta universale

$$0 \to \phi^* \mathcal{S}^\vee \to \mathcal{O}^{\oplus r} \to \phi^* \mathcal{Q} \to 0.$$

2. Siano $c_1, \ldots, c_k$ e $d_1, \ldots, d_{r-k}$ le classi di Chern di $\phi^* \mathcal{S}$ e di $\phi^* \mathcal{Q}$; utilizzando le ipotesi sugli $h^i(\mathcal{L}_x, \mathbb{C})$ possiamo identificare $c_1, \ldots, c_k$ con degli interi;

Mappe nella Grassmanniana

Resta da mostrare che le mappe $\mathcal{L}_x \to \mathbb{G}(k-1, \mathbb{P}(\mathcal{E}_x))$ sono costanti, nelle ipotesi fatte su $\mathcal{L}_x$.

1. Data $\phi : \mathcal{L}_x \to \mathbb{G}(k-1, r-1)$ abbiamo la successione esatta universale

$$0 \to \phi^* \mathcal{S}^\vee \to \mathcal{O}^{\oplus r} \to \phi^* \mathcal{Q} \to 0.$$

2. Siano $c_1, \ldots, c_k$ e $d_1, \ldots, d_{r-k}$ le classi di Chern di $\phi^* \mathcal{S}$ e di $\phi^* \mathcal{Q}$; utilizzando le ipotesi sugli $h^i(\mathcal{L}_x, \mathbb{C})$ possiamo identificare $c_1, \ldots, c_k$ con degli interi; le uguaglianze sulle classi di Chern che vengono dalla successione precedente possono essere scritte come...

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c_1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & c_1 & \ddots & & \vdots \\ c_k & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_k & & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & c_1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & c_k \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} 1 \\ -d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ (-1)^{r-k} d_{r-k} \end{pmatrix} = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c_1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & c_1 & \ddots & & \vdots \\ c_k & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_k & & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & c_1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & c_k \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} 1 \\ -d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ (-1)^{r-k} d_{r-k} \end{pmatrix} = 0$$

Quindi $c_i = 0$ per ogni $i > 0$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c_1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & c_1 & \ddots & & \vdots \\ c_k & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_k & & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & c_1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & c_k \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} 1 \\ -d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ (-1)^{r-k} d_{r-k} \end{pmatrix} = 0$$

Quindi $c_i = 0$ per ogni $i > 0$. In particolare

$$0 = c_1 = \deg \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbb{G}(k-1,r-1)}(1),$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c_1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & c_1 & \ddots & & \vdots \\ c_k & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_k & & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & c_1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & c_k \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} 1 \\ -d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ (-1)^{r-k} d_{r-k} \end{pmatrix} = 0$$

Quindi $c_i = 0$ per ogni $i > 0$. In particolare

$$0 = c_1 = \deg \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbb{G}(k-1,r-1)}(1),$$

e perciò φ è costante. ■

Applicazioni

Corollario

Sia $X \subset \mathbb{P}^N$ una varietà di Fano con numero di Picard uno, coperta da sottospazi lineari di dimensione $d \geq 2$,

Applicazioni

Corollario

Sia $X \subset \mathbb{P}^N$ una varietà di Fano con numero di Picard uno, coperta da sottospazi lineari di dimensione $d \geq 2$, tale che $\mathcal{L}_x$ sia connessa da catene dei corrispondenti spazi lineari di dimensione $d-1$ per ogni $x \in X$.

Applicazioni

Corollario

Sia $X \subset \mathbb{P}^N$ una varietà di Fano con numero di Picard uno, coperta da sottospazi lineari di dimensione $d \geq 2$, tale che $\mathcal{L}_x$ sia connessa da catene dei corrispondenti spazi lineari di dimensione $d-1$ per ogni $x \in X$.

Sia $\mathcal{E}$ un fibrato vettoriale su X la cui restrizione ad ogni spazio lineare è somma diretta di fibrati lineari.

Applicazioni

Corollario

Sia $X \subset \mathbb{P}^N$ una varietà di Fano con numero di Picard uno, coperta da sottospazi lineari di dimensione $d \geq 2$, tale che $\mathcal{L}_x$ sia connessa da catene dei corrispondenti spazi lineari di dimensione $d-1$ per ogni $x \in X$.

Sia $\mathcal{E}$ un fibrato vettoriale su X la cui restrizione ad ogni spazio lineare è somma diretta di fibrati lineari. Allora $\mathcal{E}$ è somma diretta di fibrati lineari.

Applicazioni

Corollario
Sia $X \subset \mathbb{P}^N$ una varietà di Fano con numero di Picard uno, coperta da sottospazi lineari di dimensione $d \geq 2$, tale che $\mathcal{L}_x$ sia connessa da catene dei corrispondenti spazi lineari di dimensione $d-1$ per ogni $x \in X$.
Sia $\mathcal{E}$ un fibrato vettoriale su X la cui restrizione ad ogni spazio lineare è somma diretta di fibrati lineari. Allora $\mathcal{E}$ è somma diretta di fibrati lineari.

Dimostrazione.
La mappa $\mathcal{L}_x \to \mathbb{G}(k-1, \mathbb{P}(\mathcal{E}_x))$ è costante su tutti i sottospazi lineari corrispondenti di $\mathcal{L}_x$, quindi è costante . ■

X	$\mathcal{M}_x$	$u(X)$
$\mathbb{P}^n$	$\mathbb{P}^{n-1}$	n
$\mathbb{G}(k,n)$	$\mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^{n-k-1}$	$k+1$
$\mathbb{Q}^{2k}$	$\mathbb{Q}^{2k-2}$	$\geq 2k-2$
$\mathbb{Q}^{2k-1}$	$\mathbb{Q}^{2k-3}$	$\geq 2k-2$
$\mathbb{G}_Q(m-1, 2m-1)$	$\mathbb{G}(1, m-1)$	m
$\mathbb{G}_L(m-1, 2m-1)$	$v_2(\mathbb{P}^{m-1})$	$\geq m-1$
$\mathbb{OP}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{R}$	$\mathbb{G}_Q(4,9)$	≥ 12

Tabella: Soglia di spezzamento per alcuni spazi simmetrici Hermitiani

Punto debole

Il Teorema richiede le condizioni coomologiche per ogni x; un risultato che richiedesse la stessa condizione solo per x generico potrebbe essere applicato a una classe più ampia di varietà.

Punto debole

Il Teorema richiede le condizioni coomologiche per ogni x; un risultato che richiedesse la stessa condizione solo per x generico potrebbe essere applicato a una classe più ampia di varietà.

Via il Teorema di Barth-Larsen applicato alla VMRT, sarebbe ad esempio possibile stimare $u(X)$ con l'indice di X.