Funzioni quaternioniche regolari e problema $\overline{\partial}$-Neumann in $\mathbb{C}^2$

Alessandro Perotti
Università degli Studi di Trento

Milano, 8 settembre 2003

1. Alcune definizioni

$$\mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) = (x_0 + ix_1, x_2 + ix_3) \leftrightarrow$$
$$q = z_1 + z_2 j = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3 \in \mathbb{H}$$

Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{H} \approx \mathbb{C}^2$. Una funzione quaternionica $f = f_1 + f_2 j \in C^1(\Omega)$ è *regolare* (a sinistra) su Ω se

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} + i\frac{\partial f}{\partial x_1} + j\frac{\partial f}{\partial x_2} + k\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \text{ su } \Omega,$$

f è ψ-*regolare* (a sinistra) su Ω se

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} + i\frac{\partial f}{\partial x_1} + j\frac{\partial f}{\partial x_2} - k\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \text{ su } \Omega.$$

f è ψ-regolare $\Leftrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}_1} = \frac{\partial \overline{f_2}}{\partial z_2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}_2} = -\frac{\partial \overline{f_2}}{\partial z_1} \Leftrightarrow$ $*\bar{\partial} f_1 = -\frac{1}{2}\partial(\overline{f_2} d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2)$.

Osservazione 1. Ogni funzione regolare o ψ-regolare è armonica.

Osservazione 2. Ogni mappa olomorfa (f_1, f_2) su Ω definisce una funzione ψ-regolare $f = f_1 + f_2 j$.

Osservazione 3. Se Ω è pseudoconvesso, ogni funzione armonica complessa f_1 è componente complessa di una funzione f ψ-regolare su Ω.

2. Risultati principali

2.1 Criterio differenziale di regolarità

Teorema 1. *$f = f_1 + f_2 j \in C^1(\overline{\Omega})$ è ψ-regolare su Ω se e solo se f è armonica su Ω e*

$$(\overline{\partial}_n - jL)f = 0 \quad \text{su } \partial\Omega. \qquad (*)$$

□

$\overline{\partial}_n f$ è la componente normale di $\overline{\partial} f$ su $\partial\Omega$, definita da: $\overline{\partial}_n f d\sigma = *\overline{\partial} f_{|\partial\Omega}$,

L è l'operatore di Cauchy-Riemann tangenziale

$$L = \frac{1}{|\overline{\partial}\rho|}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}_2}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_1} - \frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}_1}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_2}\right).$$

L'equazione (*) equivale alle due equazioni complesse su $\partial\Omega$

$$\overline{\partial}_n f_1 = -\overline{L(f_2)} \qquad (\mathrm{C}_1)$$
$$\overline{\partial}_n f_2 = \overline{L(f_1)} \qquad (\mathrm{C}_2)$$

Si può dare anche una formulazione debole della condizione (*) e ottenere un teorema di traccia:

Teorema 2. *Una funzione continua $f : \partial\Omega \to \mathbb{H}$ è traccia di una funzione ψ-regolare su Ω se e solo se soddisfa la condizione integrale*

$$\int_{\partial\Omega} \bar{f} \left(\overline{\partial}_n - jL\right) \phi \, d\sigma = 0 \; \forall \, \phi \in Harm^1(\overline{\Omega}). \qquad \square$$

Dal Teorema 1 si ottiene immediatamente il seguente risultato:

Teorema 3. $f = f_1 + f_2 j \in C^1(\overline{\Omega})$ *è regolare su Ω se e solo se f è armonica su Ω e*

$$(N - jT)f = 0 \text{ su } \partial\Omega, \text{ dove}$$

$$N = \frac{\partial\rho}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + \frac{\partial\rho}{\partial \bar{z}_2}\frac{\partial}{\partial z_2}, \; T = \frac{\partial\rho}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - \frac{\partial\rho}{\partial \bar{z}_1}\frac{\partial}{\partial z_2}. \qquad \square$$

2.2 Criterio differenziale di olomorfia

Se $\partial\Omega$ è connessa, il teorema di Hartogs consente di migliorare i risultati precedenti. Le condizioni

$$\overline{\partial}_n f_1 = -\overline{L(f_2)} \qquad (\mathrm{C}_1)$$
$$\overline{\partial}_n f_2 = \overline{L(f_1)} \qquad (\mathrm{C}_2)$$

sono equivalenti: una sola di esse basta per ottenere la ψ-regolarità di f. Questa proprietà può essere sfruttata per ottenere il seguente criterio di olomorfia:

Teorema 4. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^2$ limitato con $\partial\Omega$ connessa. Sia $a \in \mathbb{C}$. Se $h \in C^1(\overline{\Omega})$ è armonica complessa e soddisfa la condizione $\overline{\partial}_n h = \overline{aL(h)}$ su $\partial\Omega$, allora h è olomorfa su Ω.* □

Osservazione. Il caso $a = 0$ corrisponde a un teorema di Aronov e Kytmanov. Condizioni differenziali miste di questo tipo sono state studiate in particolare da Chirka e da Kytmanov.

2.3 Regolarità e problema $\overline{\partial}$-Neumann

Il problema $\overline{\partial}$-Neumann per le funzioni complesse può essere così formulato:

$$\overline{\partial}_n g = \phi \text{ su } \partial\Omega, \quad g \text{ armonica in } \Omega,$$

con condizione di compatibilità

$$\int_{\partial\Omega} \phi \overline{h} d\sigma = 0 \quad \forall h \in \mathcal{O}(\overline{\Omega}).$$

Se $\partial\Omega$ è connessa e C^∞ e Ω è strettamente pseudoconvesso oppure pseudoconvesso con frontiera analitica reale, la risolubilità del problema $\overline{\partial}$-Neumann (Kytmanov) applicata all'equazione (C_2) $\overline{\partial}_n f_2 = \overline{L(f_1)}$ consente di ottenere il:

Teorema 5. *Sia $f_1 : \partial\Omega \to \mathbb{C}$ di classe C^∞. Allora f_1 è la traccia su $\partial\Omega$ di una componente complessa di una funzione ψ-regolare f su Ω, C^∞ su $\overline{\Omega}$.* □

Osservazione. f è univocamente determinata dalla condizione

$$\int_{\partial\Omega} (f - f_1) \overline{h} d\sigma = 0 \quad \forall h \in \mathcal{O}(\overline{\Omega}).$$

Corollario. *Sia $M^\infty(\Omega)$ l'$\mathbb{H}$-modulo destro delle funzioni ψ-regolari, di classe $C^\infty(\overline{\Omega})$. La mappa C definita da $C(f) = f_{1|\partial\Omega}$ per ogni $f = f_1 + f_2 j \in M^\infty(\Omega)$, induce un isomorfismo di spazi reali*

$$\frac{M^\infty(\Omega)}{A^\infty(\Omega,\mathbb{C}^2)} \overset{\approx}{\to} \frac{C^\infty(\partial\Omega)}{CR(\partial\Omega)}.$$

$\square$

2.4 Applicazione: prodotto in $M^\infty(\Omega)$

L'esistenza di un'inversa destra di C

$$M^\infty(\Omega) \underset{C}{\overset{R}{\rightleftarrows}} C^\infty(\partial\Omega) \Longleftrightarrow CR = Id_{C^\infty(\partial\Omega)}$$

permette di definire un prodotto in $M^\infty(\Omega)$, rispetto al quale $M^\infty(\Omega)$ è una $\mathbb{R}$-algebra *commutativa*, con unità la funzione costante 1, che contiene $A^\infty(\Omega,\mathbb{C}^2)$ come sottoalgebra rispetto al prodotto

$$(f_1, f_2)\cdot(g_1, g_2) = (f_1 g_1 + f_2 g_2, f_1 g_2 + f_2 g_1).$$

3. Dimostrazioni (cenni)

3.1 Teorema 1 (criterio di ψ-regolarità)
Il punto essenziale è una proprietà della forma differenziale associata al nucleo di Cauchy-Fueter per le funzioni ψ-regolari: la sua prima componente complessa coincide con il nucleo di Bochner-Martinelli in dimensione 2.

Si mostra che la formula di rappresentazione di Bochner-Martinelli per le funzioni armoniche si trasforma, sotto la condizione (*), nella formula di rappresentazione di Cauchy-Fueter, da cui la regolarità.

3.2 Teorema 2 (teorema di traccia)
Si mostra, usando la proprietà vista sopra, che l'integrale di Cauchy-Fueter di $f \in C(\partial\Omega)$ si annulla su $\mathbb{C}^2 \setminus \overline{\Omega}$ se vale la condizione

$$\int_{\partial\Omega} \bar{f}\left(\overline{\partial}_n - jL\right)\phi \; d\sigma = 0 \;\forall\; \phi \in Harm^1(\overline{\Omega}).$$

La formula di salto permette di concludere.

Se $\partial\Omega$ è *connessa*, e vale una delle condizioni C_1, C_2, ad esempio la seconda, l'integrale di Cauchy-Fueter di f definisce su $\mathbb{C}^2 \setminus \overline{\Omega}$ una funzione ψ-regolare, *a valori complessi* $\Rightarrow$ olomorfa $\Rightarrow$ si estende olomorficamente su $\mathbb{C}^2$.

Si ottiene così una $F = F^+ - \tilde{F}^-_{|\Omega}$ ψ-regolare su Ω, con traccia f su $\partial\Omega$.

3.3 Teorema 4 (criterio di olomorfia)
Posto $f = ah + hj$, si ottiene che la condizione C_2 è soddisfatta, per cui f è ψ-regolare. Dalle equazioni di ψ-regolarità si ottiene

$$\overline{\partial}h = 0.$$

3.4 Teorema 5 (problema $\overline{\partial}$-Neumann)
La tesi segue facilmente dal fatto che $\phi = \overline{L(f_1)}$ soddisfa la condizione di compatibilità per il problema $\overline{\partial}$-Neumann. Ne segue l'esistenza di f_2 tale che $\overline{\partial}_n f_2 = \overline{L(f_1)}$.

Se $\partial\Omega$ è connessa, $f = f_1 + f_2 j$ è ψ-regolare poiché soddisfa la condizione C_2.

3.5 Formula per il prodotto in $M^\infty(\Omega)$

Date $f, g \in M^\infty(\Omega)$, sia

$$f * g = R(f_1 g_1) - (f - R(f_1))j(g - R(g_1))$$

dove $f_1 = C(f)$, $g_1 = C(g)$, $CR = Id_{C^\infty(\partial\Omega)}$.

Posto $\phi : M^\infty(\Omega) \to M^\infty(\Omega)$

$$\phi(f) = f(1-j)/2,\ \phi^{-1}(f) = f(1+j)$$

il prodotto $m_\Omega(f, g)$ è definito da

$$m_\Omega(f, g) = \phi(\phi^{-1}(f) * \phi^{-1}(g)).$$

Esempio. *Sulla palla unitaria B, il prodotto della funzione ψ-regolare, non olomorfa,*

$$f = (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)j$$

per se stessa è la funzione ψ-regolare

$$m_B(f, f) = (\bar{z}_1^2 + 2z_1\bar{z}_2) + (2z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1^2)j$$

e il prodotto di f per $g = z_1 - z_1 j$ è

$$m_B(f, g) = m_B(g, f) =$$
$$(|z_1|^2 - |z_2|^2 + \bar{z}_1\bar{z}_2 + 1) + (|z_2|^2 - |z_1|^2 + \bar{z}_1\bar{z}_2 - 1)j.$$