Compito scritto di

Calcolo delle probabilità e Statistica (12 crediti)

14 novembre 2006

Esercizio 1. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme nell'intervallo $[1, 2]$. Sul piano cartesiano xOy consideriamo i punti $O = (0, 0)$, $A = (1, X)$ e $B = (X, 0)$. Determinare la distribuzione dell'area del triangolo AOB e la sua media.

Esercizio 2. Una cellula nel suo funzionamento immagazzina energia che rilascia in un processo di elaborazione. I livelli possibili di energia immagazzinata sono discreti e variano da 0 a $N = 6$; l'energia necessaria al processo è pari a $K = 3$.

Se la cellula si trova al livello energetico x, con $x < K$, allora con certezza accumula una nuova unità di energia. Se $x \geq K$, la cellula può iniziare il processo di elaborazione con probabilità $(x-K+1)/(N-K+1)$, nel qual caso la sua energia diminuisce di K unità; altrimenti accumula una nuova unità di energia.

Indichiamo con X_n la quantità di energia della cellula al tempo n.

1. Dimostrare che X_n è una catena di Markov, di cui si chiede di scrivere la matrice di transizione.
2. Classificare gli stati del sistema in transitori e ricorrenti.
3. Sapendo che $X_0 = 0$, determinare la distribuzione di $X_1, \dots, X_K$.
4. Determinare il periodo dello stato $x = 0$.
5. Classificare la catena: è irriducibile? periodica? regolare?
6. Sapendo che lo stato iniziale del sistema è $X_0 = 0$, determinare lo stato del sistema al tempo $n = 10^6$.
7. Possiamo determinare la quantità di energia media contenuta nella cellula?

Esercizio 3. Il tempo di funzionamento di un componente di una apparecchiatura di sicurezza ha distribuzione esponenziale di media $\frac{1}{\lambda} = 1,4$ (in unità arbitrarie). I componenti vengono sostituiti al momento della rottura e, quando si è rotto il 150-esimo ricambio, viene sostituita l'intera apparecchiatura.

Determinare con un'opportuna approssimazione la probabilità che il tempo totale di funzionamento sia stato superiore a 200 (nelle stesse unità).

Esercizio 4. Un'urna contiene lo stesso numero N di palline bianche e nere; si supponga N abbastanza grande e si estraggano 10 palline dall'urna, che vengono immesse in una seconda urna.

Indichiamo con B il numero di palline bianche estratte (ossia, il numero di palline bianche nella seconda urna). Determinare la distribuzione di B. Mostrare che la media di B è $\mathbb{E}[B] = 5$.

Dalla seconda urna si estrae una pallina. Sia $X = 1$ se la pallina estratta è bianca, $X = 0$ altrimenti. Determinare la distribuzione congiunta di (B, X) e la marginale di X. Come dipende questa distribuzione da N?

Esercizio 5. Viene lanciata 50 volte una moneta e si ottengono 32 teste. Determinare un intervallo di confidenza al livello $\alpha = 95\%$ per la parità p della moneta.