Prova scritta di

*Calcolo delle probabilità e Statistica (12 crediti)*

7 febbraio 2007

---

**Esercizio 1.** Luca e Giacomo si sfidano ad una gara di tiro al bersaglio. Sappiamo che Luca colpisce il bersaglio 4 volte su 5 e Giacomo 1 volta su 2. Lanceremo una moneta per decidere chi inizia la gara, quindi i due si alterneranno a tirare fino a quando uno non colpisce il bersaglio; quello sarà nominato vincitore.

**a.** Se sappiamo che inizia Giacomo, qual è la sua probabilità di vittoria?

**b.** Giacomo vuole usare una moneta non euqilibrata, per cui la sua probabilità di iniziare è $x = 4/5$. Qual è la probabilità di vittoria di Giacomo nel gioco?

**c.** Sapreste dire come si dovrebbe scegliere la moneta in modo che il gioco diventi onesto?

**Esercizio 2.** Inseguiti dalla *Spectre*, non possiamo passare pi di un giorno in una città . Dobbiamo perøcercare le informazioni che ci servono per sconfiggere il perfido nemico, quindi dobbiamo indagare a Milano, Londra, New York e Portland. Da Milano, partono il doppio di voli per Londra che per New York, da Londra il doppio di voli per New York che per Milano; da New York partono tanti voli per Portland quanti per Londra mentre per Milano sono la metà di quelli per Portland; da Portland, partono il doppio di voli per New York che per Londra. Per non farci scoprire, scegliamo di partire da ogni città scegliendo a caso uno dei voli in partenza.

**a.** Descrivere la posizione del viaggiatore come catena di Markov e determinarne la matrice di transizione.

**b.** Sapendo che oggi siamo a Milano, determinare la probabilità di essere a Milano dopo 1, 2 e 3 giorni e determinare il periodo dello stato Milano.

**c.** Determinare se esiste il limite della matrice di transizione a $n$ passi $T^n$ quando $n$ tende all'infinito.

**Esercizio 3.** Risolvere, giustificando opportunamente ogni risposta, i seguenti quesiti:

**a.** Siano $X$ e $Y$ distribuzioni gaussiane standard indipendenti. Poniamo $Z = 2X - 3Y$. Determinare i primi due momenti di $Z$.

**b.** Lanciamo un dado e sia $D$ il valore uscito. Costruiamo un mazzo formato da tutte le carte di valore uguale o inferiore a $D$ (se $D = 1$ vi sono solo gli 1, etc.). Estraendo una carta dal mazzo, determinare la probabilità che sia pari.

**c.** Sia $X$ una V.A. distribuita uniformemente nel quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$. Definiti i quadrati:

$$Q_1 \equiv \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \times \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \quad ; \quad Q_2 \equiv \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \times \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$$

determinare: $\mathbb{P}\left(X \in Q_2 \mid X \in Q_1\right)$.

**Esercizio 4.** Nella costruzione di una linea ferroviaria vengono utilizzate traversine aventi larghezza 30cm; il buco, ossia la distanza tra la fine di una e l'inizio della successiva, è variabile, con media 30cm e deviazione standard di 3cm. Usando una opportuna approssimazione, stimare la probabilità che la 101-esima traversina termini entro 60m dall'inizio della prima.

**Esercizio 5.** Il gruppo ciclistico Baldo, composto da 100 corridori, è impegnato in alcuni test di potenza / resistenza. In particolare i suoi atleti sono chiamati a percorrere la tappa Trento-Bondone usando rapporti tali da rimanere nell' intervallo di pedalata compreso tra 60 e 75 *rotazioni per minuto (rpm)* medie. Alla fine del test si raccolgono i seguenti dati:

| RPM media | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N.ro Atleti | 3 | 1 | 1 | 10 | 2 | 6 | 15 | 20 | 7 | 9 | 13 | 5 | 6 | 1 | 1 |

In relazione ai dati riportati in tabella:

**a**. Ricavare un istogramma delle frequenze per le classi $60 - 64$, $65 - 66$, 67, $68 - 69$, $70 - 74$ relativamente al dato *rpm media*

**b**. Determinare media e varianza campionaria

**c**. Determinare intervalli di confidenza al livello del 95% e del 99% per la stima della *rpm media* ottenuta dal gruppo ciclistico nel test.