Compito scritto di
Calcolo delle probabilità e Statistica (12 crediti)
5 giugno 2007

---

1. Sono date due urne, la prima contenente 4 palline nere e 6 bianche, la seconda contenente 6 nere e 4 bianche. Si estraggono 2 palline dalla prima urna e si inseriscono nella seconda urna, quindi si effettua una estrazione dalla seconda urna.

1. Determinare la probabilità che le due palline estratte dalla prima urna siano dello stesso colore.
2. Determinare la probabilità che la pallina estratta dalla seconda urna sia bianca.
3. Sapendo che la pallina estratta dalla seconda urna è bianca, determinare la probabilità che le palline estratte dalla prima urna avessero lo stesso colore.

2. Sia $\{X_n\}$ una catena di Markov con spazio degli stati $S = \{1, 2, 3, 4\}$, e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Elencare le classi chiuse e classificare gli stati della catena (ricorrenti, transitori,...).
2. Calcolare la legge/le leggi invariante/i. Possiamo dire che la legge invariante è unica?
3. Calcolare, per ogni $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, la probabilità $\Pr(X_n = 1 \mid X_0 = i)$.
4. Calcolare la probabilità $\Pr(X_n = 3 \mid X_0 = 1)$.

3. Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti ed equidistribuite, con distribuzione uniforme in $(0, 1)$; poniamo $Z = \min\{X, Y\}^2$. Determinare media e varianza di Z.

Suggerimento: ricordare che la derivata di x^α è $\alpha x^{\alpha-1}$

4. In una classe di prima media si sono registrate le seguenti altezze:

151,1	143,9	148,7	164	143,3	139,7	153	139,8	134,5	159,9
156,2	144,9	148,6	138,3	151,8	146,6	160,8	147,6	147,8	155,5

1. Tracciare un istogramma per le classi 130–139,9; 140–144,9; 145–149,9; 150–154,9; 155-159,9; 160-169,9.
2. Determinare la media e la deviazione standard campionaria.
3. Determinare un intervallo di confidenza al livello $\alpha = 0,95$ per la media della popolazione.

5. Definire la funzione di densità di una variabile aleatoria continua e presentare le sue proprietà. Mostrare con un esempio che questa funzione non è necessariamente continua.

Data una variabile aleatorie X avente legge gaussiana $N(1, 1)$, scrivere esplicitamente la sua densità. Determinare il valore della probabilità $\Pr(|X| > 1)$.

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & -1 \le x \le 1 \\ 0, \text{altrimenti} \end{cases}$$

dimostrare che f è una densità di probabilità; sia Y una variabile aleatoria avente f come densità. Determinare la media e la varianza di Y.