Appello d'esame

Calcolo delle probabilità e Statistica (12 crediti)

3 luglio 2007

Esercizio 1. Un fiume si dice in periodo di magra se il suo livello è almeno un metro inferiore alla media. Dalle statistiche si sa che il numero di periodi di magra in un anno ha distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 2$.

(a) Qual è la probabilità che in un anno ci siano almeno 3 periodi di magra?

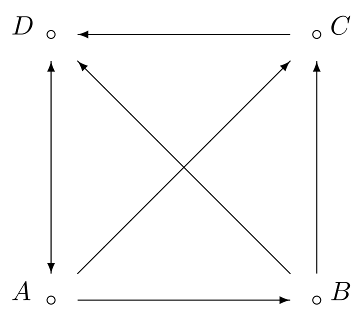
Diremo che siamo in un periodo di secca se il livello del fiume è almeno due metri inferiore rispetto alla media. Ogni periodo di magra, indipendentemente dagli altri, è un periodo di secca con probabilità $p = 0,5$.

(b) Determinare la probabilitè che in un anno ci siano 0, 1, 2, . . . , periodi di secca.

(c) Qual è la distribuzione del numero di periodi di secca in un anno? Qual è la sua media?

Esercizio 2. Si consideri il triangolo rettangolo isoscele ABC i cui cateti AC e BC hanno lunghezza ℓ; su AC si sceglie un punto a caso P e si traccia la perpendicolare alla ipotenusa che si interseca nel punto Q. Sia X la variabile aleatoria che misura l'area del triangolo APQ. Determinare la distribuzione di X e la sua media.

Esercizio 3. Si consideri la catena di Markov associata al seguente grafo:



(a) Scrivere la matrice di transizione della catena e classificarne gli stati. La catena è ergodica?

Data una distribuzione iniziale $\pi_0 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ uniforme sugli stati, determinare

(b) la probabilità di trovarsi nello stato A dopo 1 passo;

(c) la probabilità di trovarsi nello stato D dopo 1,2,3 passi;

(d) se esiste, determinare la distribuzione invariante della catena.

Esercizio 4. Data la seguente distribuzione di frequenze:

x	0-1	1-5	5-7	7-8	8-10
f(x)	10	100	40	30	20

(a) rappresentarla graficamente tramite un istogramma;

(b) calcolare media aritmetica, mediana, primo e terzo quartile;

(c) calcolare IQR e deviazione standard campionaria.

Esercizio 5. Le 40 carte di un mazzo vengono distribuite tra due giocatori in modo tale che ognuna delle possibili divisioni del mazzo in due mazzi costituiti da 20 carte ciascuno sia equiprobabile. Il mazzo di 40 carte contiene 4 assi. Sia NA = numero di assi in mano al giocatore A, NB = numero di assi in mano al giocatore B

(a) Si determini la funzione di distribuzione della variabili casuali NA e NB: sono equidistribuite?

(b) Calcolare i valori medi di NA e di NB

(c) Si determini la funzione di distribuzione congiunta delle variabili casuali (NA, NB): sono indipendenti?

(d) Calcolare la funzione di distribuzione della variabile NA quando il mazzo è costituito da $4n$ carte ($n > 1$) ed il numero di assi rimane 4. Calcolarne il limite quando n tende ad infinito.