

Appello d'esame  
Calcolo delle probabilità e Statistica (12 crediti)  
4 settembre 2007

---

**Esercizio 1.** Dimostrare che  $f(x) = \frac{2}{x}$  può considerarsi la densità di probabilità di una variabile casuale definita nell'intervallo

$$e^{a/2} \leq x \leq e^{(a+1)/2}$$

per qualunque  $a \geq 0$ . Detta  $X$  una variabile aleatoria avente densità  $f(x)$  per  $a = 1$ , se ne calcolino la media e la varianza.

**Esercizio 2.** Siano  $X$  e  $Y$  variabili aleatorie indipendenti aventi distribuzione uniforme nell'intervallo  $(0, 3)$ . Calcolare la probabilità dell'evento

$$(E_1 \cap F_1) \cup (E_2 \cap F_2)$$

sapendo che:  $E_1$  è l'evento  $0 \leq X \leq 1$ ,  $E_2$  è l'evento  $\frac{1}{2} \leq X \leq 2$ ,  $F_1$  è l'evento  $1 \leq Y \leq 2$  e infine  $F_2$  è l'evento  $1 \leq Y \leq 3$ .

**Esercizio 3.** Si consideri la catena di Markov sullo spazio degli stati  $\{A, B, C\}$  associata alla seguente matrice stocastica:

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,9 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Classificare gli stati. La catena è ergodica?

(b) Se esiste, determinare la distribuzione invariante della catena.

Data una distribuzione iniziale  $\pi_0 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  uniforme sugli stati, determinare

(c) la probabilità di trovarsi nello stato  $A$  dopo 1 passo;

(d) la probabilità di trovarsi nello stato  $C$  dopo 1,2,3 passi.

**Esercizio 4.** Supponiamo che in un'indagine condotta su un campione casuale formato da 200 famiglie residenti in una provincia il risparmio medio annuo sia risultato uguale a Euro 2.200, con una stima dello scarto quadratico medio uguale a Euro 1.550.

Determinare l'intervallo di confidenza al livello  $\alpha = 0,95$  per il risparmio medio annuo delle famiglie di quella provincia.

**Esercizio 5.** Si consideri l'equazione di secondo grado

$$x^2 + \alpha x + \beta = 0$$

e si supponga che i valori di  $\alpha$  e  $\beta$  siano assegnati con una estrazione (con rimpiazzo) da un'urna contenente 10 palline numerate da 0 a 9.

a. Qual è la probabilità di ottenere un'equazione con radici reali?

b. Qual è la probabilità di ottenere un'equazione con radici reali coincidenti?