

Appello d'esame
Calcolo delle probabilità e Statistica (12 crediti)
4 settembre 2007

Esercizio 1. Dimostrare che $f(x) = \frac{2}{x}$ può considerarsi la densità di probabilità di una variabile casuale definita nell'intervallo

$$e^{a/2} \leq x \leq e^{(a+1)/2}$$

per qualunque $a \geq 0$. Detta X una variabile aleatoria avente densità $f(x)$ per $a = 1$, se ne calcolino la media e la varianza.

Esercizio 2. Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti aventi distribuzione uniforme nell'intervallo $(0, 3)$. Calcolare la probabilità dell'evento

$$(E_1 \cap F_1) \cup (E_2 \cap F_2)$$

sapendo che: E_1 è l'evento $0 \leq X \leq 1$, E_2 è l'evento $\frac{1}{2} \leq X \leq 2$, F_1 è l'evento $1 \leq Y \leq 2$ e infine F_2 è l'evento $1 \leq Y \leq 3$.

Esercizio 3. Si consideri la catena di Markov sullo spazio degli stati $\{A, B, C\}$ associata alla seguente matrice stocastica:

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,9 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Classificare gli stati. La catena è ergodica?

(b) Se esiste, determinare la distribuzione invariante della catena.

Data una distribuzione iniziale $\pi_0 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ uniforme sugli stati, determinare

(c) la probabilità di trovarsi nello stato A dopo 1 passo;

(d) la probabilità di trovarsi nello stato C dopo 1,2,3 passi.

Esercizio 4. Supponiamo che in un'indagine condotta su un campione casuale formato da 200 famiglie residenti in una provincia il risparmio medio annuo sia risultato uguale a Euro 2.200, con una stima dello scarto quadratico medio uguale a Euro 1.550.

Determinare l'intervallo di confidenza al livello $\alpha = 0,95$ per il risparmio medio annuo delle famiglie di quella provincia.

Esercizio 5. Si consideri l'equazione di secondo grado

$$x^2 + \alpha x + \beta = 0$$

e si supponga che i valori di α e β siano assegnati con una estrazione (con rimpiazzo) da un'urna contenente 10 palline numerate da 0 a 9.

a. Qual è la probabilità di ottenere un'equazione con radici reali?

b. Qual è la probabilità di ottenere un'equazione con radici reali coincidenti?