

Prova in Itinere  
Calcolo delle probabilità e Statistica (12 crediti)  
3 novembre 2009

---

**Esercizio 1** Si definisca il concetto di densità di probabilità. Si considerino le seguenti funzioni:

$$f_1(x) = \begin{cases} c(x+1) & -1 < x < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} cx+1 & -1 < x < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}, \quad f_3(x) = \begin{cases} cx^2 & -1 < x < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

Determinare, se esistono, per quali valori di  $c$  le varie funzioni sono densità di probabilità.

**Esercizio 2** Si definisca il concetto di media per una variabile aleatoria continua, discutendo in particolare sotto quali condizioni la media esiste finita.

**Esercizio 3** Ci sono 4 urne, esternamente indistinguibili, che contengono, rispettivamente,

$$U_1 = \{4N, 1R\}, \quad U_2 = \{4N, 2R\}, \quad U_3 = \{2N, 4R\}, \quad U_4 = \{3N, 3R\}.$$

Si sceglie a caso un'urna e si effettuano due estrazioni da quell'urna, senza reimmissione. **(a)** Qual è la probabilità di ottenere 2 volte  $R$ ? **(b)** Se ho ottenuto 2 volte  $R$ , qual è la probabilità di aver scelto l'urna  $U_2$ ?

**Esercizio 4** Sia  $X$  l'esito di una estrazione da un'urna contenente quattro biglie numerate con i valori 0,1,3,4. **(a)** Determinare media e varianza di  $X$ .

Si eseguono estrazioni successive dall'urna, con reimmissione, e si indicano con  $X_1, \dots, X_N$  i valori così ottenuti. **(b)** Si determini media e varianza della media campionaria  $Y = \frac{1}{N}(X_1 + \dots + X_N)$ . **(c)** Si determini la probabilità che siano necessari più di  $N = 1103$  lanci perché la somma  $S_N = X_1 + \dots + X_N$  superi quota 2009.

**Esercizio 5** Sia data la densità di probabilità

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

**(a)** Si determinino le distribuzioni marginali  $X$  e  $Y$ . **(b)** Le due variabili sono indipendenti? **(c)** Sia  $M$  il minimo tra  $X$  e  $Y$ : determinare la distribuzione di  $M$ .

**Esercizio 6** Si utilizzi la funzione generatrice dei momenti per mostrare che la somma di due variabili aleatorie con distribuzione binomiale, indipendenti, aventi la stessa probabilità di successo, ha ancora legge binomiale.

**Esercizio 7** Si lancia un dado a 6 facce fino a che non esce un numero pari. **(a)** Qual è il numero medio di lanci da fare? **(b)** Qual è la probabilità che servano più di due lanci?