

Appello straordinario
Calcolo delle probabilità e Statistica (12 crediti)
3 novembre 2009

Esercizio 1 I seguenti dati sono stati ottenuti testando una popolazione di lampadine identiche:

0,95 0,55 1,7 0,35 2,6 3,4 1,45 1,3 4,3 0,7 0,45 5,2 0,85 0,9 5,3

Si chiede di tracciare un istogramma per rappresentare i dati e stimare media e varianza campionaria.

[Facoltativo:] supponendo che i dati siano estratti da una popolazione con legge $\exp(\lambda)$, qual è la vostra stima per il parametro λ ?

Soluzione 1 La media dei dati è $\mu = 3$, la varianza campionaria $\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \mu)^2 = 3,01$. La stima puntuale del parametro λ non è pari a $1/\mu$ ma è $\hat{\lambda} = \frac{n-1}{\sum x_i} = \frac{n-1}{n\mu} = \frac{14}{45}$.

Esercizio 2 Da Milano vi sono linee aeree che collegano la città con Ancona, Cagliari, Lamezia Terme e Palermo. Palermo è anche collegata con Ancona e Cagliari, mentre Lamezia Terme è collegata anche con Ancona. Un pilota d'aereo viaggia ogni giorno da una città ad un'altra tra queste, sempre prendendo un volo a caso tra quelli in partenza.

Descrivere la posizione del pilota come una catena di Markov, di cui si chiede di determinare la matrice di transizione. Determinare inoltre la misura invariante della catena, discutere se è anche ergodica e determinare qual è, nel lungo periodo, la frazione di tempo trascorsa a Milano dal pilota.

Soluzione 2 Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{3}x_5 = 0 \\ \frac{1}{4}x_1 - x_3 + \frac{1}{3}x_5 = 0 \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - x_4 = 0 \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

si ottiene

$$\left\{ x_1 = \frac{4}{14} \quad x_2 = \frac{3}{14} \quad x_3 = \frac{2}{14} \quad x_4 = \frac{2}{14} \quad x_5 = \frac{3}{14} \right.$$

Esercizio 3 Sia X l'esito di una estrazione da un'urna contenente quattro biglie numerate con i valori 0,2,3,7. (a) Determinare media e varianza di X .

Si eseguono estrazioni successive dall'urna, con reimmissione, e si indicano con X_1, \dots, X_N i valori così ottenuti. (b) Si determini media e varianza della media campionaria $Y = \frac{1}{N}(X_1 + \dots + X_N)$. (c) Si determini la probabilità che siano necessari più di $N = 666$ lanci perché la somma $S_N = X_1 + \dots + X_N$ superi quota 2009.

Soluzione 3 Per quanto riguarda X otteniamo che la media è $E[X] = 3$, il momento secondo: $E[X^2] = 31/2$ e quindi la varianza: $V[X] = 13/2$. La media di Y_N è $\mathbb{E}[Y_N] = 3$ e la sua varianza è $V[Y_N] = \frac{13}{2N}$. Infine, usando l'approssimazione normale risulta $P(S_N < 2009) = 0,566$.

Esercizio 4 Si definisca il concetto di media per una variabile aleatoria continua, discutendo in particolare sotto quali condizioni essa esiste finita.

Esercizio 5 *Sia data la densità di probabilità*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(5x + 3y) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

- (a) *Si determinino le distribuzioni marginali X e Y .* (b) *Le due variabili sono indipendenti?*
(c) *Sia S la somma tra X e Y : determinare la distribuzione di S e la sua media.*