Appello

Calcolo delle probabilità e Statistica (12 crediti)

12 gennaio 2010

Esercizio 1 *Una roulette è truccata in modo da estrarre, in successione, un numero dalla prima dozzina, quindi uno dalla seconda dozzina, quindi uno dalla terza dozzina, quindi di nuovo dalla prima e così via. Ogni estrazione è uniforme sulla dozzina indicata. Il sistema viene quindi modellizzato tramite una catena di Markov sullo spazio degli stati* $E = \{1, 2, \ldots, 36\}$. **a.** *Si dimostri che la catena è irriducibile.* **b.** *Si calcoli il periodo della catena.* **c.** *Si determini la sua distribuzione invariante.* **d.** *La distribuzione invariante è anche distribuzione limite?*

Esercizio 2 *Sia* X *una variabile aleatoria che segue una legge Bernoulliana di parametro* p. **a.** *Scegliendo (solo in questo punto!)* $p = 1/3$, *tracciare il grafico della funzione di ripartizione di* X. **b.** *La varianza di* X *dipende da* p: *determinare il suo valore e tracciare il grafico della funzione* $p \mapsto V(X)$ *per* p *nell'intervallo* $[0, 1]$. **c.** *Determinare, se esiste, per quale valore del parametro* p *risulta* $V(X) = 1/3$.

Esercizio 3 *Un campione di* $n = 81$ *bottiglie viene sottoposto a verifica; si ottiene una media campionaria pari a* $\bar{x} = 983$ *cc. e una deviazione standard campionaria pari a* $s = 70$ *cc.* **a.** *Una associazione di consumatori vi chiede l'intervallo di confidenza più piccolo possibile, al livello di confidenza* $\alpha = 95\%$, *per la media reale* μ. *Determinatelo tramite un intervallo bilatero opportuno.*

b. *L'azienda produttrice vi chiede un valore superiore per la media reale* μ, *al livello di confidenza del* 99%. *Determinatelo tramite un intervallo unilatero opportuno.*

Esercizio 4 *Il sistema di controllo Tutor invia alla centrale una successione di segnali* X_n, *indipendenti e equidistribuiti, a valori nell'alfabeto* $E = \{-1, 0, 1, 4\}$ *con probabilità rispettivamente* $1/4$, $1/8$, $1/2$ *e* $1/8$.

a. *Determinare media e varianza di* X.

b. *Si determini il valore dell'entropia* $H(X)$.

c. *Si consideri la somma* $S_N = X_1 + \cdots + X_N$; *attraverso una opportuna approssimazione, determinare la probabilità che la somma dei primi* $N = 2100$ *segnali superi il valore 1500.*

Esercizio 5 *Sul triangolo* T *avente vertici* $(0, 0)$, $(1, 0)$ *e* $(0, 1)$ *si consideri la funzione*

$$f(x, y) = \begin{cases} x + \alpha y & 0(x, y) \in T \\ 0, & \textit{altrove.} \end{cases}$$

a. *Determinare per quale valore di* α *la funzione* $f(x, y)$ *è una densità di probabilità.* **b.** *Si determinino le distribuzioni marginali* X *e* Y. *Le due variabili sono indipendenti?* **c.** *Sia* S *la somma tra* X *e* Y: *determinare la distribuzione di* S *e la sua media.*

Esercizio 6 *Si definisca il concetto di irriducibilità per una catena di Markov. Usando in maniera opportuna esempi e controesempi si discuta la relazione con il concetto di catena ergodica.*