

Prova scritta di
Calcolo delle probabilità e Statistica (12 crediti)
2 febbraio 2010

Esercizio 1. Risolvere, giustificando opportunamente ogni risposta, i seguenti quesiti:

- a. Siano X e Y distribuzioni gaussiane standard indipendenti. Poniamo $Z = X - 2Y$. Determinare i primi due momenti di Z .
- b. Ricordare la definizione di funzione densità per una variabile aleatoria continua. In particolare, sia X una variabile aleatoria con legge esponenziale di parametro λ ; si tracci un grafico approssimativo della sua funzione densità e della sua funzione di ripartizione.
- c. L'altezza media di una popolazione con deviazione standard nota pari a $\sigma = 6$ viene stimata a partire da un campione di popolosità $n = 25$ che fornisce una media campionaria pari a $\bar{x} = 150$. Determinare un intervallo di confidenza al livello $\alpha = 95\%$ per l'altezza della popolazione.

Esercizio 2. Un'urna contiene due palline rosse e un numero N di palline nere. Si aggiunge all'urna una pallina di colore X , scelto a caso, con eguale probabilità, tra il rosso e il nero. Dall'urna (che ora contiene $2 + N + 1$ palline) viene estratta una pallina e si ottiene una pallina rossa.

- a. Qual è la probabilità dell'evento $E_N = \{\text{estratta una pallina nera}\}$?
- b. Qual è la probabilità dell'evento $X_N = \{\text{aggiunta una pallina nera}\}$ sapendo E_N ?

Esercizio 3. Luca e Giacomo giocano una partita a dadi con queste regole. Luca inizia a giocare: lancia due dadi e vince se la somma è 8. Altrimenti tocca a Giacomo lanciare: Giacomo vince se la sua somma è 7. Altrimenti continuano a alternarsi finché uno dei due vince.

- a. Determinare la probabilità degli eventi: ottenere 8 come somma del lancio di due dadi; ottenere 7 nel lancio di due dadi.
- b. Qual è la probabilità di vittoria di Giacomo nel gioco?

Esercizio 4. E' data la seguente tabella che fornisce gli esiti di una indagine statistica. Si tracci un istogramma a partire dai dati. Si determinino i valori di media e mediana per la popolazione in oggetto.

Classe	frequenza
0-1	40
1-3	60
3-5	80
5-6	20

Esercizio 5. Le probabilità di transizione dopo un passo in una catena di Markov sono espresse dalla matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

- a. Trovate le probabilità di transizione in due passi.
- b. Determinare se la matrice è irriducibile, regolare, ergodica.
- c. Determinare la misura invariante del sistema se esiste, e discutere l'unicità.