

Prova d'esame  
Calcolo delle probabilità e Statistica (Informatica)  
3 giugno 2010

---

**Esercizio 1.** Siamo a Nicosia, Cipro, in vacanza. Sappiamo che la popolazione di Nicosia è per l'80% greca e per il 20% turca. Si sa che il 60% dei greci parla inglese mentre il 30% dei turchi parla inglese. Calcolate la probabilità che, chiedendo informazioni a un abitante di Nicosia incontrato per strada, tale abitante locale **(a)** parli inglese, **(b)** sia greco, dato che parla inglese.

**Esercizio 2.** Si suppone che la speranza di vita  $X$  di ogni membro della popolazione di maghi sia una variabile aleatoria avente distribuzione esponenziale di media 160 anni. Calcolare la probabilità che un mago della popolazione in questione **(a)** sopravviva fino all'età della pensione (180 anni); **(b)** viva almeno 170 anni, sapendo che ha festeggiato il suo 165-simo compleanno. Inoltre, **(c)** per quale valore  $\alpha$ ,  $\mathbb{P}(X \geq \alpha) = 0,6$ ?

**Esercizio 3.** Sia dato un vettore aleatorio  $(X, Y)$  la cui densità congiunta è data dalla funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x^2 + y) & \text{per } (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

- (a)** Determinare il valore di  $c$ .
- (b)** Calcolare le densità marginali delle variabili aleatorie  $X$  e  $Y$ . Si tratta di variabili indipendenti?
- (c)** Si calcolino  $\mathbb{P}(X + Y > 1)$  e  $\mathbb{P}(Y/X < 2)$ .

**Esercizio 4.** I voti all'esame di statistica possono essere descritti come una variabile aleatoria normale di media  $\mu$  e deviazione standard  $\sigma$ . Nello scorso appello erano presenti 65 studenti che hanno riportato una votazione media  $\bar{x} = 25,4$  e una deviazione standard campionaria  $s = 2$ .

- (a)** Determinare un intervallo di confidenza al livello  $\alpha = 95\%$  per il voto medio degli studenti all'esame di statistica;
- (b)** Quanti studenti dovrebbero consegnare il compito per far sì che l'intervallo di confidenza al livello  $\alpha = 95\%$  abbia un'ampiezza inferiore a 5 decimi di voto?

**Esercizio 5.** Sia  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  il processo stocastico su  $E = \{1, 2, 3, 4\}$  caratterizzato dalla seguente *matrice di transizione*:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

**(a)** Discutere il carattere degli stati della catena individuandone le eventuali classi *transienti* e *finali*. Calcolare le misure invarianti della catena. La catena è *ergodica*? In caso negativo giustificare la risposta.

**(b)** Consideriamo la distribuzione di probabilità iniziale  $\pi_0 \equiv (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$ . Qual è la probabilità che  $X_2 = 3$ ? Se invece prendiamo  $\pi_0 \equiv (0, \frac{5}{9}, 0, \frac{4}{9})$ , qual è la probabilità che  $X_{11} \in \{1, 3\}$ ?