Prova d'esame

Calcolo delle probabilità e Statistica (12 crediti)

11 luglio 2011

Esercizio 1 Supponiamo di avere due urne, ognuna con 5 palline; nella prima urna, 2 sono bianche e 3 rosse mentre nella seconda urna, 4 sono bianche e la restante rossa. Estraggo una pallina dalla prima urna:

- se è bianca, la reinserisco (nella prima urna) e estraggo una pallina dalla seconda urna;
- se è rossa, la inserisco nella seconda urna e da questa estraggo una pallina.

Determinare:

1. la probabilità di ottenere una pallina rossa alla seconda estrazione;
2. se si ottiene una pallina bianca alla seconda estrazione, qual è la probabilità che anche la prima fosse bianca?
3. qual è la probabilità di ottenere due palline dello stesso colore?

Soluzione.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = R) = \mathbb{P}(X_2 = R \mid X_1 = R)\mathbb{P}(X_1 = R) + \mathbb{P}(X_2 = R \mid X_1 = B)\mathbb{P}(X_1 = B)\\ = \frac{2}{6}\frac{3}{5} + \frac{1}{5}\frac{2}{5} = \frac{7}{25}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X_1 = B \mid X_2 = B) = \frac{\mathbb{P}(X_2 = B \mid X_1 = B)\mathbb{P}(X_1 = B)}{\mathbb{P}(X_2 = B)} = \frac{\frac{4}{5}\frac{2}{5}}{\frac{18}{25}} = \frac{4}{9}.$$

$$\mathbb{P}(X_1 = B, X_2 = B) = \mathbb{P}(X_2 = B \mid X_1 = B)\mathbb{P}(X_1 = B) = \frac{2}{5}\frac{4}{5} = \frac{8}{25};$$
$$\mathbb{P}(X_1 = R, X_2 = R) = \frac{3}{5}\frac{2}{6} = \frac{1}{5}$$

quindi la probabilità che le due palline abbiano lo stesso colore è $\frac{13}{25}$.

Esercizio 2 Nella stazione di Yellowknife, in Canada, è stato registrato lo spessore del ghiaccio (in pollici); la seguente tabella riporta i rilevamenti effettuati tra il 2 gennaio e il 20 maggio 2004:

110	111	114	106	110	108	112
111	106	105	102	92	90	88
83	77	78	66	65	60	53

1. Rappresentare tramite un istogramma la distribuzione (con dati raggruppati a intervalli di ampiezza 10 pollici).
2. Dopo aver ordinato i dati secondo la profondità registrata, calcolare la mediana e lo scarto interquartile.
3. Determinare lo spessore medio del ghiaccio, calcolarne la varianza campionaria e lo scarto quadratico medio campionario.

Soluzione. Media: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 92,7$ pollici; varianza campionaria: $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 381,6$ pollici quadrati; scarto quadratico medio $s = \sqrt{s^2} = 19,5$ pollici.

Mediana: dato che i dati sono dispari, risulta che devo scegliere il valore centrale dei dati ordinati, quindi $m = x_{11} = 102$ pollici. Il primo e il terzo quartile sono, rispettivamente $q_1 = x_6 = 78$ e $q_3 = x_{16} = 110$ pollici, quindi lo scarto interquartile è pari a 32 pollici.

Esercizio 3 Sia data la funzione $f(x,y) = c\, e^{-(x+y)}\mathbf{1}_{\{x>0\}}\mathbf{1}_{\{y>0\}}$ dove c è una costante opportuna.

1. Determinare c in modo che f sia una densità di probabilità.
2. Determinare le leggi marginali f_X e f_Y; le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti?
3. Determinare $\mathbb{P}(Y < 2)$, $\mathbb{P}(Y < 2, X < 2)$.

Soluzione.

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$$

quindi $c = 1$; risulta che la densità congiunta si può fattorizzare $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ con $f_X(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{\{x>0\}}$ e $f_Y(y) = e^{-y}\mathbf{1}_{\{y>0\}}$, quindi X e Y hanno distribuzione esponenziale di parametro 1 e sono indipendenti.

$$\mathbb{P}(Y < 2) = \int_0^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 - 2^{-2} = \mathbb{P}(X < 2);$$
$$\mathbb{P}(X < 2, Y < 2) = \mathbb{P}(X < 2)\mathbb{P}(Y < 2) = (1 - e^{-2})^2$$

dove, nel primo passaggio, abbiamo usato l'indipendenza tra X e Y.

Esercizio 4 Il peso medio delle uova destinate alla vendita per i ristoranti è di 60g., con varianza 16g^2. Il locale *Cucina da Luca* ne acquista 900. Determinare la probabilità che il peso totale delle uova acquistate sia superiore a 53,8kg.

Soluzione. Sia $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$; allora S_N ha legge approssimativamente normale di media $N\,\mu$ e varianza $N\,\sigma^2$, quindi

$$\mathbb{P}(S_N > 53800) = \mathbb{P}(\frac{S_N - N\,\mu}{\sqrt{N\,\sigma^2}} > \frac{53800 - 54000}{120}) \simeq 1 - \Phi(-5/3) = \Phi(5/3) = 0.95154$$

la probabilità richiesta è del $95,154\%$.

Esercizio 5 Consideriamo una tavola da gioco con caselle numerate da 0 a 6; ad ogni turno, lanciamo un dado equilibrato e ci muoviamo (sempre, inizialmente, verso caselle di valore maggiore) di tante caselle quante sono quelle indicate dal dado, con la scelta che se superiamo 6 il movimento continua all'indietro. Ad esempio, se partiamo da 5 e lanciamo un 4, si termina in 3; se partiamo da 6 e lanciamo un 6, si termina in 0.

1. Scrivere la matrice di transizione del sistema. Determinare se il sistema è irriducibile, periodico o aperiodico, regolare.
2. Determinare la misura invariante del sistema e discuterne l'unicità.
3. Qual è, a lungo andare, lo stato visitato più spesso?

Soluzione. Il sistema è irriducibile e aperiodico quindi regolare.

La distribuzione invariante è $\pi = \left(\frac{1}{42}, \frac{3}{42}, \frac{5}{42}, \frac{7}{42}, \frac{9}{42}, \frac{11}{42}, \frac{6}{42}\right)$. Dato che il sistema è regolare e a stati finiti, allora lo stato con frequenza maggiore è lo stato 5 con frequenza $\frac{11}{42}$.

Esercizio 6 Sia dato un dado non equilibrato, in cui le facce 2, 3, 4 e 5 escono con probabilità 1/6 e le facce 1 e 6 escono con probabilità x e y. Sapendo che il punteggio medio lanciato dal dado è 4, si determini l'entropia associata al lancio del dado.

Soluzione. Dal sistema

$$x + (2 + 3 + 4 + 5)\frac{1}{6} + 6y = 4$$
$$x + 4/6 + y = 1$$

si ottiene $x = \frac{1}{15}$, $y = \frac{4}{15}$; l'entropia del lancio del dado è

$$H(X) = \frac{1}{15}\log_2(15) + 4 \cdot \frac{1}{6}\log_2(6) + \frac{4}{15}\log_2(15/4) = \frac{2}{15} + \log_2(3) + \frac{1}{3}\log_2(5) \simeq 2,49227$$