Prova d'esame

Calcolo delle Probabilità e Statistica (12 crediti)

11 giugno 2012

Esercizio 1 A. A. Michelson fece una serie di misure della velocità della luce. Usando degli specchi rotanti ottenne le seguenti differenze (velocità della luce nell'aria - 229700) km/s:

12	30	30	27	30	39	18	27	48	24	18

(dati tratti da *The Astrophysical Journal*, 1927).

(a) Trovare la media e la mediana

(b) Trovare il massimo, il minimo, il range e lo scarto IQR

(c) Calcolare la varianza e la deviazione standard.

Soluzione. Ordinando i dati si ottiene

12	18	18	24	27	27	30	30	30	39	48

da cui min $= 12$, max $= 48$, mediana$=27$, $Q_1 = 18$, $Q_3 = 30$, range=36, IQR=12, media $\bar{x} = \frac{1}{11}\sum x_k = 27,\overline{54}$, varianza $s^2 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum x_k^2 - (\bar{x})^2\right) = 100,4\overline{27}$, deviazione standard $s = 10,0236$.

Esercizio 2 Siano P_1, P_2, P_3, P_4 i vertici di un quadrato Q. Sia P_5 il punto di intersezione delle due diagonali di Q. Consideriamo la catena di Markov X_n, $n \in \mathbb{N}$, con spazio degli stati $S = \{P_1, \dots P_5\}$ associato alle seguenti transizioni: per ogni $i < 5$ la transizione $P_i \to P_5$ ha probabilità 1, mentre per ogni $j = 1, \dots 5$ la transizione $P_5 \to P_j$ ha probabilità 1/5.

(a) Scrivere la matrice di transizione T associata a X_n.

(b) Mostrare che T è regolare.

(c) Calcolare la misura invariante e descrivere il limte di $T^n(i,j)$, $n \to \infty$, per ogni i, j.

Soluzione. La matrice di transizione del sistema è

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Il sistema è irriducibile, aperiodico, regolare, ergodico; tutti gli stati sono ricorrenti positivi; la distribuzione invariante è anche limite e vale $\pi^* = (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{5}{9})$. Si ottiene, dato che il sistema è regolare, $T^n(i,j) \simeq \pi^*(j)$.

Esercizio 3 Consideriamo una famiglia di lampadine, in cui la durata di vita sia descritta da una variabile aleatoria di legge esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{310}h^{-1}$. **(a)** Determinare la probabilità p (a meno di due cifre decimali) che una lampadina duri più di 500 h.

Su una famiglia di 20 lampadine, determinare la probabilità **(b)** che (esattamente) 2 abbiano durata maggiore di 500 h.; **(c)** che al più 5 abbiano durata maggiore di 500 h.

Soluzione. $p = \exp(-500/310) = 0,20$. Per rispondere ai punti (b) e (c) uso una legge binomiale: $\mathbb{P}(N = 2) = \binom{2}{20} p^2(1-p)^{18} = 0,1369$; $\mathbb{P}(N \leq 5) = 0,8042$.

Esercizio 4 I tempi di blocco dei due processori di un computer per l'elaborazione in parallelo hanno densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 0,04e^{-0,2x-0,2y} & \text{per } x > 0,\ y > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

in cui x si riferisce al primo processore e y al secondo. Trovare

(a) le distribuzioni marginali e le loro medie;

(b) la probabilità che nessuno dei due processori si blocchi prima della sua propria durata media;

(c) il valore medio della variabile aleatoria i cui valori sono dati dalla funzione $g(x,y) = x + y$.

Soluzione. Si ottiene

$$f_X(x) = \frac{1}{25}e^{-x/5} \int_0^\infty e^{-y/5}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{5}e^{-x/5}$$

per $x > 0$ e 0 altrove; e anche $f_Y(y) = \frac{1}{5}e^{-y/5}$ per $y > 0$ e 0 altrove; le due variabili aleatorie sono indipendenti. La media di X (uguale a quella di Y) è $\mu_X = 5 = \mu_Y$. La probabilità che entrambi i processori siano ancora in funzione al tempo pari alla media è

$$\mathbb{P}(X > \mu_X, Y > \mu_Y) = e^{-2} = 0,135$$

La variabile $Z = g(X,Y) = X + Y$ ha media $\mu_Z = 10$ per linearità.

Esercizio 5 Gli ingegneri incaricati della manutenzione dei motori della flotta di una compagna aerea devono controllare il livello di corrosione interna delle tubature che fanno parte dei sistemi di raffreddamento. Le condizioni interne delle tubature non possono essere verificate direttamente, ma un test specifico può fornire indizi sulla possibile corrosione. Il test non è infallibile: ha probabilità 0,7 di individuare una corrosione quando è presente, ma può anche sbagliare indicando una corrosione interna che non c'è con probabilità 0,2. Supponiamo che la probabilità che una parte di tubature abbia corrosione interna sia 0,1.

(a) Determinare la probabilità che una parte delle tubature abbia corrosioni interne dopo che il test ne ha indicato la presenza.

(b) Determinare la probabilità che una parte delle tubature non abbia corrosioni interne dopo che il test ne ha indicato l'assenza.

Soluzione. Indichiamo con A l'evento "presenza di corrosioni" e con T l'evento "il test rivela corrosione interna". Sappiamo che $\mathbb{P}(A) = 0,1$, $\mathbb{P}(T \mid A) = 0,7$, $\mathbb{P}(T \mid A^c) = 0,2$. Allora

$$\mathbb{P}(A \mid T) = \frac{\mathbb{P}(T \mid A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(T \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(T \mid A^c)\mathbb{P}(A^c)} = \frac{7}{25}$$

e

$$\mathbb{P}(A^c \mid T^c) = \frac{\mathbb{P}(T^c \mid A^c)\mathbb{P}(A^c)}{\mathbb{P}(T^c \mid A^c)\mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(T^c \mid A)\mathbb{P}(A)} = \frac{72}{75}$$