Prova d'esame

Calcolo delle probabilità e Statistica (12 crediti)

5 settembre 2011

Esercizio 1 Un sistema a 5 stati evolve secondo le seguenti regole:

- dallo stato 1 ci si sposta nello stato 2;
- dagli stati 2,3,4 ci si sposta nello stato precedente o nello stato seguente con probabilità, rispettivamente, 1/3 e 2/3;
- dallo stato 5 ci si sposta nello stato precedente con probabilità 1/3 e si rimane nello stesso con probabilità 1/3.

(a) Scrivere il sistema come catena di Markov esplicitando, in particolare, la matrice di transizione:

(b) Se al tempo 0 ci si trova nello stato 1, qual è la probabilità di trovarsi in 1 al tempo $n = 3$?

(c) Discutere le proprietà del sistema, con particolare riferimento all'irriducibilità e all'ergodicità del sistema.

(d) Determinare (se esiste) la distribuzione invariante del sistema. Possiamo stimare qual è la probabilità di trovarci nello stato 1 al tempo $n = 3 \cdot 10^3$?

Soluzione. La matrice di transizione del sistema è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(b) Si osservi che il sistema al tempo $n = 0$ è nello stato 1 (dispari), al tempo $n = 1$ è nello stato 2 (pari), al tempo $n = 2$ è in uno stato dispari (1 oppure 3) e al tempo $n = 3$ è in uno stato pari (2 oppure 4). Allora la probabilità cercata è zero.

(c) Il sistema è irriducibile e regolare ($p_{55} > 0$) quindi ergodico. Esiste una unica misura invariante π e per ogni condizione iniziale il sistema converge verso π. Dal sistema

$$p_1 = \frac{1}{3}p_2 \quad p_2 = p_1 + \frac{1}{3}p_3 \quad p_3 = \frac{2}{3}p_2 + \frac{1}{3}p_4 \quad p_4 = \frac{2}{3}p_3 + \frac{1}{3}p_5 \quad p_5 = \frac{2}{3}p_4 + \frac{2}{3}p_5$$
$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$$

si ottiene

$$p_1 = \frac{1}{24}p_5 \quad p_2 = \frac{1}{8}p_5 \quad p_3 = \frac{1}{4}p_5 \quad p_4 = \frac{1}{2}p_5$$
$$\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1\right) p_5 = 1$$

da cui $\pi = \left(\frac{1}{46}, \frac{3}{46}, \frac{6}{46}, \frac{12}{46}, \frac{24}{46}\right)$. A regime, la probabilità di trovarsi nello stato 1 è $\frac{1}{46}$.

Esercizio 2 Consideriamo una urna $U_1 = \{4 \times \{R\}, 6 \times \{N\}\}$. Si estraggono due palline e si crea una seconda urna U_2. **(a)** Determinare la probabilità che da questa seconda urna si estragga una pallina rossa.

(b) Sapendo di aver estratto una pallina rossa dalla seconda urna, determinare la probabilità che la pallina rimasta nell'urna sia nera.

Soluzione. **(a)**: $P(E_2 = R) = P(E_2 = R \mid U_2 = \{R,R\})P(U_2 = \{R,R\}) + P(E_2 = R \mid U_2 = \{R,N\})P(U_2 = \{R,N\}) = 1\frac{12}{90} + \frac{1}{2}\frac{48}{90} = \frac{4}{10}$.

(2): $P_{E_2=R}(U_2 = \{R,N\}) = \frac{P(E_2=R, U_2=\{R,N\})}{P(E_2=R)} = \frac{24/90}{36/90} = \frac{2}{3}$.

Esercizio 3 **(a)** Determinare l'intervallo di confidenza al 95% per la media di una popolazione normale avente varianza $\sigma^2 = 0,25$ e da cui sia stato estratto un campione casuale di numerosità $n = 64$, avente media $\bar{x} = 2$.

(b) Determinare l'intervallo di confidenza al 95% per la media di una popolazione normale con varianza incognita, da cui sia stato estratto un campione di numerosità $n = 81$ avente media $\bar{x} = 1,1$ e varianza campionaria $s^2 = 0,25$.

(c) Determinare l'intervallo di confidenza al 95% per la proporzione della popolazione che presenta un dato fenomeno, sapendo che in un campione di $n = 256$ soggetti selezionati a caso, il 20% presenta tale fenomeno.

Soluzione. **(a)**: $\bar{x} \pm \phi_{(1+\alpha)/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ossia $[1.8775\,,\,2.1225]$.

(b): $\bar{x} \pm t(n-1)_{(1+\alpha)/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$ ossia $[0.989\,,\,1.211]$.

(c): $\bar{p} \pm \phi_{(1+\alpha)/2}\frac{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}}{\sqrt{n}}$ ossia $[0.151\,,\,0.249]$.

Esercizio 4 Sia

$$f(x) = \begin{cases} 2c, & 0 \le x \le 1 \\ 2c(2-x), & 1 \le x \le 2 \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

(a) Determinare il parametro reale c in modo che $f(x)$ sia la funzione di densità di una variabile aleatoria X.

(b) Calcolare la media e la varianza di X e la probabilità che $X > \frac{1}{2}$.

(c) Siano $X_1, X_2, \ldots$ copie indipendenti della variabile X. Determinare il comportamento asintotico di $S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ quando $n \to \infty$.

Soluzione. **(a)**: osserviamo che deve essere

$$1 = \int f(x)\,dx = \int_0^1 2c\,dx + \int_1^2 2c(2-x)\,dx = 3c$$

da cui $c = 1/3$.

(b) La media di X è pari a

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 2cx\,dx + \int_1^2 2cx(2-x)\,dx = 7c/3 = \frac{7}{9};$$

la sua varianza

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^1 2cx^2\,dx + \int_1^2 2cx^2(2-x)\,dx = 5c/2 = \frac{5}{6}, \qquad V(X) = \frac{5}{6} - \left(\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{37}{162}.$$

La probabilità di $X > \frac{1}{2}$ si ottiene da

$$P(X > 1/2) = 1 - P(X \leq 1/2) = 1 - \int_0^{1/2} 2c\,dx = 1 - c = \frac{2}{3}.$$

(c) Dato che X ha media e varianza finita, si può applicare la legge dei grandi numeri e si ottiene che S_n converge in probabilità a $\mathbb{E}[X] = \frac{7}{9}$.

Esercizio 5 Sia (X, Y) un vettore aleatorio avente la seguente distribuzione di probabilità:

	x_1	x_2	x_3
y_1	1/9	1/6	1/18
y_2	1/3	0	0
y_3	2/9	0	1/9

Determinare $H(X)$, $H(Y)$, $H(X,Y)$.

Soluzione. La distribuzione di X è data da $\{(x_1, 2/3), (x_2, 1/6), (x_3, 1/6)\}$ e l'entropia vale $H(X) = \frac{2}{3}\log_2(3/2) + \frac{1}{6}\log_2(6) = \log_2(3) - \frac{1}{3} = 1,2516$; la distribuzione di Y è data da $\{(y_1, 1/3), (y_2, 1/3), (y_3, 1/3)\}$ e l'entropia vale $H(Y) = \log_2(3) = 1,5850$. L'entropia congiunta vale

$$\begin{aligned} H(X,Y) &= \frac{1}{9}\log_2(9) + \frac{1}{6}\log_2(6) + \frac{1}{18}\log_2(18) + \frac{1}{3}\log_2(3) + \frac{2}{9}\log_2(9/2) + \frac{1}{9}\log_2(9) \\ &= \frac{3}{2}\log_2(3) + \frac{1}{9} = 2,3219 \end{aligned}$$