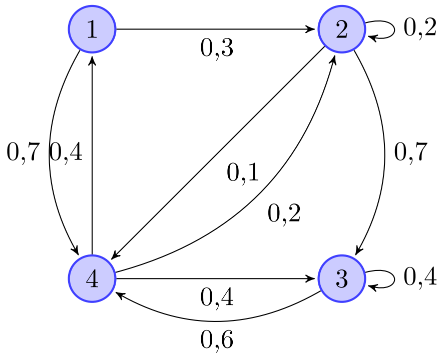
Prova d'esame

Calcolo delle Probabilità e Statistica (12 crediti)

7 febbraio 2012

Esercizio 1 Una catena di Markov a stati discreti ha il seguente grafo



(a) Scrivere la matrice di transizione del sistema.
(b) Determinare le caratteristiche del sistema: è irriducibile? periodico? regolare? Esiste una misura invariante?è unica? nel caso, determinarla.
(c) Se al tempo 0 siamo in 1, qual è la probabilità di trovarsi in 3 al tempo $n = 2$?
(d) Se al tempo 0 siamo in 1, qual è la probabilità di trovarsi in 3 al tempo $n = 234$?

Soluzione. La matrice di transizione del sistema è

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema è irriducibile, aperiodico, regolare, ergodico; tutti gli stati sono ricorrenti positivi; la distribuzione invariante è anche limite e vale $\pi^* = (\frac{3}{22}, \frac{3}{22}, \frac{17}{44}, \frac{15}{44})$. Si ottiene $p^{(2)}(1,3) = 0,49$; inoltre, dato che il sistema è regolare, $p^{(234)}(1,3) \simeq \pi^*(3) = \frac{15}{44}$.

Esercizio 2 Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} c\,x^2 e^{-y}, & 0 \le x \le 1,\ y \ge 0 \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

(a) Determinare per quale valore della costante c la funzione f definisce una densità di probabilità per un vettore aleatorio $Z = (X, Y)$. **(b)** Determinare le leggi marginali di X e Y; sono indipendenti? **(c)** Determinare la media della variabile aleatoria $U = X + Y$.

Soluzione.

$$\int_0^1 \int_0^\infty x^2 e^{-y}\,dy\,dx = \frac{1}{3}$$

quindi $c = 3$. La funzione densità di X è

$$f_X(t) = \int_0^\infty ct^2 e^{-y}\,dy = 3t^2 \qquad 0 < t < 1$$

e la sua media $\mathbb{E}[X] = \frac{3}{4}$; la funzione densità di Y è

$$f_Y(s) = \int_0^1 3x^2 e^{-s}\,dx = e^{-s}$$

e la sua media $\mathbb{E}[Y] = 1$. Le variabiii sono indipendenti: il prodotto delle marginali è uguale alla congiunta. La variabile U ha media $\mathbb{E}[U] = \frac{7}{4}$.

Esercizio 3 Un tipografo prepara un libro di $N = 120$ pagine, contenenti ognuna $n = 1500$ caratteri. Ogni carattere, indipendentemente dagli altri, può essere sbagliato con probabilità $p = 0,0009$. Utilizzando l'approssimazione alla binomiale con leggi di Poisson, calcolare la probabilità π_0 che una pagina fissata sia senza errori. Determinare quindi il numero medio di pagine del libro che contengono errori.

Soluzione. Indichiamo con $X \sim Po(\lambda)$ la variabile aleatoria che conta il numero di errori in una pagina fissata. Si sceglie $\lambda = np = 1.35$ e si ottiene $\pi_0 = \mathbb{P}(X = 0) = e^{-\lambda} = 0.259$. Indichiamo con Y_k la variabile aleatoria che vale 0 se la pagina k è corretta, vale 1 se la pagina k contiene almeno un errore. Risulta che il numero di pagine con errori è pari alla somma $Y_1 + \cdots + Y_N$; dato che $\mathbb{E}[Y_k] = 1 - \pi_0$, si ottiene che il numero medio di pagine con errori è $N(1 - \pi_0) = 88.9$.

Esercizio 4 I biologi del laboratorio ABC hanno esaminato una pianta del genere *Xyzxy* e dichiarano che le foglie della pianta hanno lunghezza media 21cm. Prendiamo un campione di 300 foglie e otteniamo $\bar{\mu} = 21.42$cm e $\bar{\sigma} = 2.32$cm. Costruite un intervallo di confidenza al livello $\alpha = 95\%$ per la lunghezza media delle foglie. In base al risultato, dobbiamo licenziare i biologi per incapacità?

Se avessi voluto un intervallo di confidenza di ampiezza 0.2cm, quante foglie avrei dovuto esaminare?

Soluzione. L'intervallo bilatero cercato è

$$\hat{\mu} \in \left(\bar{\mu} - \phi_{(1+\alpha)/2}\sqrt{\frac{\bar{\sigma}^2}{n}}, \bar{\mu} + \phi_{(1+\alpha)/2}\sqrt{\frac{\bar{\sigma}^2}{n}} \right)$$

Sostituendo i valori dati dall'esercizio, $\phi = 1.96$, $\bar{\mu} = 21.42$, si ottiene

$$\hat{p} \in (21.15,\ 21.68)$$

Con una confidenza del 95% dovrei licenziare i biologi! Perché l'ampiezza sia inferiore a 0.2 deve essere $2\phi_{(1+\alpha)/2}\sqrt{\frac{\bar{\sigma}^2}{n}} = 0.2$ da cui si ottiene $n = 2068$ piante da esaminare.

Esercizio 5 Si lancia una moneta equilibrata n volte (n dato) e si conta il numero X di volte in cui esce testa. Quindi si prende un dado e si lancia X volte. Sia Y il numero di volte in cui esce la faccia "1". Determinare la distribuzione di Y (in termini di n), la sua media e la sua varianza.

Soluzione. Si ha $P(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$; $P(Y = y \mid X = k) = \binom{k}{y}p^y(1-p)^{k-y}$, $p = 1/6$, e quindi

$$\begin{aligned}
P(Y = y) &= \sum_{k=y}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n \binom{k}{y} p^y (1-p)^{k-y} = \sum_{k=y}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{y!(k-y)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-y}\left(\frac{p}{2}\right)^y (1-p)^{k-y} \\
&= \frac{n!}{y!(n-y)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-y}\left(\frac{p}{2}\right)^y \sum_{k=y}^{n} \frac{(n-y)!}{(n-k)!(k-y)!}(1-p)^{k-y} \\
&= \frac{n!}{y!(n-y)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-y}\left(\frac{p}{2}\right)^y \sum_{j=0}^{n-y} \frac{(n-y)!}{(n-y-j)!j!}(1-p)^j 1^{n-y-j} \\
&= \frac{n!}{y!(n-y)!}\left(\frac{p}{2}\right)^y \left(\frac{1}{2}\right)^{n-y}(2-p)^{n-y} = \binom{n}{y}\left(\frac{p}{2}\right)^y\left(1 - \frac{p}{2}\right)^{n-y}
\end{aligned}$$

quindi Y ha distribuzione binomiale di parametri n e $p/2$, media $\frac{np}{2}$ e varianza $\frac{np}{2}\left(1 - \frac{p}{2}\right)$.